D) Zbývá projít poslední sjednocující pojem, a to pojem distribuční funkce $F(x)$, kterým bude přehled vysokoškolských nástrojů na popis psti dokonán.

A v jistém smyslu distribuční funkce není složitý pojem:

$F(x) = P(X \leq x)$ ... hodnota distribuční funkce F v bodě x je rovna psti, že veličinu X naměříme v intervalu $(-\infty; x\rangle$!!

O co se jedná? Distribuční funkce není nic jiného než

TEORETICKÁ RELATIVNÍ KUMULATIVNÍ ČETNOST, která pro rostoucí x neustále přičítá dílčí teoretické relativní četnosti, neboli dílčí psti.

JEN SI MUSÍME PAMATOVAT, že toto kumulování = přičítání dílčích pstí, se u diskrétní veličiny děje pomocí sumy a u spojité veličiny pomocí integrálu:

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k \leq x} p(k) & \text{diskr.} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt & \text{spoj.} \end{cases}}$$

prosím, pamatujte si, že $F(x)$ jako teoretická kumulativní relativní četnost

- nikdy nemůže klesat, vždy roste nebo stagnuje, stejně jako nám rostla nebo stagnovala hodnota relativních kumulativních četností v popisné statistice
- vždy nabývá (jako relativní četnost) hodnot pouze z intervalu $\langle 0; 1\rangle$

(tj. je to neklesající funkce, ale shora ohraničená konstantou $y = 1$)

Pozn.: 1) u spojité veličiny tedy mezi f, F existuje vztah známý z integrálního počtu: $\underline{F'(x) = f(x)}$

(užitečný, pokud známe F a chceme určit f)

2) také z integrálního počtu plyne následující vzorec, užitečný, pokud známe F a chceme spočítat

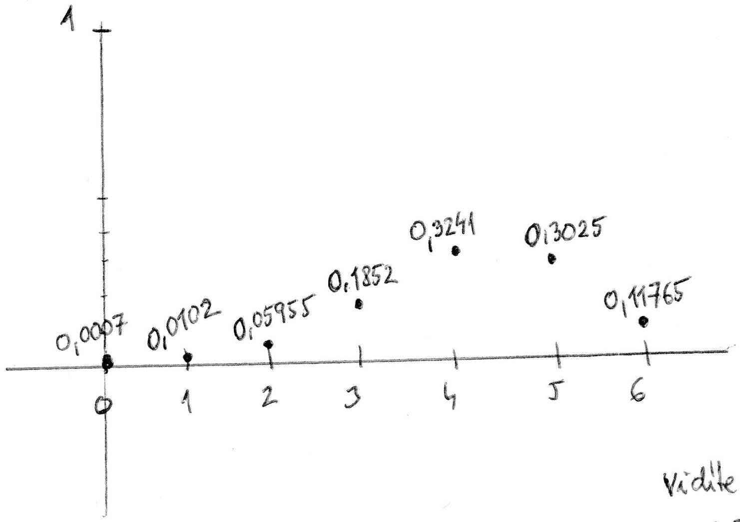
$$\boxed{P(X \in (a; b\rangle) = F(b) - F(a)}$$

→ ve spojitém případě vlastně Newton-Leibnizova formule: je nesmysl počítat psti integrací f, pokud známe F, protože F je vlastně výsledek integrálu, jen do něj dosadíme meze

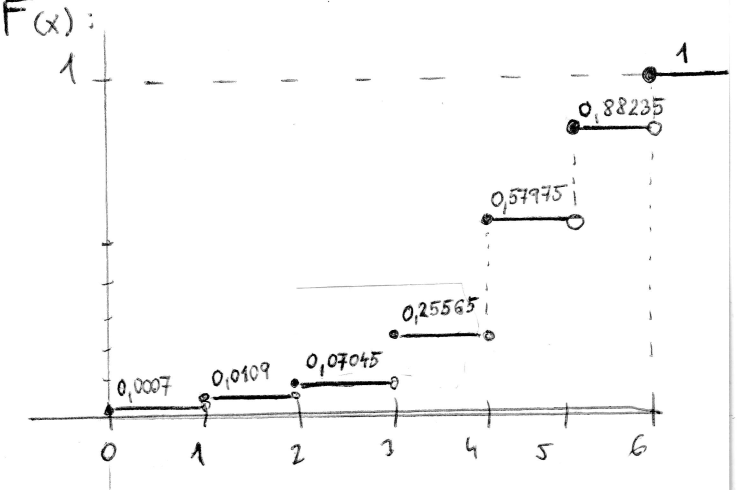
v diskrétním případě také platí (přesně!) aby to bylo úplně přesné, právě kvůli tomu je interval zleva otevřený

Ad př. 7.1 z předlohy : určete distribuční funkci F počtu tref z šesti hodů na koš

pstní fce $p(k)$:



$F(x)$:



Vidíte, že hodnoty pstní se kumulují, výška schodu v celočíselných hodnotách se rovná právě dílčí psti $p(k)$ v daném bodě k

