CVIČENÍ V DERIVOVÁNÍ

§ 27. DERIVACE ZÁKLADNÍCH ELEMENTÁRNÍCH FUNKCÍ.

Derivace mocniny.

$y = x^n$, $y' = n.x^{n-1}$; (postupně se dokazuje platnost pro každé n přirozené, celé, racionální a reálné .)

$y = ax^n$, $y' = a.nx^{n-1}$; $y = ax$, $y' = a$; $y = a$, $y' = 0$ (91)

210. cvičení. Derivujte funkce :

a) $y = x^7$, b) $y = 5x^4$, c) $y = \frac{4}{3}x^6$, d) $y = \frac{5}{7}x$, e) $y = x^{-3}$, f) $y = 3x^{-5}$, g) $y = \frac{1}{4}x^{-4}$,

h) $y = x^{\frac{3}{2}}$, k) $y = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$, m) $y = ax^{\frac{m}{n}}$, n) $y = x^{-\frac{1}{5}}$, o) $y = \frac{5}{3}x^{-\frac{5}{7}}$, $y = x^{1,7}$, p) $y = x^{-5,3}$,

r) $y = \frac{20}{7}x^{0,84}$, s) $y = x^{\sqrt{2}}$, t) $y = ax^e$, $y = x^{\log 2}$, u) $y = 4.x^{\frac{\pi}{4}}$, $y = (\sqrt{2}-1)x^{\sqrt{2}+1}$.

Výsledky : a) $7x^6$, b) $20x^3$, c) $8x^5$, d) $\frac{5}{7}$, e) $-3x^{-4}$, f) $-15x^{-6}$, g) $-x^{-5}$, h) $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, k) $x^{-\frac{1}{3}}$

m) $\frac{am}{n}.x^{\frac{m-n}{n}}$, n) $-\frac{1}{5}x^{-\frac{6}{5}}$, o) $-\frac{25}{21}.x^{-\frac{12}{7}}$; $1,7x^{0,7}$, p) $-5,3x^{-6,3}$, r) $2,4x^{-0,16}$, s) $\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$,

t) aex^{e-1}, $\log 2.x^{\log 2-1}$, u) $\pi x^{\frac{\pi-4}{4}}$, v) $x^{\sqrt{2}}$.

V dalších případech před derivováním převedeme funkční předpis na mocninu proměnné x :

$$\frac{a}{bx^n} = \frac{a}{b}.x^{-n} \quad , \quad \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

211. cvičení. a) $y = \frac{3}{x}$, b) $y = \frac{1}{32x^4}$, c) $y = -\frac{1}{x}$, d) $y = -\frac{2}{9x^3}$, e) $y = \sqrt{x}$, f) $y = \sqrt[m]{x^n}$,

g) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, h) $y = -\frac{5}{\sqrt[5]{x^7}}$, k) $y = \frac{8}{13}x^3\sqrt[4]{x}$, m) $y = 12\sqrt[3]{x}.\sqrt[4]{x^3}.\sqrt[6]{x^5}$, n) $y = \sqrt[4]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$.

Výsledky : a) $-3x^{-2}$, b) $-\frac{1}{8x^5}$, c) $\frac{1}{x^2}$, d) $\frac{2}{3x^4}$, e) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, f) $\frac{n}{m}.\sqrt[m]{x^{n-m}}$, g) $-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$,

h) $\frac{7}{\sqrt[5]{x^{12}}}$, k) $2x^2\sqrt[4]{x}$, m) $23\sqrt[12]{x^{11}}$, n) $\frac{3}{8}.\sqrt[8]{x^{-5}}$.

Derivace součtu funkcí.

$[f(x) + g(x) + h(x) + \dots]' = f'(x) + g'(x) + h'(x) + \dots$

Pro **k** stejných funkcí: $[k.f(x)]' = k.f'(x)$ (92)

212. cvičení. Derivujte funkce :

a) $y = 5x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 7x - 6$, b) $y = 3 - x^4$, c) $y = 2x^3 - \frac{5}{3x^2} + 3 - 4\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}$,

|| d) $y = \sqrt{x}.(x^3 - \sqrt{x} + 1)$, e) $y = \frac{5x^3 - 6x^2 + 2}{3x^2}$

Výsledky : a) $20x^3 - 12x^2 + 16x - 7$, b) $-4x^3$, c) $6x^2 + \frac{10}{3x^3} - \frac{8}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{8x\sqrt[4]{x}}$,
d) $\frac{7}{2}x^2\sqrt{x} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, e) $\frac{5x^3 - 4}{3x^3}$.

|| — máme dělat

V případech d),e) minulého cvičení provedeme nejprve naznačené početní výkony (násobení,dělení) a pak teprve derivujeme součet mocnin.

Derivace součinu funkcí.

$$y = u(x).v(x) \qquad \text{Stručně :} \quad y = u.v$$

$$y' = u'(x).v(x) + v'(x).u(x) \qquad y' = u'.v + v'.u \qquad (93)$$

$$y = u.v.w \qquad y' = u'.vw + v'.uw + w'.uv$$

/73/.**příklad.**

a) $y = (x^2 - 3x + 3).(x^2 + 2x - 1)$

$y' = (2x-3).(x^2+2x-1) + (2x+2).(x^2-3x+3) = \dots\dots\dots = 4x^3 - 3x^2 - 8x + 9$;

b) $y = (x^2 + 1).(1 - x^3).(x^{-2} - 1)$

$y' = [2x.(1-x^3) + (-3x^2).(x^2+1)].(x^{-2}-1) + (-2x^{-3}).(x^2+1).(1-x^3) = \dots\dots\dots =$

$= 5x^4 - 2x - 1 - 2x^{-3}$

213.**cvičení.** Derivujte funkce :

a) $y = (\sqrt{x} + 1).\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$, $\left[-\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}\right]$;

b) $y = (1 + nx^m).(1 + mx^n)$, $\left[mn.\{x^{m-1} + x^{n-1} + (m+n)x^{m+n-1}\}\right]$.

DESÍTKA ÚLOH čís. 29 Derivujte funkce :

1) $y = \frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x\sqrt{x}}} + \sqrt[5]{x^3}.\sqrt[3]{x^2}$, $\left[\frac{55 + 76\sqrt[20]{x^7}}{60\sqrt[12]{x}}\right]$;

2) $y = \frac{3}{13}.x^4\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\frac{x\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}}$, $\left[\frac{6x^3\sqrt[6]{x^7} + 1}{6.\sqrt[6]{x^5}}\right]$;

3) $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} - \frac{3}{14}\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x}}$, $\left[\frac{7\sqrt[24]{x^7} - 1}{8\sqrt[12]{x^5}}\right]$;

4) $y = \sqrt[3]{x}.(x\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt{x\sqrt{x}})$, 4) $\left[\frac{1}{12}.\left(22\sqrt[6]{x^5} - \frac{8}{\sqrt[3]{x}} + 13\sqrt[12]{x}\right)\right]$

5) $y = (x\sqrt{x} + 2.\sqrt[3]{x} - 2x) : 3\sqrt[3]{x^4}$, +)

6) $y = \frac{5x\sqrt{x} - 3x + 2x^{-2}}{4x^2}$, 6) $\left[\frac{-5x^4 + 6x^3\sqrt{x} - 16\sqrt{x}}{8x^5.\sqrt{x}}\right]$;

7) $y = \frac{4 - 3x^3 + 2x^2\sqrt{x}}{2\sqrt[3]{x}}$, 7) $\left[\frac{-4 - 24x^3 + 13x^2\sqrt{x}}{6x\sqrt[3]{x}}\right]$;

8) $y = \frac{3x^{-1} - 2x + 2x\sqrt[3]{x^2}}{2x^2\sqrt{x}}$, $\left[\frac{-6\sqrt[3]{x} + 18x^2\sqrt[3]{x} - 10x^3}{12x^4\sqrt[6]{x^5}}\right]$;

9) $y = \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{3}\right).\left(4x\sqrt[3]{x} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3x}\right)$, $\left[\frac{1}{9}\left(\frac{60}{\sqrt[6]{x}} - \frac{5}{x\sqrt[6]{x^5}} + \frac{\sqrt{3}}{x\sqrt[3]{x}} - 48\sqrt[6]{27x^2}\right)\right]$

10) $y = (\sqrt[3]{x} + 2x).(1 + \sqrt[3]{x^2} + 3x)$, $\left[\frac{1+12x+9\sqrt[3]{x^2} + 10x\sqrt[3]{x} + 36x\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}\right]$.

