MA 0008 – CVIČENÍ

Břetislav Fajmon, Romana Hodková

Verze textu: prosinec 2021

Obsah

Úvod

Tento text, je doplňkovým textem k dalším dvěma textům „Ma008 přednáška“ a „Ma008 s využitím Excelu“.

Obsah předmětu je rozdělen na tři části:

- Cvičení 01-02: Popisná statistika.
- Přednáška 01-08, cvičení 03-08: Teorie pravděpodobnosti.
- Přednáška a cvičení 09-12: Úsudková statistika.

Tématům cvičení 01 a 02, tj. popisné statistice, se věnuje spíše text „Ma008 s využitím Excelu“. V tomto textu se budeme více věnovat cvičení 03 až 12. Pozor, na prověrce v polovině semestru bude jeden příklad se týkat i popisné statistiky, tj. ve cvičení 6 jsou uvedeny v rámci přípravy na prověrku i příklady, jejichž zvládnutí předpokládá některé znalosti z textu „Ma008 s využitím Excelu“.

Rád bych poděkoval Romaně Hodkové za přípravu a přepis v sázecím prostředí TEX příkladů do tohoto textu.

Břetislav Fajmon, leden 2022

1 Zpracování souboru měření – průměr

Viz text „Ma008 s využitím Excelu“.

2 Zpracování souboru měření – popisná statistika

Viz text „Ma008 s využitím Excelu“. Zde jen příklady na přípravu k prověrce:

Úloha 2.1 *Politický představitel učinil výzkum u* 77 *lidí o kvalitě své práce. Každý z dotázaných (cizím slovem se takovým lidem říká respondenti, protože to, co dělají je „respond“ – odpovídají) hodnotil číslem ze stupnice* 1 *až* 5*, kde* 1 = *hrozná kvalita práce,* 5 = *vynikající kvalita práce. Výsledky jsou v tabulce:*

2	1	3	3	2	1	3	4	2	1	4
1	4	1	5	3	4	1	1	2	1	2
2	3	1	1	1	2	1	3	4	4	5
1	4	1	4	4	4	2	4	2	3	5
3	1	1	1	5	5	3	2	5	5	3
4	1	3	4	4	3	3	4	3	3	1
4	5	2	3	5	5	4	5	3	4	4

Určete

a) rozdělení četnosti a rozdělení pravděpodobnosti kvality představitelovy práce;

b) střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku této kvality.

Úloha 2.2 *V případě spojité veličiny je situace trochu složitější, protože každá hodnota měření je většinou jiná než všechny ostatní*[1]*. V tabulce četností by tedy byl stejný počet sloupců jako je hodnot měření. To by nám žádnou přehlednou informaci nesdělilo. Zpravidla rozdělíme tedy nejprve reálnou osu na několik (7 až 10) podintervalů (většinou stejné délky) a provedeme tzv. intervalové rozdělení četností, kde četnosti* $c(\nu_i)$ *udávají, kolik hodnot měření padlo do intervalu obsahujícího hodnotu* ν_i *(tato hodnota je zpravidla středem daného intervalu).*

Uvažujme tento příklad: byla získána data (měřeno v sekundách od okamžiku $t = 0$*) udávající okamžiky, kdy kolem určitého místa projíždělo auto - viz tabulka (čtená po řádcích):*

1,5	3,9	7,3	13,7	17,4	22,2	24,7	30,2	30,5	31,2
41,9	42,3	44,5	61,9	62,4	64,1	73,4	81,4	86,1	92
92,7	106,3	111,5	112,1	113	118,9	122,2	122,4	122,6	

[1] Někdy se tato situace, že téměř každá naměřená hodnota je jiná než ty ostatní, objeví i u rozdělení diskrétního – pak postupujeme obdobně a provádíme též intervalové rozdělení četností, i když naměřené hodnoty jsou diskrétní, např. ikdyž to jsou pouze přirozená čísla.

Řekněme, že nás z jistého důvodu zajímá doba mezi dvěma po sobě jdoucími průjezdy auta – příslušné hodnoty této veličiny (označme ji třeba X) získáme odečtením vždy dvou po sobě jdoucích okamžiků průjezdu:

1,5	2,4	3,4	6,4	3,7	4,8	2,5	5,5	0,3	0,7
10,7	0,4	2,2	17,4	0,5	1,7	9,3	8,0	4,7	5,9
0,7	13,6	5,2	0,6	0,9	5,9	3,3	0,2	0,2	

Nyní rozdělíme reálnou osu na třídy četností + vybereme reprezentanty tříd (většinou středy tříd, až na krajní intervaly, které mají (buď jeden nebo oba) nekonečnou délku):

interval (=třída)	$\langle 0;3)$	$< 3;6)$	$< 6;9)$	$< 9;12)$	$< 12;15)$	$< 15;\infty)$
reprezentant třídy	1,5	4,5	7,5	10,5	13,5	16,5

a) *Proveďte intervalové rozdělení četností.*

b) *Spočtěte průměr a rozptyl naměřených hodnot na základě přesných hodnot měření.*

c) *Spočtěte průměr a rozptyl přibližně – pomocí četností tříd a reprezentantů tříd (místo různých x_i ve stejné třídě vezměte daného reprezentanta).*

Úloha 2.3 *Četnosti měření hodnot x_i jsou dány v tabulce:*

x_i	n_i
1	2
3	5
5	7
6	10
8	6
10	3

a) *Určete kumulativní relativní četnosti, dolní kvartil a* 0,57−*kvantil těchto hodnot.*

b) *Vypočtěte průměr a rozptyl zadaných hodnot.*

Úloha 2.4 *Intervalové rozdělení četností cen bytů za 1 metr čtvereční v ČR je dáno v tabulce:*

$\langle x_i; x_{i+1}\rangle$	n_i
$\langle 23100; 27600\rangle$	10
$\langle 27600; 32100\rangle$	7
$\langle 32100; 36600\rangle$	4
$\langle 36600; 41100\rangle$	3
$\langle 41100; 45600\rangle$	3
$\langle 45600; 50100\rangle$	2

a) *Určete kumulativní relativní četnosti, dolní kvartil a* 0,67−*kvantil těchto hodnot.*

b) *Odhadněte průměr a rozptyl zadaných hodnot.*

Úloha 2.5 *Byla získána data reprezentující cenu za metr čtvereční nového bytu v ČR:*

