DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI

§ 1. Definice a postup řešení

Diferenciální rovnice prvního řádu se nazývá *rovnice se separovanými proměnnými*, jestliže má rovnice tvar

$$y' = f(x)g(y),$$

tj. pravá strana je součinem výrazů, z nichž každý závisí pouze na jedné z proměnných x a y. Vzpomeneme-li na označení derivace y' jako formálního podílu diferenciálů $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, řešení takovéto rovnice lze provést[1] jejím přepsáním ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

a následným zintegrováním podle jednotlivých proměnných:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

§ 2. Příklady

Příklad 2.1. Určeme obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = \left(\frac{3}{8}y + 2\right)\cot{\rm an}\, x. \tag{2.1}$$

22. dubna 2020, rontoa@fbm.vutbr.cz.

[1]Odůvodnění tohoto postupu se zakládá na vzorci pro derivaci složené funkce. Vskutku pro závisle proměnnou $y = y(x)$ platí $\mathrm{d}y(x) = y'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(y(x))\,\mathrm{d}x$, odkud $\frac{\mathrm{d}y(x)}{g(y(x))} = f(x)\,\mathrm{d}x$ a tudíž

$$\int \frac{\mathrm{d}y(x)}{g(y(x))} = \int f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.3}$$

V (1.3) máme integrál $\int \frac{\mathrm{d}u}{g(u)}$, jenž obdržíme substitucí $y(x) = u$. V praxi pro zjednodušení zápisu tento krok obvykle vynecháváme a používáme v integrálu stejnou proměnnou y (viz (1.3)).

Toto lze provést vzhledem ke skutečnosti, že člen $g(y)$ nezávisí na x. Takový postup, samozřejmé, selhává, když se místo $g(y)$ v rovnici vyskytuje vyraz $g_0(x, y)$ závisící i na x (nelze vykonat substituci $u = y(x)$).

Zde evidentně máme (1.1) ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\frac{3}{8}y+2} = \operatorname{cotan} x \,\mathrm{d}\,x \tag{2.2}$$

a řešení rovnice obdržíme výpočtem integrálů v rovnosti

$$\int \frac{\mathrm{d}\,y}{\frac{3}{8}y+2} = \int \operatorname{cotan} x \,\mathrm{d}\,x. \tag{2.3}$$

Protože $\mathrm{d}\big(\frac{3}{8}y+2\big) = \frac{3}{8}\,\mathrm{d}\,y$, platí

$$\int \frac{\mathrm{d}\,y}{\frac{3}{8}y+2} = \frac{8}{3}\int \frac{\mathrm{d}\big(\frac{3}{8}y+2\big)}{\frac{3}{8}y+2} = \frac{8}{3}\ln\left|\frac{3}{8}y+2\right| + B,$$

kde B je libovolná konstanta. Dále $\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}\,x$ a proto

$$\int \operatorname{cotan} x\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x},$$

pak dle (2.3)

$$\frac{8}{3}\ln\left|\frac{3}{8}y+2\right| + B = \ln|\sin x|$$

a

$$\ln\left|\frac{3}{8}y+2\right| + \frac{3}{8}B = \frac{3}{8}\ln|\sin x| = \ln\big(|\sin x|^{\frac{3}{8}}\big) \tag{2.4}$$

Pro zjednodušení zápisu vezměme B ve tvaru $B = \ln C$, kde $C > 0$ (takto udělat můžeme, jelikož logaritmus nabývá všech hodnot z $(-\infty, \infty)$). Potom z (2.4) obdržíme rovnosti[2]

$$\begin{aligned}
\ln\left|\frac{3}{8}y+2\right| + \frac{3}{8}\ln C &= \ln\big(|\sin x|^{\frac{3}{8}}\big),\\
\ln\left|\frac{3}{8}y+2\right| + \ln C^{\frac{3}{8}} &= \ln\big(|\sin x|^{\frac{3}{8}}\big),\\
\ln\left|\frac{3}{8}y+2\right| C^{\frac{3}{8}} &= \ln\big(|\sin x|^{\frac{3}{8}}\big),\\
\left|\frac{3}{8}y+2\right| C^{\frac{3}{8}} &= |\sin x|^{\frac{3}{8}},\\
\left|\frac{3}{8}y+2\right| &= C^{\frac{8}{3}}|\sin x|^{\frac{3}{8}}. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

[2] Poslední krok je oprávněný, neboť logaritmus je funkce monotonní a tudíž z rovnosti logaritmů dvou čísel plyne rovnost samotných těchto čísel.