+) **Výsledek úlohy 5) :** $\frac{x^2 - 12\sqrt[6]{x^5} + 4x\sqrt{x}}{18x^2\sqrt[6]{x^5}}$

Derivace podílu funkcí.

$$y = \frac{1}{v(x)}\,, \quad y' = -\frac{v'(x)}{[v(x)]^2} \qquad \text{Stručně}: \; y = \frac{1}{v}\,, \; y' = -\frac{v'}{v^2}$$

$$y = \frac{u(x)}{v(x)}\,, \quad y' = \frac{u'(x).v(x) - v'(x).u(x)}{[v(x)]^2}\;; \; y = \frac{u}{v}\,, \; y' = \frac{u'.v - v'.u}{v^2} \qquad (94)$$

214.cvičení. Derivujte funkce .

a) $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$, b) $y = \dfrac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$, c) $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, d) $y = \dfrac{1 - x^3}{1 + x^3}$,

e) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$, f) $y = \dfrac{x + \sqrt[3]{x}}{x - \sqrt[3]{x}}$, g) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 6}$, h) $y = \dfrac{3}{(1-x^2).(1-2x^3)}$.

Výsledky : a) $\dfrac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$, b) $\dfrac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$, c) $\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, d) $\dfrac{-6x^2}{(1+x^3)^2}$, e) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$,

f) $\dfrac{-4x}{3\sqrt[3]{x^2}.(x-\sqrt[3]{x})^2}$, g) $\dfrac{3-2x}{(x^2-3x+6)^2}$, h) $\dfrac{6x(1 + 3x - 5x^3)}{(1-x^2)^2.(1-2x^3)^2}$.

Derivace mocniny funkce.

$$y = [f(x)]^n\,, \quad y' = n.[f(x)]^{n-1}.f'(x)$$

Platnost pro n p ř i r o z e n é plyne z derivace součinu.

Platnost pro n c e l é z á p o r n é plyne z derivace podílu. (95)

Platnost pro n r e á l n é se ověří derivací složené funkce.

Poznámka. Mocnina funkce patří k tzv. složeným funkcím, jichž derivace budeme určovat později podle zvláštního pravidla. Poněvadž se však s takovou funkcí setkáme velmi často, je třeba její derivaci si osvojit brzy a provádět ji s jistotou.

/74/.příklad :

a) $y = (3x^2 - 5x + 2)^5$, $y' = 5.(3x^2-5x+2)^4.(3x^2-5x+2)' = 5.(3x^2-5x+2)^4.(6x-5)$;

b) $y = (x^3 - 2x+1)^{-3}$, $y' = -3.(x^3-2x+1)^{-4}.(x^3-2x+1)' = -3.(x^3-2x+1)^{-4}.(3x^2-2)$;

c) $y = (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})^{\frac{1}{2}}$, $y' = \frac{1}{2}.(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})^{-\frac{1}{2}}.(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})' = \dfrac{3\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x}}{12x\sqrt[6]{x}\sqrt{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}}$;

d) $y = (x^n - 1)^{-\frac{2}{3}}$, $y' = -\frac{2}{3}(x^n - 1)^{-\frac{5}{3}}.(x^n-1)' = \dfrac{-2nx^{n-1}}{3.\sqrt[3]{(x^n-1)^5}}$;

V dalších případech převedeme funkční předpis na mocninu funkce :

e) $y = \frac{1}{3x-2}$ čili $y = (3x-2)^{-1}$, $y' = -1.(3x-2)^{-2}.(3x-2)' = -\dfrac{3}{(3x-2)^2}$;

f) $y = \dfrac{5}{(1-x^2)^5}$ čili $y = 5(1-x^2)^{-5}$, $y' = \dfrac{50x}{(1-x^2)^6}$;

g) $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 6}$ čili $y = (x^2-2x+6)^{\frac{1}{3}}$, $y' = \dfrac{2(x-1)}{3.\sqrt[3]{(x^2-2x+6)^2}}$;

h) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ čili $y = (1-x^3)^{-\frac{1}{2}}$, $y' = \dfrac{3x^2}{2.\sqrt{(1-x^3)^3}}$.

Některé z uvedených příkladů možno také derivovat jako podíl funkcí .

215.<u>cvičení</u>. Derivujte funkce :

a) $y = (5x^2 - 2)^{10}$, b) $y = (7x^2 - \frac{4}{x} + 6)^6$, c) $y = \frac{2}{x^2 - 5x + 7}$, d) $y = \frac{1}{(x^2+1)^4}$, e) $y = \sqrt{3x-5}$,

f) $y = \sqrt{x^3 - 3x + 1}$, g) $y = \sqrt[3]{1-x^2}$, h) $y = -\frac{5}{33}\sqrt[5]{(8-3x)^{11}}$, k) $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$, m) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$,

n) $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^4 - x^8}}$, o) $y = x . \sqrt{x^2 + 1}$, p) $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, q) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

<u>Výsledky</u> : a) $100x(5x^2-2)^9$, b) $6(7x^2 - \frac{4}{x} + 6)^5 . \frac{14x^3+4}{x^2}$, c) $-\frac{2(2x-5)}{(x^2-5x+7)^2}$, d) $\frac{-8x}{(x^2+1)^5}$

e) $\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$, f) $\frac{3x^2-3}{2\sqrt{x^3-3x+1}}$, g) $\frac{-2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$, h) $\sqrt[5]{(8-3x)^6}$, k) $\frac{2x^2}{1-x^6} . \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$,

m) $\frac{-2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$, n) $\frac{2x^3 + 4x^7}{\sqrt{(1-x^4-x^8)^3}}$, o) $\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$, p) $\frac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$, q) $\frac{x(x^2+2a^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$.