45061	*41258*	*39076*	*35062*	*33 653*	*31235*	*29031*	*25436*
25078	*24567*	*22768*	*22425*	*22215*	*22083*	*21794*	*21456*
20894	*20319*	*20162*	*19221*	*18200*	*17332*	*17327*	*17217*
16369	*16343*	*14897*	*14546*	*14316*	*13829*	*12975*	*12761*

a) *Určete intervalové rozdělení četností těchto hodnot.*

b) *Určete kumulativní relativní četnosti, dolní kvartil a* 0,67*−kvantil těchto hodnot.*

Úloha 2.6 **a)** *Většina dětí ve třídě A má velké problémy s matematikou, kdežto ve třídě B téměř nikdo. Přesto je průměrný výsledek počtu bodů na testech v obou třídách stejný. Jak je to možné?*

b) *Průměrný počet bodů na prověrkách u studenta S_1je stejný jako u studenta S_2. Přesto paní učitelka říká, že student S_1 je objektivně lepší než student S_2. Jak je to možné?*

Úloha 2.7 *Výsledky bodů na prověrce od dvaceti studentů jsou*

$$3, 5, 8, 2, 4, 10, 11, 4, 5, 7, 2, 4, 8, 8, 10, 1, 5, 7, 8, 2.$$

a) *Určete medián a kvartilové rozpětí těchto hodnot.*

b) *Vypočtěte průměr a odchylku počtu bodů.*

Řešení některých příkladů najdete na konci textu v oddílu 13.2.

3 Klasická a geometrická pst

Úloha 3.1 *Při 500 hodech krabičkou zápalek 385krát krabička dopadla naplocho, 82krat na bok a 33krát na výšku. Odhadněte pravděpobnosti jevu*

a) *krabička padne naplocho*

b) *krabička padne na bok*

c) *krabička padne na výšku*

ŘEŠENÍ

a) *krabička padne naplocho* $\frac{385}{500}$

b) *krabička padne na bok* $\frac{82}{500}$

c) *krabička padne na výšku* $\frac{33}{500}$

Úloha 3.2 *V osmi dodávkách určitého druhu výrobku byla část výrobků vadných. Odhadněte pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek z další dodávky bude vadný.*

ŘEŠENÍ
Celkový počet vadných součástek/celkový počet dodávek NEBO postupně vypočítám pst jednotlivých dodávek a potom je sečtu

Úloha 3.3 *Z osmnácti lístků označených čísly 1 - 18 vytáhneme náhodně jeden lístek. Jaká je pravděpodobnost, že na vytažením lístku bude:*

a) *sudé číslo*

b) *číslo dělitelné 3*

c) *prvočíslo*

d) *dělitelné 6*

ŘEŠENÍ

a) *sudé číslo n=18, m=9 (2,4,6,8,10,12,14,16,18)* $P(A) = \frac{9}{18} = 0,5 = 50\%$

b) *číslo dělitelné 3 n=18, m=6 (3,6,9,12,15,18)* $P(A) = \frac{6}{18} = 0,33 = 33\%$

c) *prvočíslo n=18, m=7 (2,3,5,7,11,13,17)* $P(A) = \frac{7}{18} = 0,389 = 38,9\%$

d) *dělitelné 6 n=18, m=3 (6,12,18)* $P(A) = \frac{3}{18} = 0,166 = 16,6\%$

Úloha 3.4 *Jaká je pravděpodobnost že při hodu dvěma kostkami (červené a modré) padne:*

a) *součet 8*

b) *součet, který je dělitelný pěti*

c) *součet, který bude sudý*
ŘEŠENÍ

a) součet 8, možnosti - 2,6;6,2;4,4;5,3;3,5
n=36, m=5 $P(A) = \frac{5}{36} = 0,139 = 13,9\%$

b) součet, který je dělitelný pěti,
možnosti - 5,5;1,4;4,1;2,3;3,2;4,6;6,4 (součet bude 5 nebo 10)
n=36, m=7 $P(A) = \frac{7}{36} = 0,194 = 19,4\%$

c) součet, který bude sudý,
možnosti - 1,5;5,1...4,4;5,5;6,6
n=36, m=18 $P(A) = \frac{18}{36} = 0,5 = 50\%$

Úloha 3.5 *Hazardní hráč hází třemi kostkami, položil G. Galileimu otázku: "Mám vsadit na součet 11 nebo součet 12?"*
Co mu Galilei odpověděl?

ŘEŠENÍ

a) pst součet 11
n=V(3,6)=6*[2]*=216*
(6,4,1)...P(3)=3!=6
(6,3,2)...P(3)=3!=6
(4,5,2)...P(3)=3!=6
(5,5,1)...$P*2,1(3) = \frac{3!}{2!} = 3$
(3,3,5)...$P*2,1(3) = \frac{3!}{2!} = 3$
(4,4,3)...$P*2,1(3) = \frac{3!}{2!} = 3$
m=27
$P(A) = \frac{27}{216} = 0,125 = 12,5\%$

b) pst součet 12
n=V(3,6)=6*[3]*=216*
(6,5,1)...P(3)=3!=6
(6,4,2)...P(3)=3!=6
(5,4,3)...P(3)=3!=6
(3,3,6)...$P*2,1(3) = \frac{3!}{2!} = 3$
(5,5,2)...$P*2,1(3) = \frac{3!}{2!} = 3$
(4,4,4)...$P*3(3) = \frac{3!}{3!} = 1$
m=25
$P(B) = \frac{25}{216} = 0,116 = 11,6\%$

G.Galilei doporučil vsadit na součet 11, protože $P(11) > P(12)$.