Výpočet absolutních hodnot výrazů $\frac{3}{8}y + 2$ a $\sin x$ v (2.5) závisí na jejich znaménku, tj. na tom který z párů nerovností

$$\begin{aligned} \frac{3}{8}y + 2 &\geq 0, \quad \sin x \geq 0, \\ \frac{3}{8}y + 2 &\leq 0, \quad \sin x \geq 0, \\ \frac{3}{8}y + 2 &\geq 0, \quad \sin x \leq 0, \\ \frac{3}{8}y + 2 &\leq 0, \quad \sin x \leq 0 \end{aligned}$$

aktuálně platí. Je zřejmé, ze každé z těchto možností odpovídá bud znaménko „+“ nebo „−“ v rovnosti

$$\frac{3}{8}y + 2 = \pm C^{\frac{8}{3}}(\sin x)^{\frac{3}{8}}$$

nebo po vynásobeni $\frac{8}{3}$

$$y + \frac{16}{3} = \pm\frac{8}{3}C^{\frac{8}{3}}(\sin x)^{\frac{3}{8}}. \tag{2.6}$$

Jelikož zde C je libovolné kladné číslo a zahrnujeme oba dva případy se znaménkem „+“ a „−“, vzorec (2.6) ve skutečnosti znamená, že vztah mezi proměnnými y a x je ve tvaru

$$y = \tilde{C}(\sin x)^{\frac{3}{8}} - \frac{16}{3}, \tag{2.7}$$

kde $\tilde{C}$ je libovolná konstanta (buď kladná nebo záporná).[3] Zderivováním snadno ověříme, že (2.7) je řešením rovnice (2.1) pro libovolné $\tilde{C}$.[4]

Teď ověřme, zda (2.7) popisuje všechna řešení rovnice (2.1) (tj. jestli jsme v průběhu úprav nějaká řešení „neztratili“). Zde vidíme, že úprava rovnice na tvar (2.2) a všechny operace v integrálech (2.3) jsou oprávněny, jestli je jmenovatel zlomku odlišný od 0 a tak uvažujeme hodnoty y, pro něž $\frac{3}{8}y + 2 \neq 0$, tj.

$$y \neq -\frac{16}{3}. \tag{2.8}$$

Uvedené úvahy se tedy tykají případu když platí (2.8). Dosazením do (2.1) snadno zjistíme, že je konstantní funkce $y = -\frac{16}{3}$ je řešením dané diferenciální rovnice. Toto řešeni sice bylo kvůli předpokladu (2.8) vynecháno, nicméně si můžeme všimnout, že je ve skutečností obsažené v (2.7) pro $\tilde{C} = 0$. Obecné řešení rovnice (2.1) je tedy dáno

[3]Poněvadž každé $\tilde{C} \in (-\infty, \infty)$ lze vyjádřit jako $\frac{8}{3}C^{\frac{8}{3}}$ nebo $-\frac{8}{3}C^{\frac{8}{3}}$ pro odpovídající kladné C. Takovým úvahám se v praxi často říká „odstranění absolutních hodnot“ ve vztazích typu (2.5).

[4]Po zápisu obecného řešení je vhodné vyšetřit jeho definiční obor. Zde funkce $t \mapsto t^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{t^3}$ je definována pro $t \geq 0$ a tudíž (2.6) a (2.7) uvažujeme pro hodnoty x, pro něž $\sin x \geq 0$.

vztahem (2.7), kde $\tilde{C}$ je libovolná konstanta, a jiná řešení daná diferenciální rovnice nemá.