DESÍTKA ÚLOH čís. 30 Derivujte funkce :

1) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} + \frac{5}{\sqrt[4]{(x^2+2)^3}}$, $\left[\frac{-2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^4}} - \frac{15x}{2\sqrt[4]{(x^2+2)^7}} \right]$;

2) $y = x^5 . \sqrt[3]{x^6 - 8}$, $\left[\frac{x^4 . (7x^6 - 40)}{\sqrt[3]{(x^6-8)^2}} \right]$;

3) $y = x . \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$, $\left[\frac{2 - 3x - x^3}{2(1-x).(1+x^2)} . \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}} \right]$;

4) $y = x^2 . \sqrt{1 + \sqrt{x}}$, $\left[\frac{x(8 + 9\sqrt{x})}{4 . \sqrt{1+\sqrt{x}}} \right]$;

5) $y = \frac{x+2}{5} . \sqrt[3]{(3x+1)^2}$, $\left[\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} \right]$;

6) $y = \frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$, $\left[\frac{-(1-x)^{p-1} . [p+q + (p-q)x]}{(1+x)^{q+1}} \right]$;

7) $y = \frac{\sqrt[9]{4x^5 + 2}}{3x^4}$, $\left[-\frac{4.(31x^5 + 18)}{27x^5 . \sqrt[9]{(4x^5+2)^8}} \right]$;

8) $y = \frac{-\sqrt[3]{(2-x^2)^2}}{4x^2}$, $\left[\frac{6 - x^2}{6x^3 . \sqrt[3]{2-x^2}} \right]$;

9) $y = \frac{x}{(1-x)^2.(1+x)^3}$, $\left[\frac{1 - x + 4x^2}{(1-x)^3.(1+x)^4} \right]$;

10) $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}.(x + \sqrt{1+x^2})}$, $\left[-\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \right]$;

<u>Derivace goniometrických funkcí.</u>

$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{cotg} x$
$y' = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

(96)

216.<u>cvičení</u>. Derivujte funkce :

a) $y = 5x^2 - \sin x$, b) $y = \sin x - \cos x$, c) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$, d) $y = \sin x . \cos x$

e) $y = x^2.\text{cotg}\ x$, f) $y = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$, g) $y = \dfrac{x.\sin x}{1+\text{tg}\ x}$, h) $y = \dfrac{\sin x - x.\cos x}{\cos x + x.\sin x}$,

Výsledky : a) $10x-\cos x$, b) $\cos x+\sin x$, c) $\dfrac{1}{(\sin x.\cos x)^2}$,d) $\cos 2x$, e) $\dfrac{x(\sin 2x-x)}{\sin^2 x}$

f) $\dfrac{1}{1-\sin x}$, g) $\dfrac{\cos^2 x(1+\text{tg}x)(\sin x+x.\cos x)-x.\sin x}{\cos^2 x.(1+\text{tg}x)^2}$, h) $\dfrac{x^2}{(\cos x + x.\sin x)^2}$.

Mocniny goniometrických funkcí derivujeme podle pravidla o derivaci mocniny funkce. Doporučuje se před derivací zapsat mocninu goniometrické funkce podle vzoru :

$$y = \sin^n x \quad \text{čili} \quad y = (\sin x)^n \quad , \quad y' = n.(\sin x)^{n-1}.(\sin x)' = \ldots\ldots$$

Později si můžeme tento zápis jen představovat.

217.cvičení. Derivujte funkce :

a) $y = \cos^{-5} x$, b) $y = \text{tg}^7 x$, c) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$, d) $y = \text{tg}^3 x - 3\text{tg}\ x + 3x$,

e) $y = \dfrac{\cos^5 x}{5} - \dfrac{\cos^3 x}{3}$, f) $y = \sin x - \dfrac{2\sin^3 x}{3} + \dfrac{\sin^5 x}{5}$, g) $y = \dfrac{1}{\sin x}$, h) $y = \dfrac{5}{\cos x}$,

k) $y = \dfrac{1}{\cos^4 x}$, m) $y = \sqrt{\sin x}$, n) $y = \sqrt[3]{\cos^2 x}$, o) $y = \dfrac{2}{\sqrt{\text{tg}\ x}}$, p) $y = \sqrt{1 + 2\text{tg}\ x}$,

q) $y = 4.\sqrt[3]{\text{cotg}^2 x} + \sqrt[3]{\text{cotg}^8 x}$, r) $y = \dfrac{\sin^2 x}{1+\text{cotg}\ x} + \dfrac{\cos^2 x}{1+\text{tg}\ x}$,s) $y = \dfrac{\sin x}{4\cos^4 x} - \dfrac{3\sin x}{8\cos^2 x}$,

t) $y = (1+\sin^2 x)^4$, u) $y = \sqrt[4]{1+\cos^2 x}$, v) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$, w) $y = \cos x.\sqrt{1+\sin^2 x}$.

Výsledky : a) $5\cos^{-6} x.\sin x$, b) $7\text{tg}^6 x.\dfrac{1}{\cos^2 x}$, c) $\frac{3}{2}\sin 2x(\sin x-\cos x)$, d) $3\text{tg}^4 x$,

e) $\sin^3 x.\cos^2 x$, f) $\cos^5 x$, g) $-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$, h) $\dfrac{5\sin x}{\cos^2 x}$, k) $\dfrac{4\sin x}{\cos^5 x}$, m) $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$,

n) $-\dfrac{2\sin x}{3\sqrt[3]{\cos x}}$, o) $\dfrac{-1}{\cos^2 x.\sqrt{\text{tg}^3 x}}$, p) $\dfrac{1}{\cos^2 x.\sqrt{1+2\text{tg}\ x}}$, q) $\dfrac{-8}{3\sin^4 x.\sqrt[3]{\text{cotg}\ x}}$,

r) $-\cos 2x$, s) $\dfrac{3\cos^4 x-12\cos^2 x+8}{8\cos^5 x}$, t) $4(1+\sin^2 x)^3.\sin 2x$, u) $\dfrac{-\sin 2x}{4.\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}}$,

v) $\dfrac{-\sin 2x}{2.\sqrt{(1+\sin^2 x)^3}}$, w) $-\dfrac{2\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

Derivace exponenciálních funkcí.

$$\boxed{y = a^x\ ,\ a > 0\ ,\ y' = a^x.\ln a\ ;\quad y = e^x\ ,\ y' = e^x} \quad (97)$$

218.cvičení. Derivujte funkce :

a) $y = 3^x$, b) $y = 10^x$, c) $y = (\sqrt{3})^x$, d) $y = e^x.\cos x$, e) $y = x.e^x(\cos x+\sin x)$,

f) $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$, g) $y = \dfrac{1-10^x}{1+10^x}$, h) $y = \dfrac{1}{2^x}$, k) $y = \dfrac{x}{4^x}$, m) $y = \dfrac{x^3+2x}{e^x}$, n) $y = \dfrac{e^x}{\sin x}$,

o) $y = \sqrt{1+e^x}$, p) $y = \dfrac{3}{2.\sqrt[3]{(x-e^x)^2}}$, q) $y = \sqrt{\dfrac{1-e^x}{1+e^x}}$.

Výsledky : a) $3^x.\ln 3$, b) $10^x.\ln 10$, c) $(\sqrt{3})^x.\ln\sqrt{3}$, d) $e^x(\cos x - \sin x)$,

e) $e^x(\cos x+\sin x+2x.\cos x)$, f) $\dfrac{2e^x}{(1-e^x)^2}$, g) $-\dfrac{2.10^x.\ln 10}{(1+10^x)^2}$, h) $-\dfrac{\ln 2}{2^x}$, k) $\dfrac{1-x.\ln 4}{4^x}$,

m) $\frac{2-2x+3x^2-x^3}{e^x}$, f) $\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}$,o) $\frac{e^x}{2.\sqrt{1+e^x}}$, p) $\frac{e^x-1}{\sqrt[3]{(x-e^x)^5}}$,q) $\frac{-e^x}{(1+e^x)\sqrt{1-e^{2x}}}$.