Úloha 3.6 *Uvažujeme hod dvěma kostkami. Jev A spočívá v tom, že padla alespoň jedna šestka, jev B spočívá v tom, že součet čísel je roven 6, a jev C spočívá v tom, že součet čísel je menší než 7.*

[2] 3
[3] 3

A...padne aspoň jedna šestka
B...součet hodů je roven 6
C...součet čísel je menší než 7

a) *Zapište jev B pomocí elementárních jevů. Předpokládejte, že kostky umíme rozlišit.*

b) *Popište slovně jev C'.*

c) *Jaký je vztah mezi jevy A a C'?*

d) *Co můžeme říct o jevech A a B?*

e) *Jaký je vztah mezi jevy B a C?*

f) *Popište slovně jev C-B.*

ŘEŠENÍ

a) *B=(1,5,),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)*

b) *padne součet alespoň 7*

c) $A \subset C'$

d) *jsou neslučitelné*

e) $B \subset C$

f) *padne součet menší než 6*

Úloha 3.7 *V osudí jsou 2 bílé a 4 černé koule. Postupně losujeme koule z osudí, dokud není prázdné, vytažené koule nevracíme zpět.*

a) *Kolik je možných výsledků losování za předpokladu, že koule stejné barvy neumíme rozlišit?*

b) *Kolik výsledků je příznivých jevu A, který spočívá v tom, že v prvním tahu byla tažena bílá koule?*

c) *Kolik výsledků je příznivých jevu B, který spočívá v tom, že obě bílé koule byly taženy během prvních tří tahů?*

d) *Popište slovně jev B'?.*

e) *Kolik výsledků je příznivých jevu C, který spočívá v tom, že poslední tažená koule je černá?*

f) *Jaký je vztah mezi jevy B a C?*

g) *Popište slovně jev* $A \cap B' \cap C$.

ŘEŠENÍ

a) *15 (jednotlivé navzájem odlišné výsledky lze popsat např. pomocí čísel tahů, ve kterých byla vybrána bílá koule - to jsou dvoučlenné kombinace ze šestiprvkové množiny)*

b) *5 (tyto výsledky si můžeme představit jako uspořádané šestice (B,B,C,C,C,C),(B,C,B,C,C,C),(B,C,C,B,C,C),(B,C,C,C,B,C),(B,C,C,C,C,B))* *c) 3 (tyto výsledky si můžeme představit jako uspořádané šestice (B,B,C,C,C,C),(B,C,B,C,C,C),(C,B,B,C,C,C)*

d) „během prvních tří tahů byla vylosována nejvýše jedna bílá koule”nebo také ”v posledních třech tazích byla tažena alespoň jedna bílá koule“

e) 10 (obě bílé koule musí být taženy v prvních pěti tazích, tj.jde o dvoučlenné kombinace z pětiprvkové množiny)

f) $B \subset C$

g) bílé koule byly taženy v prvním a čtvrtém nebo v prvním a pátém tahu

Úloha 3.8 *Závod vyrábí určitou součástku, která je podrobena třem různým zkouškám. Jev A spočívá v tom, že náhodně vybraná součástka obstojí při první zkoušce, jev B v tom, že obstojí ve druhé zkoušce, a jev C v tom, že obstojí ve třetí zkoušce. Vyjádřete v množinové symbolice (tj.pomocí jevů A,B,C), že součástka obstojí:*

a) jen v první zkoušce,

b) v první a ve druhé zkoušce, ale ne ve třetí zkoušce,

c) právě v jedné zkoušce,

d) alespoň v jedné zkoušce,

e) právě ve dvou zkouškách,

f) alespoň ve dvou zkouškách,

g) ve všech třech zkouškách,

h) nejvýše ve dvou zkouškách.

ŘEŠENÍ

a) $A \cap B' \cap C'$

b) $A \cap B \cap C'$

c) $(A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)$

d) $(A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C) \cup (A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C) = A \cup B \cup C$

e) $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$

f) $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$

g) $A \cap B \cap C$

h) $(A' \cap B' \cap C') \cup (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C) \cup (A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) = (A \cap B \cap C)'$

Úloha 3.9 *Zapomněli jste čtyřmístný PIN ke své platební kartě. Pamatujete si, že obsahoval třináctku, tj. jedničku a trojku těsně za sebou (nejsme si však jisti, zda uspořádaná dvojice těchto čísel byla na začátku, uprostřed nebo na konci PINu). Pamatujeme si ještě to, že zbývající dvě čísla nebyla stejná. S jakou pravděpodobností můžeme PIN uhádnout?*

ŘEŠENÍ
$\frac{1}{269}$ *?? v prezentaci je* $\frac{1}{168}$

Úloha 3.10 *Hodíme čtyřikrát desetikorunou. S jakou pravděpodobností padne dvakrát líc a dvakrát rub?*

ŘEŠENÍ
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = 0,0625 = 6,25\%$

Úloha 3.11 *Hráč pokeru (varianta Texas Hold'em) dostane 2 karty z dokonale rozmíchaného balíčku 52 karet. S jakou pravděpodobností bude mít v ruce*

a) eso a krále

b) dvě esa

c) pár, tj. dvě karty stejné hodnoty?
(Pro porovnání vyjádřete výsledky v procentech a zaokrouhlete na dvě desetinná místa.)

ŘEŠENÍ

a) 1,21%

b) 0,45%

c) 5,88%

Úloha 3.12 *Obrazovka radaru je kruhová o poloměru r Při zapnutí se na ní náhodně objeví letící bod znázorňující letící objekt.*
Určete pravděpodobnost, že svítící objekt bude od středu obrazovky vzdálen méně než o $r/2$

ŘEŠENÍ !!!!

Úloha 3.13 *Tyč délky* 7*m je náhodně rozřezána na tři kusy.*
Jaká je pravděpodobnost, že z těchto tří částí lze sestavit trojúhelník?

ŘEŠENÍ !!!!!

Úloha 3.14 *Stroj vyrábí skleněné trubičky o délce 1 m. Rozlomí-li s trubička kvůli poruše materiálu na dva kusy, s jakou pstí bude jeden z nich delší než 80 cm, a bude jej tedy možno dále využít?*
(předpokládejte, že trubička se může zlomit na kterémkoli místě se stejnou pstí)

ŘEŠENÍ !!!!