Na daném intervalu $\langle k, k+1)$ se žádná pst nepřičte, tj. tam, kde $F(x)$ nic nepřičítá, zůstává konstantní

Ad př. 7.2 z předlohy : Určete distribuční funkci doby příchodu studenta vzhledem k začátku hodiny

Musíme vyjít ze vzorce hustoty

$$f(x) = \begin{cases} 0 \dots \text{ pro } x < -5 \\ 0{,}15 \dots \text{ pro } x \in \langle -5; 0) \\ -0{,}005x + 0{,}05 \dots \text{ pro } x \in \langle 0; 10\rangle \\ 0 \dots x > 10 \end{cases}$$

Budeme počítat integrací, tedy pro různé tvary vzorce f integrujeme různé funkce, tedy vzorec pro F bude podobně rozložitý:

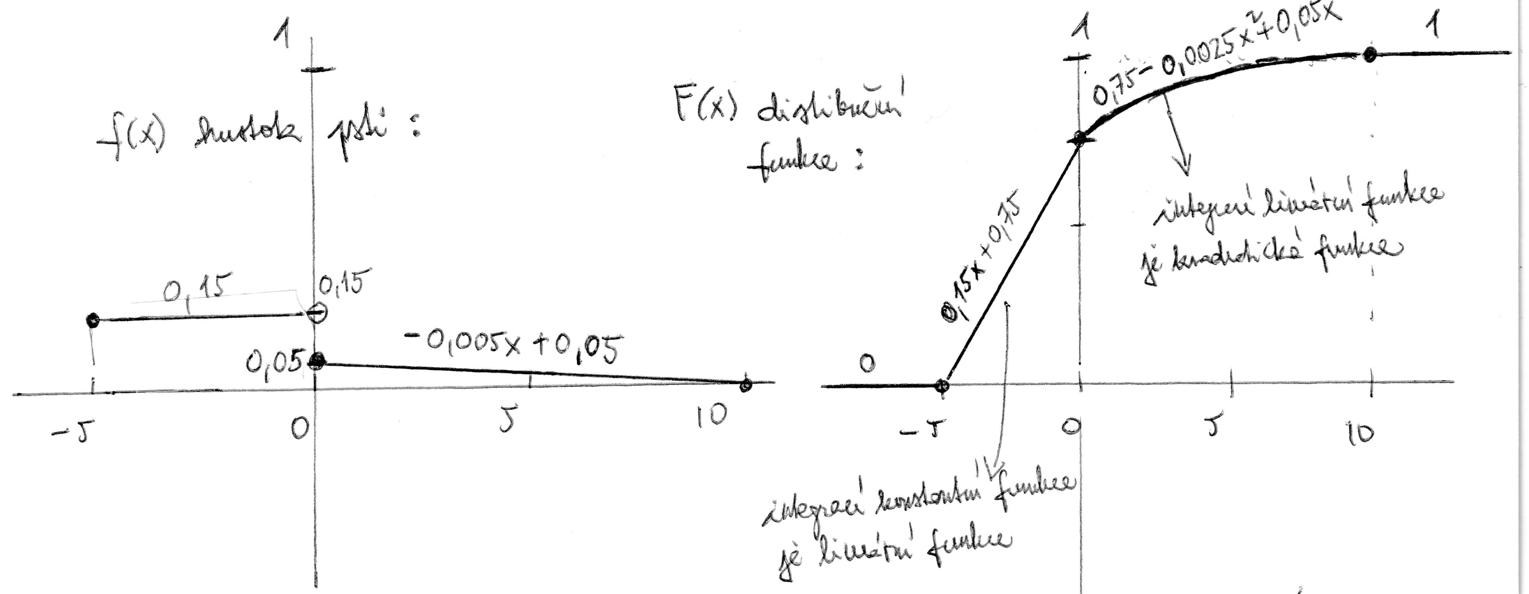
$$F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0 = \boxed{0} \dots \text{ pro } x < -5 \\ \int_{-\infty}^{x} f(t) = \int_{-\infty}^{-5} 0 + \int_{-5}^{x} 0{,}15 = 0{,}15(x+5) = \boxed{0{,}15x + 0{,}75} \dots \text{ pro } x \in \langle -5; 0) \\ \int_{-\infty}^{x} f(t) = \int_{-\infty}^{-5} 0 + 0{,}75 + \int_{0}^{x} (-0{,}005t + 0{,}05)\,dt = \boxed{0{,}75 - 0{,}0025x^2 + 0{,}05x} \dots \text{ pro } x \in \langle 0; 10\rangle \\ \int_{-\infty}^{x} f(t) = \int_{-\infty}^{-5} 0 + 0{,}75 + 0{,}25 + \int_{10}^{x} 0 = 0{,}75 + 0{,}25 = \boxed{1} \end{cases}$$

tento integrál si můžeme ušetřit, protože obsah toho celého obdélníčku známe... podívejte se na graf funkce f

můžeme si integraci ušetřit, protože obsah celého trojúhelníku známe pojem distribuční funkce u spojité veličiny je pro studenty velice náročný – myslí si, že integrací určitého integrálu musí vyjít číslo – ALE POZOR, PROMĚNNÁ X JE V HORNÍ MEZI INTEGRÁLU !! → výsledkem integrace je tedy opět často funkce proměnné x.