Derivace logaritmických funkcí.

$$y = \log_a x \ , \ y' = \frac{1}{x}.\log_a e = \frac{1}{x}.\frac{1}{\ln a} \ ; \quad y = \ln x \ , \ y' = \frac{1}{x} \qquad (98)$$

219.cvičení. Derivujte funkce :

a) $y = x^2.\log_3 x$, b) $y = x.\log x$, c) $y = x.\ln x - x$, d) $y = x.\sin x.\ln x$,

e) $y = \frac{\ln x}{x^n}$, f) $y = \frac{1}{\ln x}$,g) $y = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$, h)$y= \ln^6 x$, k) $y = \sqrt[3]{\ln x}$, m)$y= \sqrt{1+\ln^2 x}$,

Výsledky : a) $2x\log_3 x + x\log_3 e$, b) $\log x + \frac{1}{\ln 10}$, c) $\ln x$, d)$\sin x.\ln x + \sin x +$ $+ x.\cos x.\ln x$, e) $\frac{1-n.\ln x}{x^{n+1}}$, f) $-\frac{1}{x.\ln^2 x}$, g) $\frac{-2}{x(1+\ln x)^2}$, h) $\frac{6}{x}.\ln^5 x$,

k) $\frac{1}{3x\sqrt[3]{\ln^2 x}}$, m) $\frac{\ln x}{x.\sqrt{1+\ln^2 x}}$.

Derivace cyklometrických funkcí.

$$y = \arcsin x \ , \ y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ ; \quad y = \arccos x \ , \ y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \mathrm{arctg}\, x \ , \ y' = \frac{1}{1+x^2} \ ; \quad y = \mathrm{arccotg}\, x, \ y' = -\frac{1}{1+x^2} \qquad (99)$$

220.cvičení. Derivujte funkce :

a) $y = x.\arcsin x$, b) $y = \frac{\arccos x}{x}$, c) $y = \sqrt{x}.\mathrm{arctg}\, x$, d) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$,

e) $y = (\arcsin x)^2$, f) $y = \frac{(\mathrm{arctg}\, x)^2}{2}$, g) $y = \sqrt{1-(\arccos x)^2}$.

Výsledky : a) $\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, b)$-\frac{x+\arccos x.\sqrt{1-x^2}}{x^2.\sqrt{1-x^2}}$, c) $\frac{\mathrm{arctg}\, x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$,

d) $\frac{\sqrt{1-x^2}+x.\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, e) $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, f) $\frac{\mathrm{arctg} x}{1+x^2}$, g) $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-(\arccos x)^2}}$.

DESÍTKA ÚLOH čís. 31

Derivujte funkce :

1) $y = \frac{\mathrm{arccotg}\, x}{x^2}$, [$-\frac{x^2+2x(1+x^2).\mathrm{arccotg}\, x}{x^4(1+x^2)}$] ;

2) $y = \frac{e^x.\arccos x}{x}$ [$e^x.\left(\frac{\arccos x}{x} - \frac{1}{x.\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arccos x}{x^2}\right)$];

3) $y = \frac{x^2+1}{2}.\mathrm{arctg}\, x - \frac{x}{2}$, [$x.\mathrm{arctg}\, x$] ;

4) $y = x.\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$, [$2.\sqrt{1-x^2}$] ;

5) $y = x - \sqrt{1-x^2}.\arcsin x$, [$\frac{x.\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$] ;

6) $y = \frac{1+x.\mathrm{arctg}\, x}{\sqrt{1+x^2}}$ [$\frac{\mathrm{arctg}\, x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$] ;

7) $y = x.(\arcsin x)^2 - 2x + 2.\sqrt{1-x^2}.\arcsin x$, $[\ (\arcsin x)^2\ ]$;

8) $y = \sqrt{\dfrac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$ $\qquad \left[\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}.\left((\arcsin x)^2 - 1\right)}.y\ \right]$;

9) $y = x + \sqrt{1-x^2}.\arccos x$, $\qquad \left[-\dfrac{x.\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \right]$;

10) $y = 3x^3.\arcsin x + (x^2+2).\sqrt{1-x^2}$, $[\ 9x^2.\arcsin x\ ]$.

§ 28. DERIVACE SLOŽENÝCH FUNKCÍ.

Složenou funkci nahrazujeme řetězcem funkcí, jež jsou jejími složkami :

$y = F[f(x)]$ lze zapsat $y = F(z)$, $z = f(x)$

$y = F\{f[\varphi(x)]\}$ $\qquad y = F(z)$, $z = f[\varphi(x)]$

$\qquad z = f(u)$, $u = \varphi(x)$

Důležité je vystihnout první, tzv. vnější složku a pořadí vnitřních složek. Např. :

$y = \sin 2x$ lze zapsat $y = \sin z$, $z = 2x$;

$y = \sin^2 x$ lze zapsat $y = z^2$, $z = \sin x$;

$y = \sin^2 2x$ lze zapsat $y = z^2$, $z = \sin 2x$

$\qquad z = \sin u$, $u = 2x$

$y = F[f(x)]$ čili $y = F(z)$, $z = f(x)$

$$y' = F'(z) \,.\, f'(x) \qquad (100)$$

Stručně: Derivace složené funkce se rovná součinu derivací složek.

$y = \sin 2x$; $y' = (\sin z)'.\,(2x)' = \cos z \,.\, 2 = 2.\cos 2x$

$y = \sin^2 x$; $y' = (z^2)'.(\sin x)' = 2z \,.\, \cos x = 2.\sin x.\cos x = \sin 2x$

$y = \sin^2 2x$; $y' = (z^2)'.(\sin u)'.(2x)' = 2z.\cos u.\,2 = 4.\sin 2x\,.\cos 2x$
$= 2.\sin 4x$

Při procvičování derivace složené funkce se doporučuje provést v několika prvních případech nejprve její rozklad na složky, derivace složek znásobit a zavést zpět původní proměnnou x. Postupně je třeba se osvobozovat od zavádění nových proměnných a derivovat složenou funkci přímo. Za tím účelem budeme procvičovat derivaci složené funkce postupně na jednotlivých typech : derivace mocniny funkce, derivace složené funkce goniometrické atd.

Derivace mocniny funkce byla již určována podle pravidla :

$$y = [f(x)]^n \quad , \quad y' = n.[f(x)]^{n-1}.f'(x)$$

Ověřte si jeho správnost a platnost pro každé n užitím pravidla (100). Připomeňte si cvičení : 215, 217, 218opq, 219hkm a 220defg.

Znovu se zdůrazňuje úprava zápisu funkce před derivováním v některých případech, jako : $y = \cos^n x$ čili $y = (\cos x)^n$; $y = \mathrm{tg}^n x$ čili $y = (\mathrm{tg}\, x)^n$;
$y = \arcsin^n x$ $\quad y = (\arcsin x)^n$; $y = \log^n x$ $\quad y = (\log x)^n$.

Derivace složených funkcí goniometrických.

(101)

$$y = \sin f(x) \qquad y = \cos f(x) \qquad y = \mathrm{tg}\, f(x) \qquad y = \mathrm{cotg}\, f(x)$$

$$y' = \cos f(x).f'(x); \quad y' = -\sin f(x).f'(x); \quad y' = \frac{1}{\cos^2 f(x)}.f'(x); \quad y' = \frac{-1}{\sin^2 f(x)} f'(x)$$

$y = \sin(ax+b)$, $y' = \cos(ax+b).(ax+b)' = a.\cos(ax+b)$

221.cvičení. Derivujte funkce :

a) $y = \sin 5x$, b) $y = \cos\frac{x}{2}$, c) $y = \mathrm{tg}(3x^2-x)$, d) $y = \sin\sqrt{x}$, e) $y = \cos\sqrt[3]{x^2}$,

f) $y = \sin\frac{1}{x}$, g) $y = \cos\frac{1}{1-x^2}$, h) $y = \sin 2^x$, k) $y = \sin\sqrt{1+x^2}$, m) $y=\mathrm{cotg}\sqrt[3]{1+x^2}$,

n) $y = \sin(\sin x)$, o) $y = \mathrm{tg}(\sin x)$, p) $y = \mathrm{cotg}(\ln x)$, q) $y = \cos(\arccos x)$