Úloha 3.15 *Vedoucí prodejny nábytku očekává během dne dodávku zboží od dvou různých dodavatelů. Od 1. dodavatele byl informován, že auto může přijet kdykoliv mezi 9 hod a 12 hod, auto druhého dodavatele může přijet kdykoliv mezi 9 hod a 14 hod.*

Přejímka zboží od kteréhokoli dodavatele trvá hodinu. S jakou pstí se stane, že auto, které přijede později, bude muset čekat na dokončení přejímky zboží z prvního auta?

ŘEŠENÍ !!!

3.1 Klasická pst

Úloha 3.16 *Z 9 přístrojů jsou dva poruchové. Zákaznická firma zakoupí tři přístroje náhodně vybrané z daných devíti – určete pst, že nanejvýš jeden z nich je poruchový.*

Úloha 3.17 *Z 10 přístrojů jsou tři poruchové. Zákaznická firma zakoupí čtyři přístroje náhodně vybrané z daných desíti – určete pst, že minimálně dva z nich jsou poruchové.*

Úloha 3.18 *V osudí je pět kuliček bílých a pět černých. Náhodně vybereme (nevracíme zpět) šest z nich. Jaká je pst, že aspoň dvě kuličky z vybraných budou bílé?*

Úloha 3.19 *Ze skupiny 7 chlapců a 5 dívek náhodně vybereme pětici dětí. Jaká je pst, že mezi vybranými bude nanejvýš jedna dívka?*

Úloha 3.20 *Ze skupiny 8 chlapců a 7 dívek náhodně vybereme šest dětí. Jaká je pst, že mezi vybranými bude aspoň pět dívek?*

Úloha 3.21 *Na šachovnici 8x8 náhodně na dvě různá políčka umístíme dvě věže, bílou a černou. S jako pstí se navzájem ohrožují? (pravidla šachu: každá věž ohrožuje nejbližší figuru v daném sloupci i v dané řadě, ve kterých se věž nachází.)*

Úloha 3.22 *Revizor ze zkušenosti ví, že zhruba ve čtvrtině tramvají najde při kontrole černého pasažera. Kolik tramvají musí zkontrolovat, aby měl aspoň 95%-ní jistotu, že alespoň jednoho černého pasažera objeví? (nápověda: při n tramvajích nejlépe vypočteme pst, že aspoň v jedné z nich bude nalezen černý pasažer, jako 1 minus pst, že černý pasažer nebude nalezen v žádné tramvaji).*

Úloha 3.23 *Student se stihl naučit jen 15 otázek z 20 a u ústní části zkoušky si vybírá tři z nich. Jaká je pst, že aspoň dvě z těchto tří budou ty, které umí?*

Úloha 3.24 *Jaká je pst, že v náhodném výběru tří karet z balíčku 52 karet (třináct karet v každé barvě) bude aspoň jedno eso nebo aspoň jeden král?*

3.2 Geometrická pst

Úloha 3.25 *Vedoucí prodejny nábytku očekává během dne dodávku zboží od dvou různých dodavatelů. Od prvního dodavatele byl informován, že auto může přijet kdykoli mezi 9. a 12. hodinou, druhý dodavatel přijede kdykoli mezi 9. a 14. hodinou. Přejímka zboží od kteréhokoliv dodavatele trvá půl hodiny. S jakou pstí bude muset auto, které přijede později, čekat na dokončení přejímky zboží u auta, které přijelo dřív?*

Úloha 3.26 *Dva lidé se dohodli, že se setkají na stanoveném místě mezi 18:00 h. a 18:45 h. Ten, kdo přijde první, počká na druhého 30 minut (déle čekat nebude a půjde pryč). Určete pravděpodobnost toho, že se setkají, je-li příchod obou kdykoliv ve stanoveném intervalu stejně možný.*

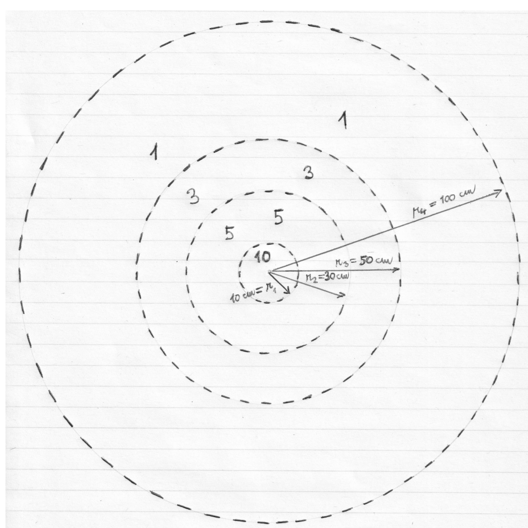
Úloha 3.27 *Ve čtverci* $\langle 0; 8\rangle \times \langle 0; 8\rangle$ *se náhodně rozsvítí bod o souřadnicích* $x; y$. *Určete pst, že platí* $y \leq x^3$.

Úloha 3.28 *Krychle má všechny stěny obarvené. Rozřežeme ji na 1000 stejných krychliček a ty pečlivě promícháme. Vybereme-li náhodně jednu krychličku, s jakou pstí bude mít právě dvě stěny obarvené?*

Úloha 3.29 *Student Adam přijde na konzultaci ke svému vedoucímu bakalářské práce někdy mezi osmou a desátou, student Jan někdy mezi osmou a jedenáctou. Oba mají stejného vedoucího a lze očekávat, že doba každé konzultace bude asi 30 minut.*

Předpokládejte, že každý okamžik příchodu je stejně možný jako ty ostatní, ve studenty vymezených intervalech. Vyčíslete pst, že některý ze studentů bude nějakou dobu čekat, protože vyučující bude mít zrovna schůzku s tím druhým studentem.

