Základy algebry a aritmetiky, IMAk02
Jaro 2022
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D., doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.

Zobrazení z množiny do množiny, typy zobrazení

Definice 1: Nechť **R** je relace z množiny A do množiny B splňující vlastnosti: Ke každému prvku a $\in$ A existuje nejvýše jeden prvek b $\in$ B takový, že [a,b] $\in$ **R.** Tato relace se nazývá **zobrazení z množiny A do množiny B.** Značíme R: A $\rightarrow$ B.

Definice 2: Nechť **R** je zobrazení z množiny A do množiny B.

- Jestliže [a,b] $\in$ **R**, pak prvek a $\in$ A nazýváme **vzorem** prvku b $\in$ B v zobrazení **R**; prvek b $\in$ B nazýváme **obrazem** prvku a $\in$ A v zobrazení **R**.
- Množina $O_1(\mathbf{R})$ = {a $\in$ A: existuje b $\in$ B takové, že [a,b] $\in$ **R**} se nazývá **definiční obor** zobrazení **R**. Platí $O_1(\mathbf{R}) \subset A$.
- Množina $O_2(\mathbf{R})$ = {b $\in$ B: existuje a $\in$ A takové, že [a,b] $\in$ **R**} se nazývá **obor hodnot** zobrazení **R**. $O_2(\mathbf{R}) \subset B$.

Příklad 1. Jsou dány množiny A = {x, y, z}, B = {a, b}. Rozhodněte, zda dané relace z množiny A do množiny B jsou zobrazení z A do B, případně určete definiční obor a obor hodnot zobrazení.

a) $\mathbf{R_1}$ = {[x,a], [y,b], [z,a], [z,b]},
b) $\mathbf{R_2}$ = {[x,a], [z,b]},
c) $\mathbf{R_3}$ = {[x,a], [y,a], [z,a]}.

Rozlišujeme následující **typy zobrazení R**:

I) Je – li $O_1(\mathbf{R}) = A \wedge O_2(\mathbf{R}) \subset B \wedge O_2(\mathbf{R}) \neq B$, nazývá se **R** **zobrazení množiny A do množiny B**.

II) Je – li $O_1(\mathbf{R}) \subset A \wedge O_1(\mathbf{R}) \neq A \wedge O_2(\mathbf{R}) = B$, nazývá se **R** **zobrazení z množiny A na množinu B**.

III) Je – li $O_1(\mathbf{R}) = A \wedge O_2(\mathbf{R}) = B$, nazývá se **R** **zobrazení množiny A na množinu B**.

IV) Je – li $O_1(\mathbf{R}) \subset A \wedge O_1(\mathbf{R}) \neq A \wedge O_2(\mathbf{R}) \subset B \wedge O_2(\mathbf{R}) \neq B$, nazývá se **R** **zobrazení z množiny A do množiny B**.

Příklad 2. Jsou dány množiny A = {x, y, a, c}, B = {c, x, b, z}.

a) Rozhodněte, o jaký typ zadaných zobrazení se jedná?
1) **R** = {[x,z], [c,c], [y,c]}.
2) **S** = {[x,z], [y,z], [a,z], [c,x]}.

b) Zapište výčtem prvků jednu binární relaci z množiny A do množiny B, která není zobrazením.

c) Zapište výčtem prvků
1) jedno zobrazení $\mathbf{R_1}$ typu z množiny A do množiny B,
2) jedno zobrazení $\mathbf{R_2}$ množiny A do množiny B,
3) jedno zobrazení množiny A na množinu B,
4) jedno zobrazení z množiny A na množinu B.

Definice 3: Zobrazení **R** z množiny A do množiny B se nazývá **prosté** právě tehdy, když relace $\mathbf{R}^{-1}$ je zobrazení z množiny B do množiny A.

Důsledek: Zobrazení **R** z množiny A do množiny B je **prosté** právě tehdy, když
a) ke každému $y \in B$ existuje nejvýše jedno $x \in A$ takové, že $[x,y] \in \mathbf{R}$,
b) ke každým dvěma různým vzorům $x_1, x_2 \in A$ přiřadíme dva různé obrazy $y_1, y_2 \in B$ v zobrazení **R.**

Hovoříme pak o:
- Prostém zobrazení množiny A do množiny B,
- Prostém zobrazení z množiny A na množinu B,
- Prostém zobrazení množiny A na množiny B,
- Prostém zobrazení z množiny A do množiny B.

Definice 4: Prosté zobrazení množiny A na množinu B nazýváme **bijektivní zobrazení** nebo také **vzájemně jednoznačné zobrazení**.

Příklad 3. Jsou dány množiny A = {1, 2, 3, 4}, B = {a, b, c, d}. Rozhodněte, o jaký typ zobrazení se jedná a zda je toto zobrazení prosté:
a) $\mathbf{R}_1 = \{[1,a], [2,c], [3,d]\}$,
b) $\mathbf{R}_2 = \{[1,a], [2,c], [3,d], [4,a]\}$,
c) $\mathbf{R}_3 = \{[2,a], [1,c], [3,b], [4,d]\}$.

Definice 5: **Permutací** konečné množiny A nazýváme každé prosté zobrazení množiny A na množinu A (vzájemně jednoznačné zobrazení).

Příklad 4. Zapište všechny permutace tříprvkové množiny A = {x, y, z}.

Definice 6: Nechť **R** je zobrazení z množiny M do množiny N a **S** je zobrazení z množiny N do množiny K. Pak relace $\mathbf{R} \circ \mathbf{S}$ je zobrazení a nazývá se **složené zobrazení** ze zobrazení **R** a **S**.

Příklad 5. Složte permutace $\mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_6$ z *Příkladu 4.*

Ekvivalence množin, konečné a nekonečné množiny

Definice 7: Říkáme, že dvě množiny A, B jsou **ekvivalentní** právě tehdy, když existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B. Zapisujeme $A \sim B$.

Příklad 6. Jsou dány množiny A = {a, b, c}, B = {x, y, z}, C = {x, y}. Rozhodněte, které dvojice zadaných množin jsou ekvivalentní.

Poznámka. Relace $\sim$ dvou množin definovaná v libovolném systému množin $\mathcal{M}$ má vlastnosti: reflexivní, symetrická, tranzitivní. Relace $\sim$ je tedy relací ekvivalence. Relace ekvivalence dvou množin v libovolném systému množin $\mathcal{M}$ vytváří rozklad systému $\mathcal{M}$ na třídy ekvivalentních množin.

Příklad 7. Je dán systém množin $\mathcal{M} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$, kde $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$,

$C = \{x, y\}$, D = {○, ○, ○, ○}, $E = \{\Delta, \Delta, \Delta\}$, F = { *, *}, G = { □ }, H = {☺, ☺, ☺, ☺}.
Rozhodněte, které množiny ze systému $\mathcal{M}$ jsou ekvivalentní.

Definice 8: Řekneme, že množina A je **konečná** právě tehdy, když žádná vlastní podmnožina množiny A není ekvivalentní s množinou A.

Definice 9: Řekneme, že množina B je **nekonečná** právě tehdy, když existuje alespoň jedna vlastní podmnožina množiny B, která je ekvivalentní s množinou B.

Poznámka. Množina M je **vlastní podmnožinou** množiny N právě tehdy, když
$M \subset N \wedge M \neq N$.