Výsledky: a) $5\cos 5x$, b) $-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$, c) $\frac{6x-1}{\cos^2(3x^2-x)}$, d) $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, e) $-\frac{2.\sin\sqrt[3]{x^2}}{3.\sqrt[3]{x}}$,

f) $-\frac{1}{x^2}.\cos\frac{1}{x}$, g) $\frac{-2x}{(1-x^2)^2}.\sin\frac{1}{1-x^2}$, h) $2^x.\ln 2.\cos 2^x$, k) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.\cos\sqrt{1+x^2}$,

m) $\frac{-2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}.\sin^2\sqrt[3]{1+x^2}}$, n) $\cos x.\cos(\sin x)$, o) $\frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}$ p) $\frac{-1}{x.\sin^2(\ln x)}$,

q) $\frac{\sin(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

222.cvičení.

a) $y = \sin^5 4x$, b) $y = \cos^3(\frac{x}{3})$, c) $y = \frac{1}{\mathrm{tg}^2 2x}$, d) $y = \frac{1}{\sin^3\frac{x}{2}}$, e) $y=\sqrt{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$, f) $y=\frac{1}{\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$

Výsledky: a) $20\sin^4 4x.\cos 4x$, b) $-\cos^2(\frac{x}{3}).\sin\frac{x}{3}$, c) $\frac{-4}{\mathrm{tg}2x.\sin^2 2x}$, d) $\frac{-3\cos\frac{x}{2}}{2\sin^4\frac{x}{2}}$,
e) $\frac{1}{4.\sqrt{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}.\cos^2\frac{x}{2}}$, f) $\frac{-\cos\sqrt{x}}{4.\sqrt{x}.\sqrt{\sin^3\sqrt{x}}}$.

Derivace složených funkcí exponenciálních.

$$y = a^{f(x)} , \quad y' = a^{f(x)}.\ln a.f'(x) \quad ; \qquad y = e^{f(x)} , \quad y' = e^{f(x)}.f'(x) \qquad (102)$$

223.cvičení. Derivujte funkce :

a) $y = a^{mx+n}$, b) $y= 5^{x^2-2x+1}$, c) $y= e^{3x}$, d) $y= e^{-x}$, e) $y= e^{x^2}$, f) $y = e^{\sqrt{x}}$,

g) $y = e^{\ln x}$, h) $y= e^{\sin x}$, k) $y= 2^{\frac{x}{\ln x}}$, m) $y= e^{\sqrt{1+x}}$, n) $y=e^{\sqrt{\ln x}}$, o) $y=a^{\sin^3 x}$,

p) $y = 10^{x.\mathrm{tg}x}$, q) $y= e^{-x^2}.\ln x$, r) $y= x.e^{1-\cos x}$, s) $y= \sin(e^{x^2+3x-2})$.

Výsledky: a) $a^{mx+n}.\ln a.m$, b) $2(x-1)\ln 5.5^{x^2-2x+1}$, c) $3e^{3x}$, d) $-e^{-x}$, e) $2x.e^{x^2}$,

f) $e^{\sqrt{x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$, g) $e^{\ln x}.\frac{1}{x}$, h) $e^{\sin x}.\cos x$, k) $y.\ln 2.\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$, m) $y.\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$,

n) $y.\frac{1}{2x.\sqrt{\ln x}}$, o) $y.\ln a.3\sin^2 x.\cos x$, p) $y.\ln 10.(\mathrm{tg}x + \frac{x}{\cos^2 x})$, q) $e^{-x^2}.(\frac{1}{x} -2x\ln x)$

r) $e^{1-\cos x}.(1+ x.\sin x)$, s) $(2x+3).e^{x^2+3x-2}.\cos(e^{x^2+3x-2})$.

Na složené exponenciální funkce o základu e převádíme funkce exponenciální, jichž základem je nějaká funkce proměnné x (nebo jen proměnná x). Přitom užíváme rovnosti pro $a > 0$ $\qquad a = e^{\ln a}$

Například $y = x^x$ zapíšeme $y = e^{\ln y} = e^{x.\ln x}$, pro $x > 0$

$$y' = e^{x.\ln x}.(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

224.cvičení. Podle uvedeného vzoru derivujte funkce :

a) $y = x^{\sin x}$, $[\,y.(\cos x.\ln x + \frac{\sin x}{x})\,]$; b) $y = x^{\operatorname{tg} x}$, $[\,y.(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x})\,]$.

<u>Poznámka</u>. S derivací funkcí exponenciálních tvaru

$$y = [\,u(x)\,]^{v(x)} \text{, stručně } y = u^v ,$$

se setkáme u derivační metody zv. logaritmická derivace , která je výhodnější, jde-li o složitější funkční zápis.

DESÍTKA ÚLOH čís. 32 — Derivujte funkce :

1) $y = \cos^2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, $\quad y' = \frac{1}{\sqrt{x}.(1+\sqrt{x})^2}.\sin(2.\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}})$;

2) $y = (\operatorname{tg}\frac{1-e^x}{1+e^x})^{-1}$, $\quad y' = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2}.(\sin\frac{1-e^x}{1+e^x})^{-2}$;

3) $y = \sin^2\frac{1-\ln x}{x}$, $\quad y' = \frac{\ln x - 2}{x^2}.\sin(2.\frac{1-\ln x}{x})$;

4) $y = \sqrt{\sin^3\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}}$, $\quad y' = \frac{3}{4.\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}.\sqrt{\sin\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}.\cos\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$;

5) $y = \sqrt[3]{\cos^2(x.\ln x)}$, $\quad y' = -\frac{2}{3}(1+\ln x).\sqrt[3]{\operatorname{tg}(x.\ln x).\sin^2(x.\ln x)}$;

6) $y = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$, $\quad y' = -\,y.\frac{1}{(1+x).\sqrt{1-x^2}}$;

7) $y = 10^{1-\sin^4 3x}$, $\quad y' = -\,12y.\ln 10.\sin^3 3x.\cos 3x$

8) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}.e^{x^2-\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln x+1}$, $\quad y' = y.(2x - \frac{1}{1+x^2})$;

9) $y = 2^{\sin^2 x.\cos x^2}$, $\quad y' = 2y.\ln 2.\sin x(\cos x.\cos x^2 - x.\sin x.\sin x^2)$;

10) $y = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}}$, $\quad y' = \frac{1}{4.e^{\sqrt{x}}.\sqrt{x}.\sqrt{(1+e^{-\sqrt{x}})^3}}$.

<u>Derivace složených funkcí logaritmických.</u>

$$y = \log_a f(x) \text{ , } y' = \frac{1}{f(x)}.f'(x).\frac{1}{\ln a} \text{ ; } \quad y = \ln f(x) \text{ , } y' = \frac{1}{f(x)}f'(x) \tag{103}$$

225.<u>cvičení</u>. Derivujte funkce :

a) $y = \ln(3-5x)$,b) $y = \ln(3x^2-2x+5)$,c) $y = \ln\sin x$,d) $y = \ln\cos x$, e) $y = \ln\operatorname{tg}x$,

f) $y = \log_2(1-x^2)$, g) $y = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$, h) $y = \ln\operatorname{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$.

<u>Výsledky:</u> a) $\frac{-5}{3-5x}$, b) $\frac{6x-2}{3x^2-2x+5}$, c) $\operatorname{cotg} x$, d) $-\operatorname{tg} x$, e) $\frac{2}{\sin 2x}$, f) $\frac{-2x}{(1-x^2).\ln 2}$,

g) $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$, h) $\frac{1}{\cos x}$.

