III. ZLATÝ ŘEZ A "GEOMETRICKÁ ALGEBRA"

(A) ZLATÝ ŘEZ ⟿ spec. kvadratická rounice

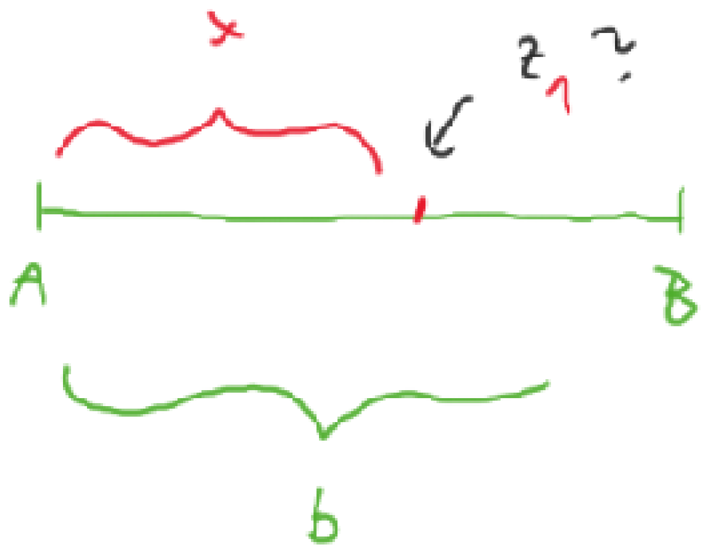
(B) .. DRUHÝ KOŘEN ?

(C) DALŠÍ SESTROJITELNÉ VELIČINY ← obecné nápady

$+, -, \cdot, :, \sqrt{\ }$

(D) OBECNÁ KVADRATICKÁ ROVNICE ⟿ DÚ

(A) ZLATÝ ŘEZ — VLASTNÍ KONSTRUKCE



Def.: AZ : ZB = AB : AZ

$$x : (b-x) = b : x$$

⋮

KVADR. ROVNICE

$$\boxed{x^2 + bx - b^2 = 0}$$

$$D = b^2 + 4b^2 = 5b^2 > 0$$

... dva ℝ různé

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{5b^2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot b$$

$x_1 > 0$, $x_2 < 0$

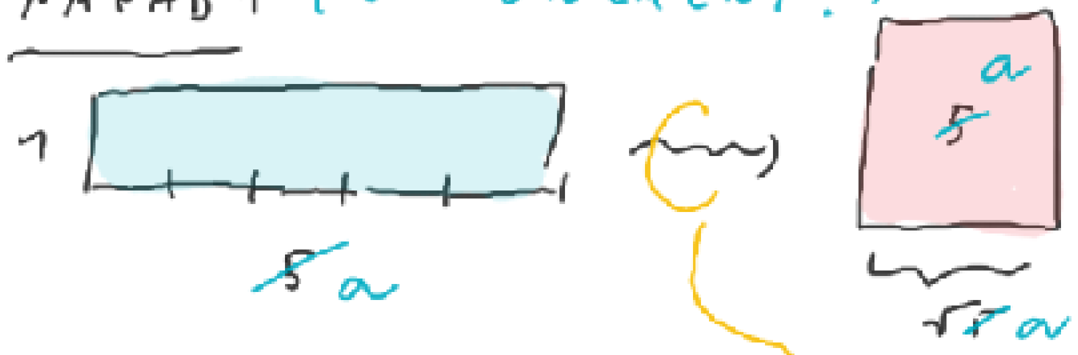
Z_1 Z_2 viz (B)

VLASTNÍ KONSTRUKCE ?

