Aritmetika 2 – jaro 2021

7. prezentace

Mgr. Helena Durnová, Ph.D.
RNDr. Petra Bušková

Neurčité rovnice

- Neurčitá rovnice je rovnice se dvěma nebo více neznámými, které se řeší pouze v oboru celých čísel.

Definice 9:
Lineární **neurčitá rovnice** o dvou neznámých x, y je rovnice tvaru $\boldsymbol{a \cdot x + b \cdot y = c}$. Přitom platí, že $a \neq 0,\ b \neq 0$ a všechny koeficienty a, b, c jsou celá čísla. Neznámé x, y hledáme také v množině celých čísel.

Poznámky k neurčitým rovnicím

- Pokud koeficienty a, b, c jsou racionální čísla, ale nejsou celá čísla, můžeme rovnici vhodným číslem vynásobit tak, aby všechny koeficienty patřily do množiny celých čísel.

- S neurčitými rovnicemi se také můžete setkat pod názvem ***Diofantické rovnice.*** Diofantos z Alexandrie byl řecký matematik z 3. století př. n. l., který se řešením těchto rovnic zabýval.

Kdy je neurčitá rovnice řešitelná?

–
$$\boxed{a \cdot x + b \cdot y = c}$$

- Neurčitá rovnice má řešení buď nekonečně mnoho, nebo žádné.

- Pokud je **největší společný dělitel koeficientů** $\boldsymbol{a, b}$ dělitelem koeficientu c, má neurčitá rovnice nekonečně mnoho řešení.

MUNI PED

Příklad

Rozhodněte o řešitelnosti následujících rovnic a uveďte alespoň dvě různá řešení.

a) $5x - 2y = 6$

b) $8x + 12y = 2$

Řešení:

a) Pro koeficienty rovnice $5x - 2y = 6$ platí $\mathrm{D}(5, -2) = 1$ a jistě $1|6$. Proto má rovnice nekonečně mnoho řešení, například $x = 2, y = 2$, nebo $x = -4, y = -13$.

b) Pro koeficienty rovnice $8x + 12y = 2$ určíme $\mathrm{D}(8,12) = 4$. Vidíme, že číslo 4 nedělí koeficient c, tedy číslo 2. Proto neexistuje žádné řešení této neurčité

MUNI PED

Řešení redukční metodou

- Neurčité rovnice řešíme tzv. redukční metodou. Takové řešení je předvedeno u následujícího příkladu, získáme pomocí něj všechna řešení rovnice.

Příklad: Řešte neurčitou rovnici $5x - 2y = 6$.

Nejprve si vyjádříme tu neznámou, u které stojí koeficient s menší absolutní hodnotou, v našem případě $y = \frac{5x-6}{2}$. Víme, že hledáme řešení pouze v celých číslech, proto musí být vyjádřený výraz celým číslem. Upravíme jej tak, abychom co nejvíce zjednodušili čitatel zlomku
$y = \frac{5x-6}{2} = \frac{4x+x-6}{2} = 2x - 3 + \frac{x}{2}$.
Vidíme, že $2x - 3$ je určitě celé číslo, musí ale platit, že také $\frac{x}{2}$ bude celé číslo, které si označíme

MUNI PED

Řešení redukční metodou - pokračování

(Pokračování příkladu)

Všechny výsledky jsou tedy tvaru $x = 2t,\ y = 5t - 3,\ t \in \boldsymbol{Z}$.

Několik výsledků si můžeme vypsat pomocí přehledné tabulky:

t	x=2t	y=5t-3
0	0	-3
1	2	2
2	4	7

Zkoušku provedeme dosazením několika výsledků do zadání, např.

Slovní úloha

- **Kolika způsoby můžeme vyplatit 69 Kč pouze mincemi 2 Kč a 5 Kč?**

Řešení:

Označme si x počet dvoukorunových mincí a y počet pětikorunových mincí. Vztah ze zadání můžeme zapsat jako rovnici $2x + 5y = 69$.

Zkontrolujeme řešitelnost úlohy: $\mathrm{D}(2,5) = 1,\ 1|69$, úloha má v celých číslech nekonečně mnoho řešení. Nás budou ale zajímat pouze ta řešení, kdy jsou obě neznámé nezáporné (záporným počtem mincí neplatíme).

Vyjádříme $x = \frac{69-5y}{2} = \frac{68+1-4y-y}{2} = 34 - 2y + \frac{1-y}{2}$ a označíme $t = \frac{1-y}{2}$. Z poslední rovnosti

MUNI PED

Slovní úloha - pokračování

- **Kolika způsoby můžeme vyplatit 69 Kč pouze mincemi 2 Kč a 5 Kč?**

Získali jsme $y = 1 - 2t$ a $x = 32 + 5t$. Protože musí být obě neznámé nezáporné, musí platit:

$$32 + 5t \geq 0 \qquad\qquad 1 - 2t \geq 0$$
$$t \geq -\frac{32}{5} \qquad\qquad t \leq \frac{1}{2}$$

Zároveň je t celé číslo, proto máme pouze sedm možných řešení, všechna jsou zanesená v tabulce. Poslední řádek tabulky slouží jako zkouška.

t	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
x	2	7	12	17	22	27	32
y	13	11	9	7	5	3	1
2x+5y	4+65=69	14+55=69	24+45=69	34+35=69	44+25=69	54+15=69	64+5=69

MUNI PED

Další slovní úloha

- **Najděte takové celé číslo a, které při dělení pěti dává zbytek 4 a při dělení 7 dává zbytek 2.**

Vyřešíme společně na cvičení.

Příklady (na týden od 19.4.)

Příklad 1:

Rozhodněte o řešitelnosti rovnic a uveďte alespoň dvě různá řešení, pokud existují.

a) $6x + 15y = 9$

b) $5x - 20y = 8$

c) $2x + 7y = 4$

Příklad 2:

Řešte neurčité rovnice.

a) $-3x + 7y = 4$

b) $6x - 22y = 12$

c) $-14x - 3y = 10$

d) $5x - 3y = 15$

Příklady (na týden od 26.4.)

Příklad 3:

Určete největší a nejmenší trojciferné číslo, které dává při dělení třemi zbytek 2 a při dělení 7 zbytek 5.

Příklad 4:

Číslo 91 rozložte a součet dvou sčítanců, z nichž jeden je dělitelný pěti a druhý devíti.

Příklad 5:

Rozdíl dvou přirozených čísel, z nichž první je dělitelné číslem 23, druhé číslem 29, je roven 1. Určete nejmenší taková kladná čísla.

Příklady (na týden od 26.4.)

Příklad 6:

Vytvoří-li žáci ve třídě čtveřice, jeden žák zbyde, vytvoří-li trojice, zbydou dva žáci. Kolik žáků je ve třídě, jestliže jich je více než 20 a méně než 30?

Příklad 7:

Anička sbírala na zahradě jablka. Maminka jí řekla, že za každá čtyři jablka jí dá bonbon, tatínek zase nabízí za každých 6 jablek nálepku. Jak může Anička směnit jablka za bonbony a nálepky, jestliže nasbírala 62 jablek a nechce si žádné jablko nechat?