Jestliže u složené funkce logaritmické je vnitřní složka vyjádřena výrazem, který se dá logaritmovat, je výhodné nejprve naznačený logaritmus složky f(x) provést a pak teprve derivovat.

/75/.**příklad** : $y = \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2}.\ln\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}[\ln(1-x) - \ln(1+x)]$

$$y' = \frac{1}{2}.\left[\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right] = \frac{-1}{1-x^2}$$

Provádíme-li derivaci takové funkce přímo, pak v případě, že vnitřní složka je zlomkem, tj. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, píšeme při derivování hned místo $\frac{1}{f(x)}$ zlomek $\frac{v(x)}{u(x)}$, nebo je-li $f(x) = \sqrt[n]{\frac{u(x)}{v(x)}}$, píšeme při derivování hned místo $\frac{1}{f(x)}$ výraz $\sqrt[n]{\frac{v(x)}{u(x)}}$.

U přímé derivace se setkáváme se složitějšími zápisy. Tak v uvedeném příkladě /75/ by bylo: $y' = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.\left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = -\frac{1}{1-x^2}$.

226.**cvičení**. Derivujte funkci :

a) $y = \ln\frac{(x-2)^2}{x-3}$, b) $y = \ln\frac{3-x^2}{2-x^2}$, c) $y = \ln\frac{1-e^x}{e^x}$, d) $y = \ln(x.\sin x.\sqrt{1-x^2})$

Výsledky: a) $\frac{x-4}{(x-2).(x-3)}$, b) $\frac{2x}{x^4-5x^2+6}$, c) $\frac{1}{e^x-1}$, d) $\frac{1}{x} - \frac{x}{1-x^2} + \operatorname{cotg} x$.

DESÍTKA ÚLOH čís. 33

Derivujte funkce :

1) $y = \ln\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$, $\quad y' = -\frac{1}{x.\sqrt{1-x^2}.(x+\sqrt{1-x^2})}$;

2) $y = \ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$, $\quad y' = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

3) $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$, $\quad y' = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$;

4) $y = \frac{1}{\sqrt{2}}.\ln(\sqrt{2}.\operatorname{tg}x + \sqrt{1+2\operatorname{tg}^2x})$, $\quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^4x}}$;

5) $y = \ln\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}$, $\quad y' = \frac{x^2-1}{x.\sqrt{x^4+3x^2+1}}$;

6) $y = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ $\quad y' = -\frac{1}{\cos x}$;

7) $y = e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$, $\quad y' = y.\frac{2ax+b}{2(ax^2+bx+c).\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$;

8) $y = \sqrt[3]{\ln\sin\frac{x+3}{4}}$, $\quad y' = \frac{\operatorname{cotg}\frac{x+3}{4}}{12.\sqrt[3]{\ln^2\sin\frac{x+3}{4}}}$;

9) $y = \ln\frac{e^x+2+\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}{e^x+2-\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$ $\quad y' = \frac{2e^x}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$;

10) $y = \ln\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}}$ $\quad y' = -\frac{1}{2x.\sqrt{1-x}}$.

Při derivaci součtu dvou složených funkcí různého typu můžeme derivovat zvlášť jednotlivé funkce, k čemuž se doporučuje zavést za tyto funkce nové označení.

/76/Např. u funkce $y = \frac{3}{2}.(1-\sqrt[3]{1+x^2})^2 + 3.\ln(1+\sqrt[3]{1+x^2})$ zavedeme : $u = \frac{3}{2}.(1-\sqrt[3]{1+x^2})^2$, $\quad v = 3.\ln(1+\sqrt[3]{1+x^2})$ a derivujeme

$$u' = \frac{-6x + 6x\sqrt[3]{1+x^2}}{3.\sqrt[3]{(1+x^2)^2}} \quad , \quad v' = \frac{6x}{3.\sqrt[3]{(1+x^2)^2}.(1+\sqrt[3]{1+x^2}\,)}$$

$$y = u + v \quad , \quad y' = u' + v' = \frac{2x}{1+\sqrt[3]{1+x^2}}$$

DESÍTKA ÚLOH čís. 34 Derivujte funkce :

1) $y = 2.\sqrt{x+1} + \ln\frac{x+2-2.\sqrt{1+x}}{x}$, $y' = \frac{\sqrt{1+x}}{x}$;

2) $y = \frac{2+x}{2}.\sqrt{4x+x^2} - 2.\ln(x+2+\sqrt{4x+x^2}\,)$, $y' = \sqrt{4x+x^2}$;

3) $y = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2}.\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}$, $y' = \frac{1}{x^3.\sqrt{1+x^2}}$;

4) $y = \ln(1+\sqrt{1+x^2}\,) + \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}$, $y' = \frac{x}{x^2+2+2\sqrt{1+x^2}}$;

5) $y = \frac{1}{2}.\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{3x+1} + \ln(\sqrt[3]{3x+1} - 1)$, $y' = \frac{1}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$;

6) $y = \frac{x+5}{2}.\sqrt{x^2+2x+2} - \frac{7}{2}.\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\,)$, $y' = \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$;

7) $y = \ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} + \frac{x-1}{x^2+1}$, $y' = \frac{4x}{(1+x).(1+x^2)^2}$;

8) $y = (x-2).\sqrt{1+e^x} - \ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}$, $y' = \frac{x.e^x}{2.\sqrt{1+e^x}}$;

9) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.\arcsin x + \ln\sqrt{1-x^2}$, $y' = \frac{\arcsin x}{(1-x^2).\sqrt{1-x^2}}$;

10) $y = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}$, $y' = \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$.

<u>Derivace složených funkcí cyklometrických.</u> (104)

$$y = \arcsin f(x) \ , \ y' = \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}.f'(x); \quad y = \mathrm{arctg}\, f(x) \ , \ y' = \frac{1}{1+[f(x)]^2}f'(x)$$

$$y = \arccos f(x) \ , \ y' = \frac{-1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}.f'(x); \quad y = \mathrm{arccotg}\, f(x), \ y' = \frac{-1}{1+[f(x)]^2}f'(x)$$

/77/.<u>příklad</u>.

$$y = \arcsin\frac{x+2}{3} \ , \ y' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x+2}{3})^2}}.\left(\frac{x+2}{3}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{5-4x-x^2}{9}}}.\frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}}$$

227.<u>cvičení</u>. Derivujte funkce :

a) $y = \arcsin\frac{x-2}{2}$, $y' = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$; b) $y = \frac{1}{2}.\mathrm{arctg}\frac{x-1}{2}$, $y' = \frac{1}{x^2-2x+5}$;

c) $y = \arccos\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$, $y' = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{1+2x-2x^2}}$; d) $y = \arccos\frac{1}{x}$, $y' = \frac{1}{|x|.\sqrt{x^2-1}}$;

e) $y = \arccos \frac{2-x}{x\sqrt{2}}$, $y' = \frac{2}{x.\sqrt{x^2+4x-4}}$; f) $y = \mathrm{arctg}\, \frac{1+x}{1-x}$, $y' = \frac{1}{1+x^2}$;

g) $y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$, $y' = \frac{-2}{1+x^2}$; h) $y = \frac{1}{\sqrt{3}}.\mathrm{arctg}\, \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$, $y' = \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$;

k) $y = \arcsin e^x$, $y' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$; m) $y = 2.\arcsin \sqrt{x}$, $y' = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$;

n) $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$, $y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; o) $y = \mathrm{arctg}\, \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$, $y' = \frac{1}{2.\sqrt{1-x^2}}$.

