

přednáška 09:  
**normální** rozdělení psti

## *Literatura v IS:*

Podrobněji viz vznikající text MA0008, přednáška 09.

# U normálního rozdělení:

iii)  $P(X \in (a; b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$  ... pro spojitou veličinu  
( $f(x)$  je hustota psti)

**Příklad: Náhodná veličina  $X$  měří výšku stromů v daném lese.  
Má normální rozdělení  $EX = 50$  m,  $DX = 25$ .**

Příklad: Náhodná veličina  $X$  měří výšku stromů v daném lese. Má normální rozdělení  $EX= 50$  m,  $DX= 25$ .

Vypočtete

a)  $P(X > 60)$

b)  $P(X \in (40; 50))$

c)  $P(X \leq 45)$

# 1) Nejjednodušší řešení: pomocí jazyka R

Vypočtete

a)  $P(X > 60)$  ....  $> 1 - F(60) = 1 - \text{pnorm}(60, \text{mean} = 50, \text{sd} = 5)$

b)  $P(X \in (40; 50))$  ..  $> F(50) - F(40) =$   
 $\text{pnorm}(50, \text{mean} = 50, \text{sd} = 5) - \text{pnorm}(40, \text{mean} = 50, \text{sd} = 5)$

c)  $P(X \leq 45)$  ....  $> F(45) = \text{pnorm}(45, \text{mean} = 50, \text{sd} = 5)$

## 2) Převodem $N_0(50,5)$ na normované normální rozdělení $N_0(0;1)$ :

**Věta:**  $X \sim N_0(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$  veličina  $U := \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N_0(0;1)$

Označme  $\Phi$  ... distribuční funkci veličiny  $U \sim N_0(0;1)$

**Postup výpočtu:**

1) převedeme  $X$ -hodnotu na  $U$ -hodnotu  $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$

2)  $P(X < c) = F(c) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{c-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right)$  ... a hodnoty funkce  $\Phi$  najdeme v tabulce.

## 2) Převodem $N(50,5)$ na normované normální rozdělení $N(0;1)$ :

Vypočtete

$$a) P\left(\frac{X-50}{5} > \frac{60-50}{5}\right) = P\left(U > \frac{60-50}{5}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{60-50}{5}\right) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,977 = 0,023$$

$$b) P(X \in (40;50)) = P(40 < X < 50) = P\left(\frac{40-50}{5} < \frac{X-50}{5} < \frac{50-50}{5}\right) = P(-2 < U < 0) = \Phi(0) - \Phi(-2) = 0,5 - (1 - \Phi(2)) = \Phi(2) - 0,5 = 0,977 - 0,500 = 0,477$$

$$c) P(X \leq 45) = P\left(\frac{X-50}{5} < \frac{45-50}{5}\right) = P(U < -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0,841 = 0,159$$

## B. Centrální limitní věta

Jestliže  $X_1, X_2, \dots, X_N$  jsou navzájem nezávislé veličiny, které mají všechny stejné rozdělení  $p_{st}$

(nemusí být normální, ale libovolné, jeho střední hodnota je  $E(X_i)=\mu$ , rozptyl  $D(X_i)=\sigma^2$ ),

Pak součtem těchto veličin je náhodná veličina  $Y=\sum_{i=1}^N X_i$  se střední hodnotou  $EY=N \cdot \mu$  a rozptylem  $DY=N \cdot \sigma^2$ , která má pro dostatečně velké  $N$  ( $N > 30$ ) normální rozdělení



## Důsledky:

*1) Řadu náhodných veličin lze popsat normální rozdělením, protože je lze chápat jako součet zhruba stejně velkých náhodných vlivů*

*Př: a) výška stromu v lese*

*b) Výsledek u zkoušky*

## Důsledky:

**2) Binomické rozdělení lze dobře aproximovat normálním rozdělením**

**$Bi(N, p)$  je vlastně součtem  $N$  alternativních rozdělení  $Alt(p)$ , tj. rozdělení, která jsou všechna stejná, mají stejnou střední hodnotu  $p$  a stejný rozptyl  $p(1-p)$**

**Tedy  $Bi(N, p)$  lze dobře aproximovat normálním rozdělením se střední hodnotou  $EY = N \cdot p$  a rozptylem  $DY = N \cdot p(1 - p)$**

## Příklad:

*Firma vyrábí balíčky ořechů po 200 ks, přičemž přibližně  $\frac{3}{4}$  objemu ořechů jsou burské  $\frac{1}{4}$  objemu jsou lískové ořechy. Tyto ořechy se dokonale promíchají, a pak teprve se sypou do balíčků.*

*Jestliže koupíme jeden balíček ořechů, jaká je pst, že počet lískových ořechů v něm je v intervalu  $\langle 47; 56 \rangle$  ?*

## výpočet:

a) Pomocí Bi (200, 1/4) ..... = 0,5684522

b) Pomocí No (200, 1/4) ..... = 0,524

c) Pomocí No (200, 1/4) s korekcí.. = 0,571942

Důvody pro korekci: a)  $Bi(4, 1/2) \dots p(1)+p(2)= 0,625$

*Tento příklad je celý spočítán třemi způsoby v textu MA008, v závěru přednášky 9.*

**Důvody pro korekci: b)  $N_0(4,1/2) \dots \int_1^2 f = 0,341 \dots$  chyba 30%**

**Důvody pro korekci: c)  $N_0(4,1/2) \dots \int_{0,5}^{2,5} f = 0,624 \dots$  chyba 0,1 %**