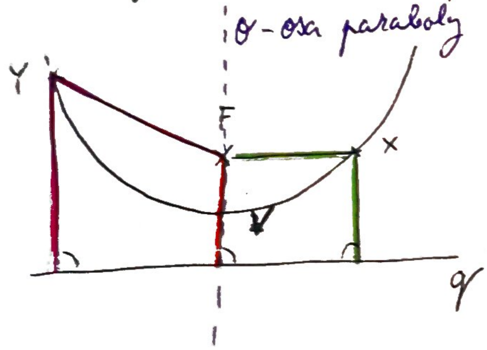
Doplňkový kurz SŠ matematiky 2 – 8. cvičení

PARABOLA

Konzultace k tomuto cvičení proběhne 28.4. 2021 v MS Teams.
Nejpozději 30.4.2021 nahrajte do odevzdávárny v IS alespoň jeden z příkladů 1–3 a alespoň jeden z příkladů 4–7.

PARABOLA

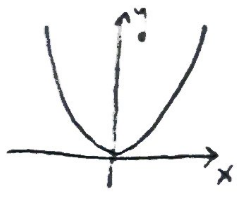
V rovině je dán bod F a přímka q, která jím neprochází. Množina všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od bodu F a od přímky q, se nazývá parabola. Bod F se nazývá ohnisko, přímka q řídící přímka paraboly.



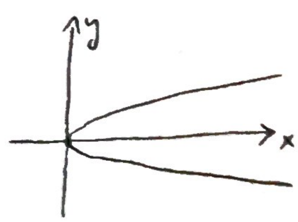
- body X, Y, V (a další) mají stejnou vzdálenost od F i od q
- bod V nazýváme vrchol paraboly, je to bod s nejkratší vzdáleností od F i od q, $|FV| = |Vq| = \frac{|Fq|}{2}$

- parabolu znáte jako graf kvadratické funkce, víte tedy, jak zhruba vypadá její předpis – jedna z neznámých x, y je umocněna na druhou, jedna pouze na první, např.

$y = x^2$

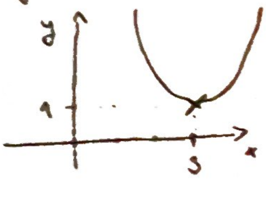


$x = 5y^2$



(tato není funkce)

- připomeňte si také ~~...~~ určování vrcholu z kvadr. funkce, např. $y = (x-3)^2 + 1$



8. cvičení

Z definice paraboly lze odvodit její rovnici. Budeme pracovat s případy, kdy je řídicí přímka rovnoběžná s osou x nebo y.

řídicí přímka || s osou x

$$\boxed{(x-m)^2 = 2p(y-n)}$$

$p \neq 0$

vrchol $V[m, n]$

ohnisko $F[m, n + \frac{p}{2}]$

řídicí přímka $q: y = n - \frac{p}{2}$

řídicí přímka || s osou y

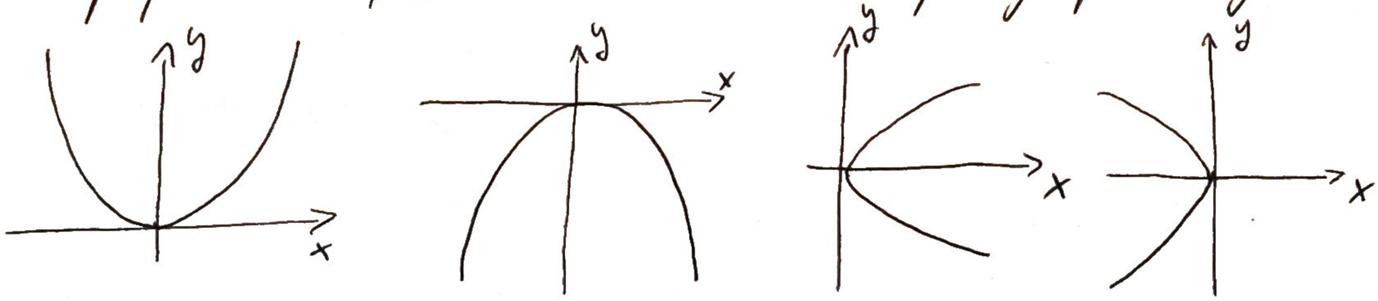
$$\boxed{(y-n)^2 = 2p(x-m)}$$

vrchol $V[m, n]$

ohnisko $F[m + \frac{p}{2}, n]$

řídicí přímka $q: x = m - \frac{p}{2}$

Pro případ $V[0,0]$ nakreslíme 4 možné polohy paraboly:



$x^2 = 2py$	$x^2 = 2py$	$y^2 = 2px$	$y^2 = 2px$
$p > 0$	$p < 0$	$p > 0$	$p < 0$

Př. 1: Ukažte, že rovnicí $y^2 - 6x - 4y = 0$ je dána parabola. Určete její vrchol, ohnisko a řídicí přímku. Parabolu nakreslete.

Řešení: $V[-\frac{2}{3}, 2]$, $F[\frac{5}{6}, 2]$, $x = -\frac{13}{6}$

8. cvičení

Př. 2: Napište rovnici paraboly s ohniskem $F[2,1]$ a řídicí přímkou $q: x = -4$.

Řešení: $(y-1)^2 = 12(x+1)$

Př. 3: Napište rovnici paraboly, jejíž ~~osa~~ řídicí přímka je rovnoběžná s osou y a prochází body $A[-5,3]$, $B[1,9]$, $C[-\frac{7}{2}, 6]$.

Řešení: $(y-3)^2 = 6(x+5)$

PARABOLA A PŘÍMKA

Tečna paraboly

- podobně jako u předchozích kuželoseček se odvodí rovnici tečny paraboly
- je-li řídicí přímka ∥ s osou x, parabola má rovnici $(x-m)^2 = 2p(y-n)$ a její tečna v bodě dotyku $T[t_1, t_2]$ má rovnici

$$\boxed{(x-m)(t_1-m) = p(y-n) + p(t_2-n)}$$

- analogicky pro řídicí přímku ∥ s osou y

$$\boxed{(y-n)(t_2-n) = p(x-m) + p(t_1-m)}$$

- tečna ale není jediná přímka, která má s parabolou společný pouze bod T ležící na parabole – další takovou přímkou je přímka rovnoběžná s osou paraboly procházející daným bodem T, žádná jiná přímka s jedním spol. bodem neexistuje

Př. 4: Bodem $M[2,2]$ ležícím na parabole $y^2-6x+8=0$ veďte všechny přímky, které nemají s parabolou žádný další společný bod.

Řešení: $t: 2y-3x+2=0$, $p: y=2$

Př. 5: Parabola $(x-3)^2=2p(y+2)$ má tečnu $t: x+y+2=0$. Určete parametr p a souřadnice bodu dotyku T.

Řešení: $p=-6$, $T[-3,1]$

Př. 6: Průměr parabolického reflektoru je 24 cm, hloubka reflektoru je 12 cm. Určete polohu ohniska paraboly, do kterého je třeba umístit žárovku. Určete rovnici parabolického řezu (řez procházející osou reflektoru.

Řešení: $F[0,3]$, $x^2=12y$, nebo $F[3,0]$, $y^2=12x$

Př. 7: Nalezněte rovnici tečny paraboly $x^2-4x-y+3=0$, která prochází bodem $M[0,-1]$

Řešení: $t_1: 8x+y+1=0$ $t_2: y+1=0$