DESÍTKA ÚLOH čís. 35 Derivujte funkce :

1) $y = 2.\arcsin \sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{2x-x^2}$, $y' = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$;

2) $y = -\frac{x+6}{2}\sqrt{5+4x-x^2} + \frac{17}{2}.\arcsin \frac{x-2}{3}$, $y' = \frac{x^2}{\sqrt{5+4x-x^2}}$;

3) $y = \frac{1}{24}.\ln \frac{(x-2)^2}{x^2+2x+4} - \frac{1}{4\sqrt{3}}.\mathrm{arctg}\, \frac{x+1}{\sqrt{3}}$, $y' = \frac{1}{x^3-8}$;

4) $y = \frac{1}{16}.\ln \frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2} + \frac{1}{8}.\mathrm{arctg}\, \frac{2x}{2-x^2}$, $y' = \frac{1}{x^4+4}$;

5) $y = \frac{x-a}{2}.\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2}.\arcsin \frac{x-a}{a}$, $y' = \sqrt{2ax-x^2}$;

6) $y = \frac{1}{2}.\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}.\mathrm{arctg}\, \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, $y' = \frac{x}{x^2+x+1}$;

7) $y = \frac{1}{2}.[\, x.\sqrt{a^2-x^2} + a^2.\arcsin \frac{x}{a}\,]$, $y' = \sqrt{a^2-x^2}$;

8) $y = x.\arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \mathrm{arctg}\, \sqrt{x} - \sqrt{x}$, $y' = \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$;

9) $y = \sqrt{ax-x^2} - a.\mathrm{arctg}\, \sqrt{\frac{a-x}{x}}$, $y' = \sqrt{\frac{a-x}{x}}$;

10) $y = \ln \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} + 2.\mathrm{arctg}\, \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $y' = \frac{1}{x}.\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

<u>Derivace funkcí hyperbolických</u>. Pro hyperbolické funkce

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\mathrm{tgh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $\mathrm{cotgh}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

se odvozuje :

$$\begin{array}{llll} y = \sinh x , & y' = \cosh x ; & y = \sinh f(x) , & y' = \cosh f(x).f'(x) \\ y = \cosh x , & y' = \sinh x ; & y = \cosh f(x) , & y' = \sinh f(x).f'(x) \\ y = \mathrm{tgh}\, x , & y' = \frac{1}{\cosh^2 x} ; & y = \mathrm{tgh}\, f(x) , & y' = \frac{1}{\cosh^2 f(x)}.f'(x) \\ y = \mathrm{cotgh}\, x , & y' = \frac{-1}{\sinh^2 x} ; & y = \mathrm{cotgh}\, f(x) , & y' = \frac{-1}{\sinh^2 f(x)}.f'(x) \end{array} \quad (105)$$

K zjednodušení funkcí, které obdržíte derivováním, užijte vztahů mezi hyperbolickými funkcemi, z nichž nejzákladnější jsou :

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ $\mathrm{tgh}\, x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ $\mathrm{cotgh}\, x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \quad ; \quad \sinh 2x = 2.\sinh x.\cosh x$$

Z každého racionálního vztahu mezi funkcemi goniometrickými lze získat odpovídající vztah mezi funkcemi hyperbolickými tak,že

symbol	sin	nahradíme symbolem	i.sinh	
symbol	cos	nahradíme symbolem	cosh	$i^2 = -1$
symbol	tg	nahradíme symbolem	i.tgh	
symbol	cotg	nahradíme symbolem	-i.cotgh	

Přesvědčte se o tom u uvedených pěti vztahů mezi hyperbolickými funkcemi.

228.cvičení. Derivujte funkce :

a) $y = \cosh(\sinh x)$, b) $y = \mathrm{tgh}(1-x^2)$, c) $y = \mathrm{tgh}(\ln x)$, d) $y = \sinh^3 x$,

e) $y = \sinh^2 x + \cosh^2 x$, f) $y = \sqrt{\cosh x}$, g) $y = \ln \cosh x$,h) $y = \mathrm{arctg}(\sinh x)$.

Výsledky : a) $\sinh(\sinh x).\cosh x$, b) $\dfrac{-2x}{\cosh^2(1-x^2)}$, c) $\dfrac{1}{x.\cosh^2(\ln x)}$,

d) $3\sinh^2 x.\cosh x$, e) $2\sinh 2x$, f) $\dfrac{\sinh x}{2\sqrt{\cosh x}}$, g) $\mathrm{tgh}\, x$, h) $\dfrac{1}{\cosh x}$.

DESÍTKA ÚLOH čís. 36 Derivujte funkce :

1) $y = \dfrac{\cosh x}{\sinh^2 x} - \ln \mathrm{cotgh}\dfrac{x}{2}$, $\left[\dfrac{-2}{\sinh^3 x}\right]$; 2) $y = \ln \cosh x + \dfrac{1}{2\cosh^2 x}$, $\left[\mathrm{tgh}^3 x\right]$

3) $y = \frac{1}{2}.\mathrm{tgh}\frac{x}{2} - \frac{1}{6}.\mathrm{tgh}^3\frac{x}{2}$, $\left[\dfrac{1}{4\cosh^4\frac{x}{2}}\right]$; 4) $y = \arcsin(\mathrm{tgh}\, x)$, $\left[\dfrac{1}{\cosh x}\right]$;

5) $y = \arccos\left(\dfrac{1}{\cosh x}\right)$, $\left[\dfrac{1}{\cosh x}\right]$; 6) $y = \mathrm{arctg}(\mathrm{tgh}\, x)$, $\left[\dfrac{1}{\cosh 2x}\right]$

7) $y = \sqrt{1 + \sinh^2 4x}$, $\left[4\sinh 4x\right]$; 8) $y = \sqrt[4]{(1+\mathrm{tgh}^2 x)^3}$, $\left[\dfrac{3\mathrm{tgh}\, x}{2\cosh^2 x.\sqrt[4]{1+\mathrm{tgh}^2 x}}\right]$

9) $y = e^{\cosh^2 x}$, $\left[e^{\cosh^2 x}.\sinh 2x\right]$; 10) $y = \frac{1}{2}\mathrm{tgh} x + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\dfrac{\sqrt{2}.\mathrm{tgh}\, x + 1}{1 - \sqrt{2}.\mathrm{tgh}\, x}$, $\left[\dfrac{1}{1-\sinh^4 x}\right]$

L o g a r i t m i c k á   d e r i v a c e.

Funkce vyjádřené výrazem,který se dá logaritmovat,můžeme derivovat metodou tzv. logaritmické derivace.Podstatu této metody tvoří derivace složené logaritmické funkce :

$$\left[\ln f(x)\right]' = \frac{1}{f(x)}.f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Při označení $y = f(x)$ $\left[\ln y\right]' = \frac{1}{y}\cdot y' = \frac{y'}{y}$

Kromě funkcí,jež jsou součinem a podílem mocnin funkcí,derivujeme metodou logaritmické derivace funkce tvaru $y = \left[u(x)\right]^{v(x)}$, stručně $y = u^v$.