Příklad 2.2. Určeme obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' + (2y + 1)\cot x = 0.$$

Podobně příkladu (2.1) zde máme

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\,y}{2y+1} &= -\cot x \,\mathrm{d}\,x, \\ \int \frac{\mathrm{d}\,y}{2y+1} &= -\int \cot x \,\mathrm{d}\,x, \\ \frac{1}{2}\ln|2y+1| &= -\ln|\sin x| + \ln B, \end{aligned}$$

kde B je libovolné kladné číslo. Po výpočtech obdržíme obecné řešení ve tvaru

$$y = \frac{C}{(\sin x)^2} - \frac{1}{2}, \tag{2.9}$$

kde $C \in (-\infty, \infty)$ je libovolné. Konstantní řešení $y = -\frac{1}{2}$, jež po vydělení rovnice výrazem $2y + 1$ nebylo možné uvažovat, je obsažené v (2.9) pro $C = 0$.

Příklad 2.3. Určeme všechna řešení diferenciální rovnice

$$xy' = y(y + 2). \tag{2.10}$$

Dle § 1 máme

$$\int \frac{\mathrm{d}\,y}{y(y+2)} = \int \frac{\mathrm{d}\,x}{x}. \tag{2.11}$$

Racionální lomená funkce $y \mapsto \frac{1}{y(y+2)}$ je ryze lomená a lze ji proto rozložit na součet parciálních zlomků:

$$\frac{1}{y(y+2)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+2} = \frac{A(y+2) + By}{y(y+2)},$$

kde A a B se volí tak, aby platilo

$$1 = A(y + 2) + By. \tag{2.12}$$

Z (2.12) dosazením hodnot $y = 0$ a $y = -2$ obdržíme $1 = 2A$, $1 = -2B$, odkud $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$. Proto

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}y}{y(y+2)} &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{y} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{y+2} = \frac{1}{2}\ln|y| - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(y+2)}{y+2} \\ &= \frac{1}{2}\ln|y| - \frac{1}{2}\ln|y+2| + \frac{1}{2}\ln C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| + \frac{1}{2}\ln C \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| + \ln C\right) = \frac{1}{2}\ln C\left|\frac{y}{y+2}\right|,\end{aligned}$$

kde $C > 0$. Po dosazení do (2.11) obdržíme

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln C\left|\frac{y}{y+2}\right| &= \ln|x|, \\ \ln C\left|\frac{y}{y+2}\right| &= 2\ln|x| = \ln(x^2), \\ C\left|\frac{y}{y+2}\right| &= x^2 \qquad (2.13)\end{aligned}$$

pro kladná C. Výraz $\frac{y}{y+2}$ je kladný právě tehdy, když buď $y > 0$ nebo $y < -2$. Vztah (2.13) tedy znamená, že pro $C > 0$ platí

$$\pm C\frac{y}{y+2} = x^2,$$

kde je znaménko „+" pro $y \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ a „−" pro $y \in (-2, 0)$. V každém případě vztah mezi y a x je ve tvaru

$$C\frac{y}{y+2} = x^2,$$

kde $C \in (-\infty, \infty)$, odkud $Cy = x^2(y+2)$, $(C - x^2)y = 2x^2$ a

$$y = \frac{2x^2}{C - x^2}. \qquad (2.14)$$

Bezprostředním dosazením do (2.10) ověříme, že je (2.14) řešením dané diferenciální rovnice pro libovolné C:

$$\begin{aligned}xy' &= x\frac{4x(C - x^2) + 2x^2 \cdot 2x}{(C - x^2)^2} = \frac{4Cx^2}{(C - x^2)^2}, \\ y(y+2) &= \frac{2x^2}{C - x^2}\left(\frac{2x^2}{C - x^2} + \frac{2C - 2x^2}{C - x^2}\right) = \frac{4Cx^2}{(C - x^2)^2}.\end{aligned}$$

Dále si můžeme všimnout, že konstantní funkce $y = 0$ a $y = -2$ jsou také řešeními rovnice (2.10), přičemž řešení $y = -2$ je speciálním případem vzorce (2.14) pro $C = 0$.

Řešení $y = 0$ z (2.14) neobdržíme pro žádnou hodnotu konstanty C; je to řešeni výjimečné.

Obecným řešením označujeme takové řešení diferenciální rovnice, které obsahuje libovolnou integrační konstantu. Řešení *partikulární* je řešení, jež obdržíme, . přiřadíme-li všem konstantám obecného řešení určité hodnoty. Navíc některé rovnice mají řešení, jež nelze získat z řešení obecného pro žádné hodnoty konstant; taková řešení se označují jako *výjimečná*.