Úloha 3.30 *Všechny zásahy do terče o poloměru* 100 *cm jsou pro začínajícího střelce z luku stejně pravděpodobné. Jaká je pst, že svým prvním výstřelem do terče dosáhne pěti nebo deseti bodů? (poloměry jednotlivých hranic oblastí viz obrázek)*



Úloha 3.31 *Hráči s petangovými koulemi trénují, zda koulením po zemi trefí jistý určený bod ve vzdálenosti deset metrů. Umístíme-li do daného bodu souřadnou osu kolmo na směr házení, všechny vrhy na tento cíl procházejí pásem* -30 *cm až* 30 *cm. Na začátku jsou hráči nezkušení a všechny dopady na osu v rozmezí* -30 *cm až* 30 *jsou stejně pravděpodobné.*

Označme A interval -10 *cm až* 10 *cm na měřicí ose, B oblast* $(-20; -10) \cup (10; 20)$ *cm na měřicí ose, C oblast* $(-30; -20) \cup (20; 30)$ *cm na měřicí ose.*

Jaká je šance, že náhodný netrénovaný hráč se trefí do oblasti A?

Úloha 3.32 *Po určité době tréninku v situaci předchozího příkladu se hráči strefují do oblasti A s pstí* 0,7*, do oblasti B s pstí* 0,20 *a do oblasti C s pstí* 0,10*. Když vytrénovaný hráč vrhne koulí pětkrát, jaká je šance, že aspoň čtyři z těchto pěti hodů projdou oblastí A? (nápověda: vlastně už se o příklad na geometrickou pst nejedná, pouze je zde návaznost na předchozí příklad; nyní potřebujete spočítat tzv. binomické neboli Bernoulliho psti, viz následující cvičení)*

Řešení některých příkladů najdete na konci textu v oddílu 13.3.

4 Věta o součtu a součinu pstí, podmíněná pst

Úloha 4.1 *Je-li objednávka přijata na formuláři nebo patří-li podle finančního kritéria do prioritní skupiny, dostane kupující jako bonus malý dárek. Určeme pravděpodobnost jevu C, že náhodně vybraná objednávka bude mít nárok na bonus.*

ŘEŠENÍ
Objednávky, u kterých má zákazník nárok na malý dárek, jsou uvedeny v předposledním řádku a v předposledním sloupci tabulky.
Jejich celkový počet je roven $1497 + 230 + 86 + 14 + 49 + 13 = 1889$*. Proto je hledaná pravděpodobnost rovna* $P(C) = \frac{1889}{4000} = 0{,}47225$ *tj.* 47,225%

Možná vás napadlo, proč jsme při určování celkového počtu těchto objednávek místo zdlouhavého sčítání šesti čísel z vnitřní části tabulky prostě nesečetli celkový počet objednávek na formuláři a celkový počet prioritních objednávek. Takové zjednodušení by bylo chybné, protože $1826 + 76 = 1902$ *se nerovná 1889.*
Problém je v tom, že při uvedeném postupu počítáme prioritní objednávky přijaté na formuláři dvakrát.
Skutečně: $1902 - 1889 = 13$.
Tato poznámka úzce souvisí s následující důležitou úvahou. Jev C je sjednocením dvou jevů: jevu F, že objednávka dojde na formuláři, a jevu R, že má prioritní velikost. Je tedy $C = F \cup R$. Bylo by však chybné použít vzorec pro sčítání pravděpodobností neslučitelných jevů, protože jevy F a R se nevylučují.

Skutečně: $P(C) = \frac{1889}{4000} = 0,47225 \neq P(F) + P(R) = \frac{1826}{4000} + \frac{76}{4000} = 0{,}4755.$
Abychom dostali dprávný výsledek, musíme od součtu pravděpodobností jevů F a R odečíst pravděpodobnist jejích průniku,
tj. $P(C) = P(F) + P(R) - P(F \cap R) = \frac{1826}{4000} = \frac{76}{4000} - \frac{13}{4000} = 0{,}47225.$
Na tomto příkladu jsme si odvodili velmi důležitý vzorec, který přidáme do našeho seznamu.

Úloha 4.2 *Určete pst toho, že náhodně vybrané letadlo, které se toho dne vyskytovalo aspoň chvíli na letišti nebo let dráze, na něm také zůstalo přes noc*
Ráno bylo na letišti 17 letadel, z nichž během dne odletělo 15 letadel, ale tři z nich se zase na letiště vrátila. Toho dne přiletělo celkem 32 letadel a odletělo jich celkem 28.

Každé letadlo bylo toho dne na dráze letiště nejvýš dvakrát (= jen odletělo, jen přiletělo, nebo ten den přiletělo i odletělo, nebo ten den odletělo a přiletělo zpět).

Návod: nakreslete si množiny B(=bylo z předešlého dne), P(=přiletělo), S(=odletělo, startovalo) v obecné poloze (Vennův diagram) a zjistěte, v které části množin se nachází kolik prvků

ŘEŠENÍ
$P(A) = \frac{2+3+16}{46} = 0,4565217$

Úloha 4.3 *120 studentů skládalo tři zkoušky. Na základě informací níže určete pst toho, že náhodně vybraný stud z této skupiny složil pouze 3.zkoušku 120 studentů skládalo tři zkoušky. Přitom deset procent studentů nesložilo ani jednu z nich. Nebyl nikdo, kdo by složil zkoušku jen z druhého předmětu. Devět studentů z něj složilo úspěšně zkoušku, leč pro změnu neprospělo z prvního předmětu. 47 studentů složilo ze tří zkoušek dvě. 33 studentů nevyhovělo z třetího předmětu. 56 studentů složilo úspěšně zkoušku ze druhého i třetího předmětu, zato však 20 studentů neobstálo ani u jednoho z nich.*
(úloha vyžaduje i logiku: které info vzít nejdřív a které potom?)

ŘEŠENÍ
$P(Z3 - Z1 - Z2) = \frac{6}{120} = 0,05$

Úloha 4.4 *Tři lidé si v šatně divadla uschovali klobouk. Šatnářka po přestavení vydává klobouky náhodně.*
Jaká je pravděpodobnost, že aspoň jedna osoba dostane klobouk správně?