Postup ukážeme na dvou příkladech :

/78/.příklad : $y = \dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$

1.krok : funkční rovnici logaritmujeme (přirozeným logaritmem)

$$\ln y = 3.\ln(x+1) + \frac{1}{4}.\ln(x-2) - \frac{2}{5}.\ln(x-3)$$

2.krok : derivujeme obě strany vzniklé rovnosti funkcí

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x+1} + \frac{1}{4(x-2)} - \frac{2}{5(x-3)}$$

3.krok : pravou stranu upravíme

$$\frac{y'}{y} = \frac{57x^2 - 302x + 361}{20(x+1)(x-2)(x-3)}$$

4.krok : rovnost násobíme číslem y, za něž na pravé straně dosadíme danou funkci;

po krácení $$y' = \frac{57x^2 - 302x + 361}{20(x-2)(x-3)} \cdot \frac{(x+1)^2 . \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$$

229.<u>cvičení</u>. Užitím logaritmické derivace derivujte funkce :

a) $y = (1+x).\sqrt{2+x^2}.\sqrt[3]{3+x^3}$, $y' = \dfrac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}.\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$

b) $y = \dfrac{(3-x)^4.\sqrt{x+2}}{(x+1)^5}$, $y' = \dfrac{(x^2-32x-73).(3-x)^3}{2(x+1)^6.\sqrt{x+2}}$

c) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x.(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$, $y' = \dfrac{x^4+6x^2+1}{3x(1-x^4)}.\sqrt[3]{\dfrac{x.(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$

d) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$, $y' = \dfrac{3x^2+10x+20}{15(x^2+4).\sqrt[3]{(x-5)^2.\sqrt[5]{x^2+4}}}$

Derivujte některý z těchto případů také dřívějšími metodami a srovnejte s metodou logaritmické derivace.

Touto metodou možno derivovat všechny složené exponenciální funkce tvaru $y = a^{f(x)}$, $a > 0$. Viz cvič. 223.

/79/.<u>příklad</u> : $y = (\sin x)^{\cos x}$

1.krok :logaritmujeme $\ln y = \cos x . \ln \sin x$

2.krok :derivujeme $\dfrac{y'}{y} = -\sin x.\ln \sin x + \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$ /. y

3. a 4.krok : $y' = (\cos x.\mathrm{cotg}\,x - \sin x.\ln \sin x).(\sin x)^{\cos x}$

230.<u>cvičení</u>. Užitím logaritmické derivace derivujte funkce :

a) $y = x^x$, b) $y = \sqrt[x]{x}$, c) $y = 2.x^{\sqrt{x}}$, d) $y = x^{x^2}$, e) $y = x^{\ln x}$, f) $y = x^{\arcsin x}$,

g) $y = (\sin x)^x$, h) $y = (\mathrm{tg}\,x)^x$, k) $y = (\ln x)^x$, m) $y = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$, n) $y = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{1+x}}$

<u>Výsledky</u> : a) $x^x(1+\ln x)$, b) +/ , c) $\dfrac{2+\ln x}{2.\sqrt{x}}.y$, d) $x^{x^2+1}.(2.\ln x + 1)$,

e) $2.x^{\ln x - 1}.\ln x$, f) $y.. \dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{\arcsin x}{x}$), g) $y.(\ln \sin x + x.\mathrm{cotg}\,x)$,

h) $y.(\ln \mathrm{tg}x + \dfrac{2x}{\sin 2x})$, k) $y.(\dfrac{1}{\ln x} + \ln \ln x)$, m) $y.(\dfrac{1}{x+1} + \ln \dfrac{x}{x+1})$

n) $\dfrac{2y}{(1+x)^2}.(1 + \ln \dfrac{1-x}{1+x})$. +/ b) $\sqrt[x]{x^{1-2x}}.(1 - \ln x)$

<u>Derivace funkce dané i m p l i c i t n ě</u> .

U funkce dané implicitně rovnicí $F(x,y) = 0$ předpokládáme existenci explicitního tvaru $y = f(x)$, i když někdy nedovedeme vypočítat y z rovnice $F(x,y)=0$. Tedy také ve funkční rovnici $F(x,y) = 0$ je y jistou funkcí proměnné x, a to nejčastěji funkcí složenou. Proto při derivování se setkáme s takovými zápisy :

$$(ay)' = a.y' \quad ; \quad (y^n)' = n.y^{n-1}.y' \quad ; \quad (x^3y^4)' = 3x^2y^4 + 4y^3y'.x^3$$

$(\sin y)' = \cos y \cdot y'$; $(e^y)' = e^y \cdot y'$; $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot y'$

Derivaci implicitní funkce $F(x,y) = 0$ budeme zatím počítat zcela formálně takto: Funkci $F(x,y) = 0$ derivujeme podle proměnné x, přičemž y považujeme za funkci x. Ze vzniklé rovnice vypočteme derivaci y' jako neznámou.

/80/.příklad :

$$x^2 - 2xy + y^3 - 1 = 0$$
$$2x - 2(y + y'x) + 3y^2y' = 0$$
$$y' = \frac{2(y-x)}{3y^2 - 2x}$$

Derivace funkce určená z implicitního tvaru je obyčejně vyjádřena oběma proměnnými x,y. Hledáme-li pak derivaci funkce v určitém bodě, tj. pro určité x, musíme si vypočítat i příslušnou funkční hodnotu y z funkční rovnice $F(x,y) = 0$.

231.cvičení. Vypočtěte derivace funkcí daných implicitně :

a) $y^2 = 2px$, b) $b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2$, c) $x^3 + y^3 = 3axy$, d) $x^2y^2 - x^4 - y^4 = a^4$,
e) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, f) $y - e.\sin y = x$, g) $xy - \ln y = a$, h) $yx^2 = e^y$,
k) $ye^x + e^y = 0$, m) $e^y - e^{-x} + xy = 0$, n) $y - \operatorname{arctg} y = x$.

Výsledky : a) $y' = \dfrac{p}{y}$, b) $y' = \mp \dfrac{xb^2}{ya^2}$, c) $\dfrac{ay - x^2}{y^2 - ax}$, d) $\dfrac{x(y^2 - 2x^2)}{y(2y^2 - x^2)}$, e) $-\dfrac{x(x^2 + y^2 - a^2)}{y(x^2 + y^2 + a^2)}$,

f) $\dfrac{1}{1 - e.\cos y}$, g) $\dfrac{y^2}{1 - xy}$, h) $\dfrac{2y}{x.(y-1)}$, k) $\dfrac{y}{y-1}$, m) $-\dfrac{e^{-x} + y}{e^y + x}$, n) $\dfrac{1}{y^2} + 1$.

Poznámka. Dané funkční implicitní rovnice se užívá někdy k zjednodušení výsledku. Derivaci funkcí daných implicitně budete později počítat užitím tzv. parciálních derivací funkce dvou proměnných.

DESÍTKA ÚLOH čís. 37

Derivujte funkce dané implicitně :

1) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$, $y' = \dfrac{ye^{xy} - ye^x - e^y}{xe^y + e^x - xe^{xy}}$;

2) $\sin(xy) - e^{xy} - x^2y = 0$, $y' = \dfrac{y.(2x + e^{xy} - \cos xy)}{x(\cos xy - e^{xy} - x)}$;

3) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $y' = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$;

4) $\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{a} - \dfrac{y}{a} = 0$, $y' = \dfrac{a^2}{(x+y)^2}$;

5) $x^y = y^x$, $y' = \dfrac{y(y - x.\ln y)}{x(x - y.\ln x)} = \dfrac{y^2(1 - \ln x)}{x^2(1 - \ln y)}$;

6) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$;

7) $y = 2x.\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $y' = \dfrac{y}{x}$

8) $e^x.\sin y - e^{-y}.\cos x = 0$, $y' = -\dfrac{e^x\sin y + e^{-y}\sin x}{e^x\cos y + e^{-y}\cos x}$;

9) $x.\sin y - \cos y + \cos 2y = 0$, $y' = -\dfrac{\sin y}{x.\cos y + \sin y - 2\sin 2y}$;

10) $x.e^{-\frac{y}{2}} + y.e^{-\frac{x}{2}} = 2$ $y' = \dfrac{y.e^{-\frac{x}{2}} - 2.e^{-\frac{y}{2}}}{2.e^{-\frac{x}{2}} - x.e^{-\frac{y}{2}}}$.