Musíme popsat nekonečně mnoho nakumulovaných hodnot, a toho dosáhneme pomocí proměnné x.

Zakreslíme ještě graf hustoty f(x) ze zadání a distribuční funkce F(x) z výsledku:



F(x) musí být u spojité veličiny SPOJITÁ, protože nikdy nekumulujeme skokem, ale pomocí nárůstu obsahu, tj. spojitě

Zbytek je na vás. Bylo by ideální, kdybyste ze skript BMA3stare.pdf vypočítali na straně 144–145 příklady 9.10

9.11

9.12

9.13

9.14

9.15

a na straně 166–167 příklady 10.3

$\boxed{10.5.}$ – viz poznámka na následující straně

10.6.

10.7., abyste se s těmi prezentovanými pojmy naučili trochu pracovat.

Výsledky téměř všech příkladů jsou na str. 248–251. Při dřívě se výsledky mi dříve neseděly, ale mělo by být už vše opraveno.

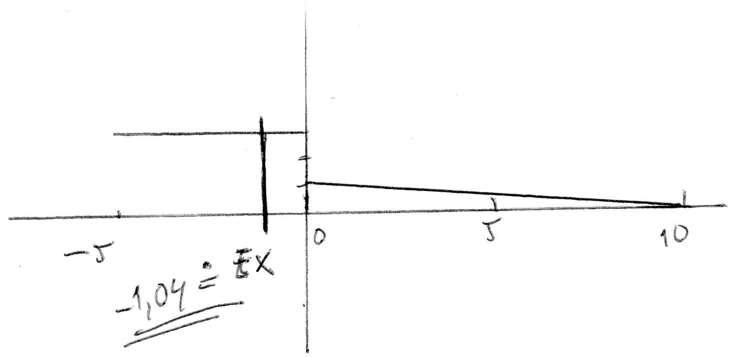
Poznámka 1) ještě k té střední hodnotě:

možná si někteří vzpomenete na střední funkční hodnotu z ANALÝZY 1, což je výška obdélníka ~~se~~ základnou $\langle a,b\rangle$, takže jeho obsah je stejný jako $\int_a^b f(t)\,dt$.

Ad př. 7.2. Dokonce byste měli tuto hodnotu velmi rychle vypočítat jako $\frac{1}{b-a}$, protože víte, že u hustoty platí $\int_a^b f(t)\,dt = 1$.

PROSÍM tato střední funkční hodnota nemá s pravděpodobnostní střední hodnotou náhodné veličiny vůbec nic společného. Sami vidíte, že $d = \frac{1}{10-(-5)} = \frac{1}{15}$, v příkladu 7.2 ovšem vyšlo $EX \doteq -1{,}04$.

Pravděpodobnostní střední hodnota spojité veličiny je $\int_a^b f(x)\cdot x\,dx$ a vztahuje se na osu x, nikoli na osu y:

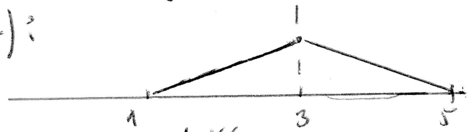


2) Dokonce ani neplatí fakt, že střední hodnota EX by musela ležet ve středu intervalu $\langle a,b\rangle = \Omega$.

Někdo by mohl EX v příkladu 7.1 z hodnot 0,1,2,3,4,5,6 určit jako 3. My jsme ovšem spočetli, že $EX = 4{,}2$.

3) Také často neplatí, že by $\int_a^{EX} f(t)\,dt = \frac{1}{2}$, tj. že by EX rozdělilo $\int_a^b f(x)$ tak, že oba obsahy $\int_a^{EX} f(t)\,dt$, $\int_{EX}^b f(t)\,dt$ jsou rovny $\frac{1}{2}$. Tento fakt někdy platí, ale jen pokud graf $f(t)$ je funkce symetrická osově vzhledem k přímce $x = EX$.

Např. pro hustotu $f(t)$:



by skutečně platilo $EX = 3$.

Ale např. v příkladu 7.2 z předchozího $\int_{-5}^{-1{,}666} f(t) \doteq \frac{1}{2}$, přesto $EX \doteq -1{,}04$, nikoli $-1{,}666$.

Přesně EX záleží jak na intervalu $\langle a,b\rangle$, tak na charakteru funkce f, oba tyto faktory vstupují do hry – tedy výsledek výpočtu EX lze někdy odhadnout, ale jen někdy!! →

tedy v příkladu 10.5 nemusíte nic počítat, z grafu funkce $f(t)$ lze odhadnout, že $EX = 0$, protože $f(t)$ je symetrická vzhledem k přímce $x=0$