Příklad 2.4. Určeme řešení diferenciální rovnice

$$y' = y\left(\sqrt{e}x^{\sqrt{e}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\right)$$

splňující podmínku $y(1) = e$. Je to rovnice se separovanými proměnnými a řešíme ji jako obvykle podle § 1:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \left(\sqrt{e}x^{\sqrt{e}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x, \\
\int\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int\left(\sqrt{e}x^{\sqrt{e}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = \sqrt{e}\frac{x^{\sqrt{e}}}{\sqrt{e}} + 2\int\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= x^{\sqrt{e}} + 2\cdot 2\int e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = x^{\sqrt{e}} + 4\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}(\sqrt{x}) \\
&= x^{\sqrt{e}} + 4e^{\sqrt{x}} + C,
\end{aligned}$$

odkud

$$\begin{aligned}
\ln|y| &= x^{\sqrt{e}} + 4e^{\sqrt{x}} + C, \\
|y| &= e^{x^{\sqrt{e}}+4e^{\sqrt{x}}+C}, \\
y &= \pm e^{x^{\sqrt{e}}+4e^{\sqrt{x}}+C},
\end{aligned} \tag{2.15}$$

kde C je libovolná konstanta. Dosazením do (2.15) za x čísla 1 zjistíme, jakou hodnotu C je potřeba zvolit, aby byla podmínka $y(1) = e$ splněna:[5]

$$\begin{aligned}
e^{1^{\sqrt{e}}+4e^{\sqrt{1}}+C} &= e, \\
1 + 4e + C &= 1,
\end{aligned}$$

[5]Zde ihned vyřadíme část vzorce se znaménkem „–“, jelikož $y(1)$ má být rovno e, což je kladné číslo.

odkud $C = -4e$. Hledaným řešením pak je[6]

$$y = e^{x^{\sqrt{e}} + 4e^{\sqrt{x}} - 4e}. \tag{2.16}$$

Příklad 2.5. Určeme řešení diferenciální rovnice

$$y' = 2y(x^2 - 4) \tag{2.17}$$

splňující podmínku $y(1) = 0$. Podle § 1 máme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\int (x^2 - 4)\,\mathrm{d}x = 2\Big(\frac{x^3}{3} - 4x\Big) = 2x\Big(\frac{x^2}{3} - 4\Big),$$

$$\ln|y| = 2x\Big(\frac{x^2}{3} - 4\Big) + C, \tag{2.18}$$

kde číslo C má být zvoleno tak, aby platilo $y(1) = 0$. Dosaďme tedy do (2.18) $x = 1$, $y = 0$; vychází

$$\ln 0 = C,$$

což nemá smysl. Toto znamená, že žádné řešení určené přes vzorec (2.18) danou podmínku nesplňuje. Zdánlivý problém vyřešíme, když si všimneme, že (2.18) jsme obdrželi za implicitního předpokladu $y \neq 0$[7] a že $y = 0$ je řešením rovnice (je to výjimečné řešení, jež není obsažené v obecném řešení určeném vzorcem (2.18)). Řešením rovnice (2.17) splňujícím podmínku $y(1) = 0$ tedy je $y = 0$.

[6]Stejný výsledek bychom obdrželi bezprostředním použitím určitých integrálů, jejichž dolní meze jsou 1 a e (tj. pro proměnnou x bod, ve kterém je stanovena počáteční podmínka, a pro y potřebná hodnota řešení v tomto bodě):

$$\int_e^y \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^x \Big(\sqrt{e}s^{\sqrt{e}-1} + \frac{2}{\sqrt{s}}e^{\sqrt{s}}\Big)\,\mathrm{d}s,$$

$$\ln|y| - \ln|e| = \ln|y| - 1 = \big(s^{\sqrt{e}} + 4e^{\sqrt{s}}\big)\Big|_1^x = x^{\sqrt{e}} + 4e^{\sqrt{x}} - 1 - 4e,$$

odkud obdržíme (2.16).

[7]přesněji řečeno, že nenabývá funkce y nulových hodnot