Návod: označte S1 ... první člověk dostane správně klobouk
S2 ... druhý člověk dostane správně klobouk
S3 ... třetí ...

Úloha 4.5 *V dodávce zboží je* 50 *matic a* 150 *šroubů. Polovina matic a polovina šroubů je poškozena.*
Jestliže náhodně vybereme jednu součástku, jaká je pravděpodobnost, že to bude matice nebo poškozená součástka?

ŘEŠENÍ
$62,5\%$

Úloha 4.6 *Při zkoušce si student náhodně vybere* 3 *ze* 30 *otázek. Aby zkoušku úspěšně absolvoval, musí správně odpovědět aspoň dvě z nich.*
Jaká je pst, že student, který umí jen 20 *otázek, absolvuje úspěšně zkoušku?*

ŘEŠENÍ

$P(A) = P(\textit{umí právě dvě}) + P(\textit{umí všechny}) = 0,4680 + 0,2808 = 74,88\%$ $P(\textit{složí zkoušku}) = \frac{\binom{20}{2}\cdot\binom{10}{1}}{\binom{30}{3}} + \frac{\binom{20}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{20}{30}\cdot\frac{19}{29}\cdot\frac{10}{28} + \frac{20}{30}\cdot\frac{10}{29}\cdot\frac{19}{28} + \frac{10}{30}\cdot\frac{20}{29}\cdot\frac{19}{28} + \frac{20}{30}\cdot\frac{19}{29}\cdot\frac{18}{28}$

Úloha 4.7 *V sáčku je 30 kuliček, z toho je 8 kuliček bílých, 10 modrých a 12 červených. Jaká je pst, že ze sáčku vytáhneme tři kuličky stejné barvy?*

ŘEŠENÍ

$\frac{\binom{8}{3}+\binom{10}{3}+\binom{12}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{3}{30}\cdot\frac{7}{29}\cdot\frac{6}{28} + \frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}\cdot\frac{8}{28} + \frac{12}{30}\cdot\frac{11}{29}\cdot\frac{10}{28}\ 9,75\%$

Úloha 4.8 *V loterii bylo vydáno 1000 losů, z nich 100 vyhrává. S jakou pravděpodobností získáte aspoň jednu výhru, koupíte-li si*

a) *Jeden los?*

b) *Pět losů?*

c) *Deset losů?*

d) *Dvacet losů?*

ŘEŠENÍ

a) 10%

b) $1 - \frac{\binom{900}{5}}{\binom{1000}{5}} = 41,02\%$

c) $1 - \frac{\binom{900}{10}}{\binom{1000}{10}} = 65,31\%$

d) $1 - \frac{\binom{900}{20}}{\binom{1000}{20}} = 88,10\%$

Úloha 4.9 *Prodejce automobilů se specializuje na dvě značky, označme je H a L. Pro prodané vozy zajišťuje záruční opravy. Každá oprava je klasifikována podle typu odstraňovaného problému a podle značky vozu. Záznamy o počtech oprav za poslední rok jsou shrnuty v následující tabulce:*

a) *S jakou pravděpodobností se náhodně vybraná oprava týká vozu značky H?*

b) *Za vážné problémy se považují poruchy motoru a převodovky, opravy vozů značky L bývají časově náročné kvůli lhůtám dodání náhradních dílů. S jakou pravděpodobností se bude náhodně vybraná oprava týkat vážného problému nebo vozu značky L?*

!!! TABULKA

ŘEŠENÍ

a) 74,83%

b) $69,02\%$

Úloha 4.10 *Uvažujte situaci ohledně záručních oprav aut dvou značek*

!!!!!!!!! TABULKA

a) S jakou pravděpodobností se oprava vozu značky L, který je objednán do servisu, bude týkat motoru?

b) Spočítejte všechny možné podmíněné pravděpodobnosti jevů, že vůz je značky H, resp. L. Výsledky uspořádejte do tabulky. Pokuste se okomentovat z praktického hlediska.

ŘEŠENÍ

a) $11,54\%$

b) TABULKA !!!!!!!!!!
Vozy značky H mají častější poruchy motoru, výfuku a karoserie oproti vozům značky L. Vozy značky L mají zdaleka nejčastěji poruchy převodovky - tyto poruchy tvoří téměř $\frac{2}{3}$ *ze záručních oprav těchto vozů.*

4.1 Pst sjednocení či průniku či části množin

Úloha 4.11 *Z 27 žáků osmé třídy jich 10 je doučováno z matematiky a 13 z fyziky. Přitom polovina z těch, co mají doučování z matematiky, je doučována i z fyziky. Jaká je pst, že náhodně vybraný žák z této třídy je doučován aspoň v jednom z daných dvou předmětů?*

Úloha 4.12 *Z 25 žáků deváté třídy jich 15 má doučování z matematiky a 8 doučování z angličtiny. Přitom pětina z těch, co mají doučování z matematiky, je doučována i z angličtiny. Jaká je pst, že náhodně vybraný student z dané třídy není doučován ze žádného z daných dvou předmětů?*

Úloha 4.13 *Prodejce obleků má zkušenost, že zákazníci požadují krejčovskou úpravu u 10 % prodaných kalhot a u 15 % prodaných sak. U 7 % prodaných obleků zákazníci požadují úpravu jak kalhot, tak saka. Prodá-li prodejce za odpoledne čtyři obleky čtyřem různým zákazníkům (předpokládejte, že zákazníci se navzájem neznají a přicházejí do obchodu nezávisle), určete pst, s jakou bude požadována aspoň jedna úprava obleku (kalhot nebo saka nebo obojího).*

Úloha 4.14 *Prodejce obleků má zkušenost, že zákazníci požadují krejčovskou úpravu u 12 % prodaných kalhot a u 15 % prodaných sak. U 8 % prodaných obleků zákazníci požadují úpravu jak kalhot, tak saka. S jakou pstí u náhodně vybraného prodaného obleku*

a) *nebude požadována žádná úprava?*

b) *bude zákazník požadovat jen jednu úpravu (kalhot nebo saka, ne však obojího)?*