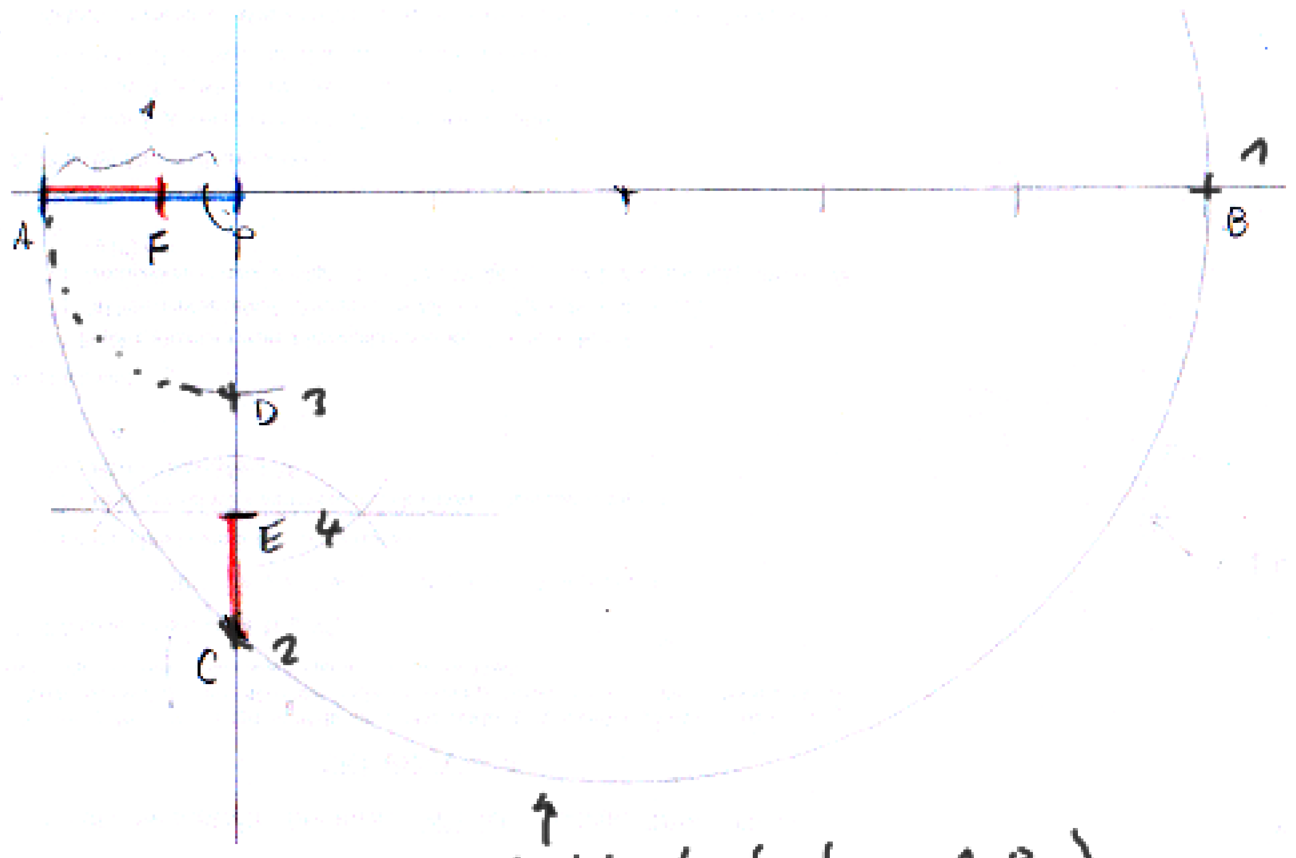
- 1 ⟿ $\sqrt{5}$ ... viz dále
- rozdíl  ... úsečky na přímce ✓
-  ... střed úsečky ✓

ad (A) "ODMOCNINA" $\rightsquigarrow$ CELÁ KONSTRUKCE

NÁPAD 1 (UNIVERZÁLNÍ!)



Eukl. věty ...

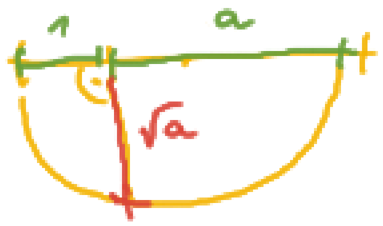


(Thalet kr. AB)

START $|AP| = 1$

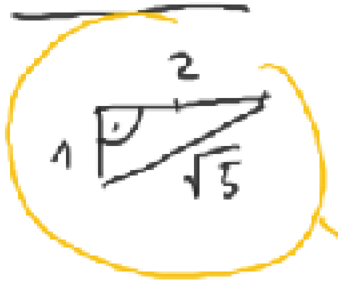
1) $B : |PB| = 5$
2) $C : |PC| = \sqrt{5}$!

