Aritmetika 2 – jaro 2021

3. prezentace

Mgr. Helena Durnová, Ph.D.
RNDr. Petra Bušková

Prvočísla a čísla složená

- Rozdělíme přirozená čísla na dvě velké podmnožiny a jednu jednoprvkovou:
  - číslo 1 bude patřit do zvláštní podmnožiny
  - prvočísla (čísla, která mají právě dva různé dělitele) tvoří jednu velkou podmnožinu
  - čísla složená (čísla s alespoň třemi různými děliteli) tvoří druhou velkou podmnožinu

  - Podmnožina prvočísel a podmnožina čísel složených mají prázdný průnik
 (tj. číslo je buď prvočíslo, nebo číslo složené).

MUNI PED

Definice: prvočíslo, číslo složené

Definice 2.

Přirozené číslo *p*>1 nazýváme **prvočíslem**, právě když má právě dva různé přirozené dělitele (tj. čísla 1 a p).

Přirozené číslo *a*>1, které není prvočíslem (tj. má více než dva přirozené dělitele), nazýváme **složeným číslem**.

Příklady

- Číslo 13 je prvočíslo, protože má právě dva přirozené dělitele, čísla 1 a 13. Jsou to samozřejmí dělitelé čísla 13.

- Číslo 12 je složené číslo, protože má více než dva přirozené dělitele: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

- Číslo 1 podle definice není prvočíslo ani číslo složené.

Věta o existenci prvočíselného dělitele

Věta 2: Každé přirozené číslo $n > 1$ má aspoň jednoho prvočíselného dělitele.

***Důkaz**:* Číslo $n > 1$ má alespoň jednoho dělitele, který je větší než 1. Z jeho dělitelů je jeden nejmenší, označme ho p.

Tento nejmenší přirozený dělitel $p > 1$ musí být prvočíslem.

Kdyby totiž p bylo složené číslo, tj. $p = a.b$, kde $1 < a < p$, $1 < b < p$, pak by ze vztahů $a| p$ a $p|n$ plynulo $a| n$, což by znamenalo, že existuje dělitel $a < p$ čísla n, což by bylo v rozporu s naším předpokladem, že p je nejmenší z přirozených dělitelů čísla n. Číslo p je tedy prvočíslo.

MUNI PED

Jak rozhodneme, zda je dané číslo prvočíslo nebo číslo složené?

Máme-li rozhodnout o tom, zda dané číslo *a* > 1 je prvočíslem nebo složeným číslem, můžeme postupovat tak, že zjišťujeme, zda je dané číslo dělitelné prvočísly menšími než toto číslo.

Platí totiž **věta**: *Existuje-li prvočíslo menší než číslo a, které dělí číslo a, pak a je složené číslo.*

Uvedený postup je však značně zdlouhavý. Proto budeme využívat následující věty:

Věta 3. Jestliže přirozené číslo *a* není dělitelné žádným prvočíslem menším nebo rovným odmocnině z a, pak *a* je prvočíslo.

Důkaz věty 3

Provedeme nepřímý důkaz, tj. přímý důkaz věty obměněné)

Věta obměněná k větě 3: Není-li *a* prvočíslo, pak je dělitelné aspoň jedním prvočíslem *p* menším než odmocnina z *a.*

Tedy předpokládejme, že číslo *a* není prvočíslo, pak podle věty 2. existuje prvočíslo *p*, které je nejmenším dělitelem čísla *a*. Můžeme psát: $a = q\ .\ p$ a současně $p < a$; současně platí také: *p je* menší nebo rovno *q* . Je tedy *a* větší nebo rovno p^2 a odtud plyne, že *p* musí být menší nebo rovno odmocnině z *a.*

MUNI PED

Jak zjistit, zda dané číslo je prvočíslo

Příklad: *Zjistěte, zda 173 je prvočíslo nebo složené číslo.*

Řešení: Odmocnina ze 173 je menší než 14 (druhá mocnina 14 je 196), proto budeme zjišťovat, zda číslo 173 je dělitelné některým z prvočísel 2, 3, 5, 7, 11, 13.
Číslo 173 není dělitelné žádným z těchto prvočísel, proto je prvočíslem.

Prvočíselný rozklad

Věta 4:

Každé složené číslo *a* lze vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru součinu konečného počtu prvočísel

$$a = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3} \cdot \dots \cdot p_k^{e_k}$$

kde $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ jsou prvočísla a $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$ jsou nenulová celá čísla. Tomuto zápisu se říká **prvočíselný rozklad přirozeného čísla *a*** a $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ jsou **prvočinitelé** rozkladu.

Například prvočíselný rozklad čísla 600 lze zapsat 600= $2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2$

MUNI PED

Příklady

Příklad 1

Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou čísla 437, 593, 1007, 2771, 3012 prvočísla, nebo čísla složená.

Příklad 2

Najděte alespoň tři prvočísla větší než 120 a zároveň menší než 150.

Příklad 3

Najděte největší prvočíslo, kterým je dělitelné číslo

a) 1326

b) 2406

c) 4380

MUNI PED

Příklady

Příklad 4

Rozložte na součin prvočinitelů číslo

a) 500

b) 2024

c) 1326

Příklad 5

Najděte alespoň tři přirozená čísla, která jsou dělitelná

a) všemi jednocifernými prvočísly,

b) všemi přirozenými čísly od jedné do deseti.

Určete v obou případech nejmenší přirozené číslo, které podmínkám vyhovuje.