Úloha 4.15 *U skupiny* 40 *studentů víme, že* 80% *z nich jde matematika,* 70% *jde Excel,* 60% *je dobrých v matematice i Excelu. Jaká je pst, že náhodně vybraný student z této skupiny bude mít problémy s matematikou i s Excelem?*

Úloha 4.16 *Ve třídě je 25 žáků, z nich 17 má rádo matematiku, 15 má rádo fyziku, a čtyři žáci nemají rádi ani matematiku, ani fyziku. Jaká je pst, že náhodně vybraný žák této třídy má rád matematiku i fyziku současně?*

4.2 Podmíněná pst

Úloha 4.17 *Víme, že při dvou hodech kostkou padl celkem součet ok dělitelný pěti (to je podmínka, která nastala). Jaká je pst, že padly dvě pětky (tuto informaci už nevíme, a musíme tedy danou pst spočítat)?*

Úloha 4.18 *Víme, že při dvou hodech kostkou padla aspoň jedna pětka (to je podmínka, která nastala). Jaká je pst, že součet hodnot obou hodů je dělitelný třemi (tuto informaci už nevíme, a musíme tedy danou pst spočítat)?*

Úloha 4.19 *Víme, že součet dvou hodů kostkou je dělitelný čtyřmi (to je podmínka, která nastala). Jaká je pst, že při obou hodech padlo sudé číslo (tuto informaci už nevíme, a musíme tedy danou pst spočítat)?*

Úloha 4.20 *Víme, že při dvou hodech kostkou padl celkem součet ok 8 (už víme, že to nastalo). Jaká je pst, že přitom padla dvě sudá čísla?*

Úloha 4.21 *Víme, že při dvou hodech kostkou padla dvě sudá čísla (už víme, že to nastalo). Jaká je pst, že přitom padl součet 8?*

Řešení některých příkladů najdete na konci textu v oddílu 13.4.

5 Bernoulliovy psti, úplná pst, Bayesův vzorec

Úloha 5.1 *Příklad s oříšky Bruno si koupil 10 kg oříšků, 30% byly kešu, 40% lískové a 30% vlašské. Je jich tolik, že šance, že při každém vytažení se pst, že vytáhnu kešu se nemění tj. K1 (30%), K2 (30%).*

Z pěti náhodně vytažených N=5 K=počet kešu oříšků z 5 náhodně vybraných oříšků L=počet lískových oříšků z 5 náhodně vybraných oříšků

Jaká je pravděpodobnost, že z těch náhodně vybraných nebude žádný kešu oříšek
$P(K=0) = 0,7^5 = 0,1681$
Jaká je pravděpodobnost, že z těch náhodně vybraných bude 1 kešu oříšek
$P(K=1) = 5 \cdot 0,30 \cdot\ 0,70^4 = 0,36015$
Jaká je pravděpodobnost, že z těch náhodně vybraných bude 2 kešu oříšky
$P(K=2) = \binom{5}{2} 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,7^3 = 0,3087$

Jaká je pravděpodobnost, že z těch náhodně vybraných bude 3 kešu oříšky
$P(K=3) = \binom{5}{3} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^2 = 0,1323$
Jaká je pravděpodobnost, že z těch náhodně vybraných bude 4 kešu oříšky
$P(K=4) = \binom{5}{4} \cdot 0,3^4 \cdot 0,7 = 0,02835$
Jaká je pravděpodobnost, že z těch náhodně vybraných bude 5 kešu oříšků
$P(K=5) = 0,3^5 = 0,00243$

Všechny pst dávají dohromady 1.

Vypočítej, že z 5 oříšků je počet lískových oříšků je alespoň 2. $P(L \geq 2) = 1 - P(L \leq 1) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - 0,6^5 - \binom{5}{1} \cdot 0,4 \cdot 0,6^4 = 0,663$

Úloha 5.2 *N = 10 pracovních dní*
Každý den jede pracovní linka a pokazí se za každý den s pst P=0,1 (pst poruchy každý den)
X = počet dní z daných 10, kdy k poruše došlo.
Každý večer vymění porouchané, takže pst poruchy každý den se nemění.
ŘEŠENÍ $P(x=3) = \binom{10}{3} \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^7 = 0,0574$

Úloha 5.3 *Máme nějakou cihlovou stavbu. Cihly dováží v poměru* $1 \cdot 2 \cdot 2$ *, tj. 1 dovezou z jedné cihelny C1 (20 %), 2 cihly dovezou z cihelny C2 (40 %) a 2 cihly dovezou z cihelny C3 (40 %).*
První cihelny vyrábí super cihly jakost 80 %
Druhá cihelna vyrábí super cihly jakost 65 %
Třetí cihelna vyrábí super cihly jakost 72 %
Vypočítejte průměrné procento super cihly.

A ... náhodně vybraná cihla je super (bez ohledu z jaké cihelny je)

$P(A) = \frac{0,8+0,65+0,65+0,72+0,72}{5} = \frac{1}{5} \cdot 0,8 + \frac{2}{5} \cdot 0,65 + \frac{2}{5} \cdot 0,72 = 0,708$
$P(C1) = 0,20$
$P(C1/A) = \frac{P(C1) \cdot P(A/C1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot 0,80}{0,708} = \frac{\frac{1}{5} \cdot 0,80}{\frac{1}{5} \cdot 0,80 + \frac{2}{5} \cdot 0,65 + \frac{2}{5} \cdot 0,72} = 0,226$

Úloha 5.4 *V basketbalu hraje 9 lidí, jeden z nich (průměrný) trefí koš při trestném střílení s pst 0,4. Zbylých osm se trefí při trestném střílení s pst 0,8.*
Náhodnost je určena rádiem - hlásí, tj. nevíme jaký hráč z týmu hází.
A ... Náhodně vybraný hráč háže a trefí se
$P(A) = \frac{0,4+8 \cdot 0,8}{9} = \frac{1}{9} \cdot 0,8 + \frac{8}{9} \cdot 0,8 = 0,75555$
H1 ... náhodně vybraný hráč je průměrný ... $\frac{1}{9} = 0,1111$
H2 ... náhodně vybraný hráč je výborný ... $\frac{8}{9}$
Víme: koš byl trefen
Nevíme: nastal H1?