... o výšce



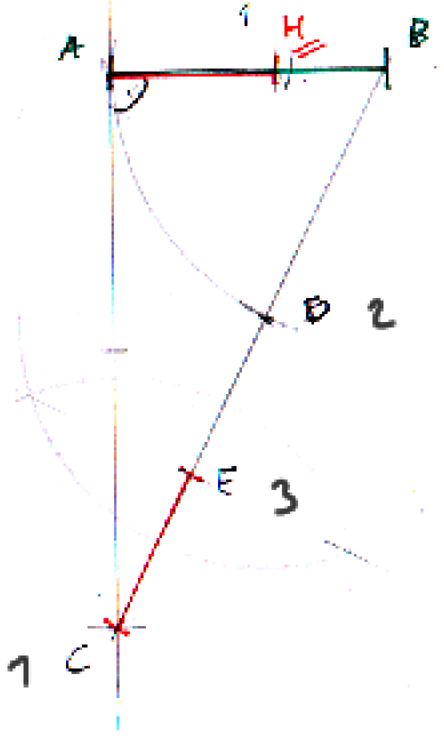
3) $D : |DC| = \sqrt{5} - 1$
4) $E : |EC| = |ED| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

NÁPAD 2 (SPEC)



$5 = 1^2 + 2^2$

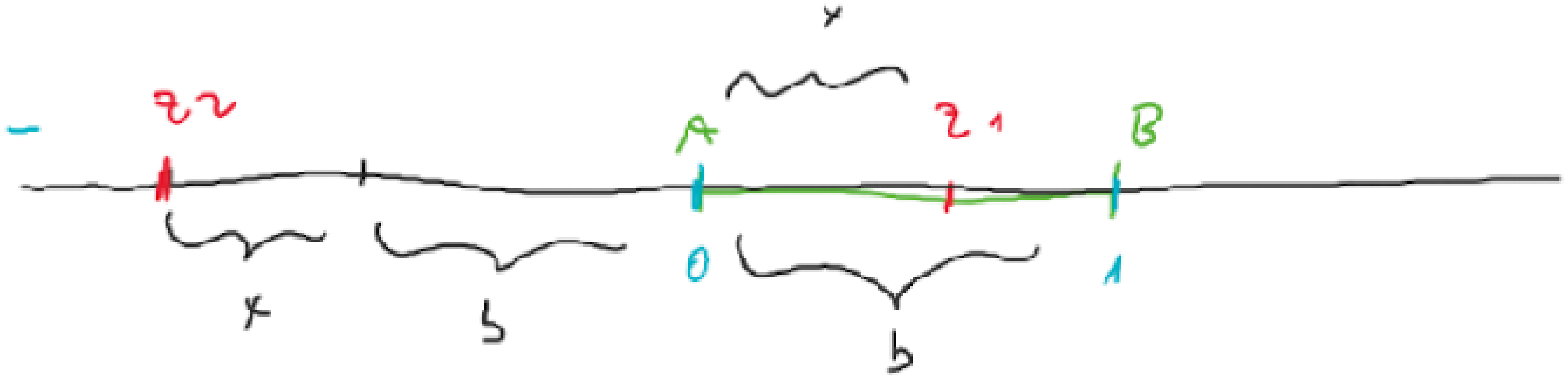
Pyth. věta



START $|AB| = 1$

1) $C : |AC| = 2 \rightsquigarrow |BC| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$!
2) $B : |BC| = \sqrt{5} - 1$
3) $E : |EC| = |ED| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(B) DRUHÝ KOŘEN A SOUVISLOSTI



$$x^2 + bx - b^2 = 0$$

z_1 ⟵ … $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$

z_2 ? … $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$

body ⟵ | ⟶ ℝ čísla

POZN (ZLATÝ ŘEZ)

- z_1 = zlatý řez AB $\iff$ $x : (b-x) = b : x$

  $\Updownarrow$? $\Updownarrow$ $\cancel{?}$ snadné cvičení!

- A = zlatý řez $z_2 B$ $\iff$ $(x+b) : (b) = (2b+x) : (x+b)$

  $\Updownarrow$

  ⋮

  atd.

geometrie ⟵ | ⟶ algebra

OBECNĚ (VIETE!)

$$x^2 + bx + c = 0$$

x_1, x_2 … kořeny

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= c \\ x_1 + x_2 &= -b \end{aligned}}\ !$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}$$

$$x_2 = -x_1 - b \ !$$

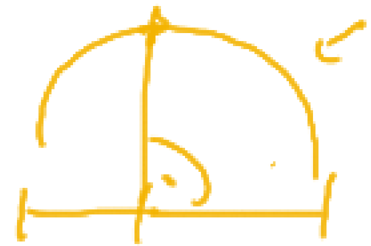
(c) SESTROJTE NAPŘ. $a\sqrt[3]{b}$, $\dfrac{a\sqrt{b}}{c}$, $\sqrt{a-b\sqrt{c}}$, ...

... vzhledem k a b c a 1 !

snadné

Thalet

+, − ... úsečky na přímce

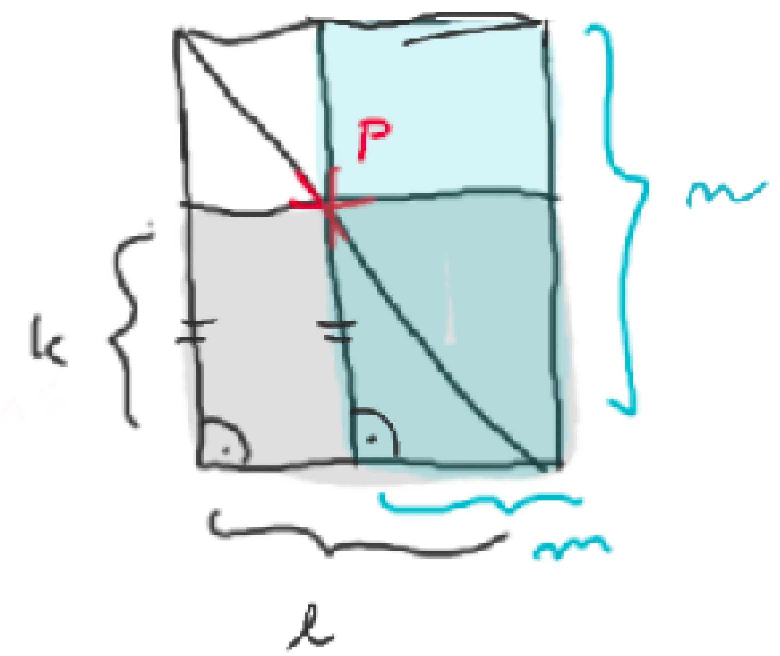


$\sqrt[2]{\ }$ ... Eukleid. věty (spec. Pyth...)

⇝ $\sqrt[4]{\ } = \sqrt{\sqrt{\ }}$, $\sqrt[8]{\ } = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\ }}}$ ✓, ALE: $\sqrt[6]{\ } = \sqrt[3]{\sqrt[2]{\ }}$ ✗

$\cdot$, $:$ ... OBSAHY, resp. PODOBNOSTI:

jediné dovolené operace!



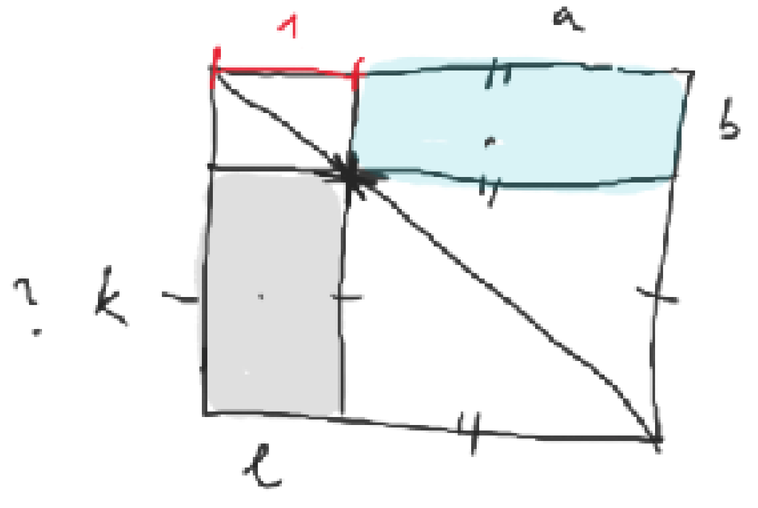
$\boxed{k \cdot l = m \cdot m} \iff \boxed{k : m = m : l}$

..., oboje lze realizovat MNOHA způsoby!

ad (c) "součiny, podíly"

NÁPAD OBSAHY

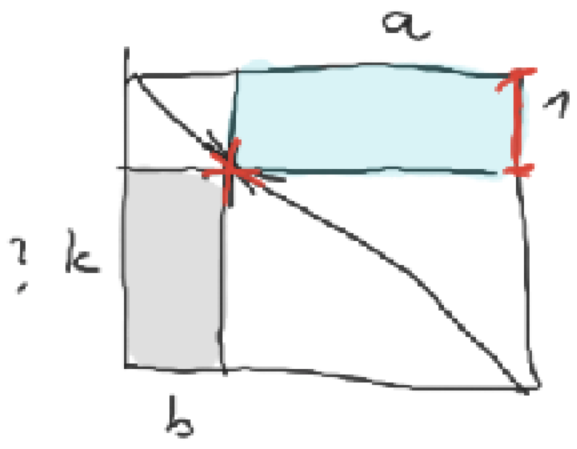
viz cvičení II.



$\rightsquigarrow \quad a \cdot b = k \cdot l$ (? , 1)

$k = a \cdot b$

jiná interpretace téhož tvrzení



$\rightsquigarrow \quad k \cdot b = a \cdot 1$

$k = \frac{a}{b}$

NÁPAD PODOBNOSTI

OBECNÉ SCHÉMA

1.) známé věci (1, a, b) na ramena lib. úhlu

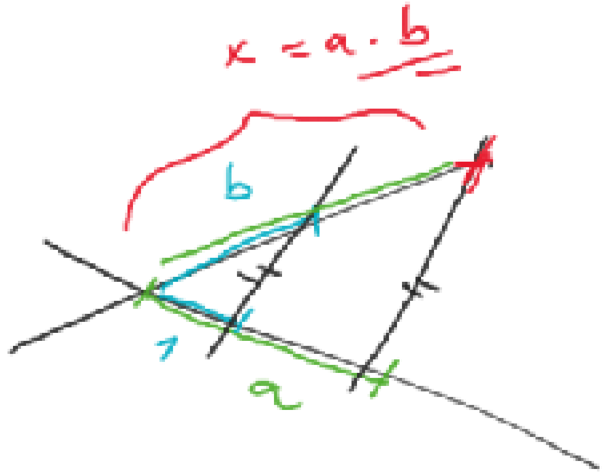
2) spoj. správné konce

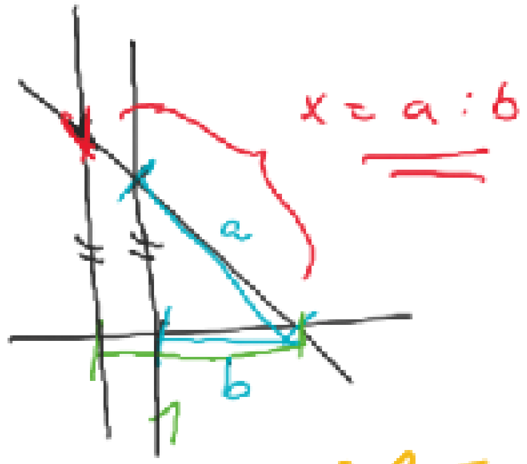
3) ROVNOBĚŽKA $\rightsquigarrow$ X

$x : a = b : 1$

$\Updownarrow$

$x = b \cdot a$ ✓





$x : 1 = a : b$ ✓

(1) POZN. K OBECNÉ KVADRATICKÉ ROVNICI

- $\pm a x^2 \pm b x \pm c = 0 \iff \pm x^2 \pm \frac{b}{a} x \pm \frac{c}{a} = 0$
  $a \neq 0$

- $x^2 + bx + c = 0$ má $\mathbb{R}$ kořeny $\iff D = b^2 - 4c \geq 0$
- kontrola D pomocí
  a) pomocí úseček .... $b^2 \; - \; 4c \; = \; ?$
  b) pomocí obsahů .... $b^2 \; - \; 4c \; = \; ?$
- zbytek např. $x = \frac{1}{2}\left(-b \pm \sqrt{D}\right)$ ....

- VIETOVY VZTAHY .... $\boxed{x^2 + bx + c} = (x - x_1)(x - x_2) \rightsquigarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = c \end{array}}$
- $\underline{\text{př.}}$ $x^2 - bx + c = 0$, $b, c > 0$

$x_1 + x_2 = b \longrightarrow$

$\longleftarrow$ Eukl. v o výšce
$x_1 \cdot x_2 = (\sqrt{c})^2 = c$ ✓