$P(H1/A) = \frac{P(H1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H1) \cdot P(A/H1}{P(A)} = \frac{\frac{1}{9} \cdot 0,4}{0,7555} = 0,0588$ *(tato podmíněná pst klesla z 0,1111 na 0,0588)*

Úloha 5.5 *Máme 15 televizorů a 3 z těch televizorů jsou nekvalitní a 12 jsou kvalitní. Někdo si kupuje televizor a chtěl by kvalitní televizor. Pomůže expert, ten kvalitní televizor pozná z pst $\frac{5}{6}$, nekvalitní TV pozná s pst $\frac{1}{11}$. Zákazník si náhodně vybere TV, zkonzultuje s expertem, ten si pak koupí.*

A ... zákazníkem vybraný TV byl expertem označen za kvalitní

$P(A) = \frac{12\frac{5}{6}}{15} + \frac{3\cdot\frac{1}{11}}{15} = 0,68485$

Spočítejte pst, že TV je skutečně kvalitní (H1) pokud A.

$P(H1/A) = \frac{\frac{12}{15}\cdot\frac{5}{6}}{0{,}68485} = 0,9734$ *P(TV je skutečně kvalitní)*$= \frac{12}{15} = 0,80$

Úloha 5.6 *Tři kamarádi se v baru domluvili, že ten, na kterého padne los, zaplatí za všechny útratu. Losují tak, že každý hodí mincí a ten, kterému jeho mince ukáže jinou stranu než mince zbývajících dvou, musí zaplatit. Pokud všechny mince ukážou stejnou stranu. Házení opakují až do rozhodnutí.*

a) *S jakou pstí se rozhodne již prvním hodem?*

b) *S jakou pstí nebude ani po druhém hodu rozhodnuto?*

c) *S jakou pstí nebude ani po čtvrtém hodu rozhodnuto?*

d) *Lze předem stanovit, po kolikátém hodu již musí být rozhodnuto?*

ŘEŠENÍ

a) $1 - 0,5^3 - 0,5^3 = \frac{3}{4}$

b) $\frac{1}{4}^2 = \frac{1}{16}$

c) $\frac{1}{4}^4 = \frac{1}{256}$

d) *ne, počet losování může být teoreticky libovolně velký*

Úloha 5.7 *Přístroj se skládá ze tří částí, z nichž každá nezávisle na zbývajících může mít v průběhu určité doby poruchu. Porucha kterékoliv části má za následek poruchu celého přístroje. Spolehlivost (tj. pravděpodobnost, že nedojde k poruše) první části je 0,8, druhé 0,9 a třetí 0,7. Jaká je spolehlivost celého přístroje?*

ŘEŠENÍ

$0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,7 = 0,504$

Úloha 5.8 *V nádražní hale jsou umístěny tři automaty na kávu. U prvního nastane porucha s prstí 0,1, u druhého s pstí 0,15 a u třetího s pstí 0,05. Jaká je pst, že nastane porucha*

a) *právě jednoho automatu*

b) *nejvýše jednoho automatu?*

ŘEŠENÍ

a) $0,1 \cdot 0,85 \cdot 0,95 + 0,9 \cdot 0,15 \cdot 0,95 + 0,9 \cdot 0,85 \cdot 0,05 = 0,24725$

b) $0,24725 + 0,9 \cdot 0,85 \cdot 0,95 = 0,974$

Úloha 5.9 *Hodíme*

a) *deseti*

b) *dvaceti*

c) *třiceti mincemi. S jakou pstí na polovině z nich padne líc? ŘEŠENÍ*

a) $24,16\%$

b) $17,62\%$

c) $14,45\%$

Úloha 5.10 *Pravděpodobnost, že spotřeba plynu ve všední den určitého období přesáhne stanovenou normu, je 0,2. Jaká je pst, že během pěti náhodně volených pracovních dnů*

a) *nebude norma překročena*

b) *bude překročená dvakrát*

ŘEŠENÍ

a) $32,77\%$

b) $20,48\%$

Úloha 5.11 *V osudí je 6 bílých, 8 červených a 10 modrých kuliček. Postupně bez vracení vylosujeme dvě kuličky. S jakou pstí bude*

a) *první modrá*

b) *druhá modrá, víle-li, že první byla červená*

c) *druhá modrá (aniž víme, jakou barvu měla první)?*

ŘEŠENÍ

a) $\frac{10}{24} + \frac{5}{12}$

b) $\frac{10}{23}$

c) $\frac{10}{23} \cdot \frac{6}{24} + \frac{10}{23 \cdot \frac{8}{23}} + \frac{9}{23} \cdot \frac{10}{23} = \frac{5}{12}$

Úloha 5.12 *V zásilce je 400 výrobků, z nichž 150 dodal závod A a 250 závod B. Každý závod měl ve své dodávce 5 vadných výrobků. Jaká je pst, že vybereme vadný výrobek, pokud*

a) *jej vybíráme náhodně z celé zásilky,*

b) *nejdříve náhodně vybereme dodávku, a teprve poté z ní výrobek?*

ŘEŠENÍ

a) $\frac{10}{400} = 2,5\%$

b) $\frac{5}{150} \cdot 0,5 + \frac{5}{250} \cdot 0,5 = 2,67\%$

Úloha 5.13 *Je známo, že 90 % výrobků odpovídá standardu. Byla vypracována zjednodušená kontrolní zkouška, která u standardního výrobku dá kladný výsledek s pravděpodobností 0,95, zatímco u výrobku nestandardního s pravděpodobností 0,2. Jaká je pravděpodobnost, že výrobek, u něhož zkouška dopadla kladně, je standardní?*

ŘEŠENÍ
$\frac{0,9 \cdot 0,95}{0,9 \cdot 0,95 + 0,1 \cdot 0,2} = 97,71\%$

Úloha 5.14 *Tři střelci vystřelili každý jednou na vzdálený terč. Z jejich dosavadní výkonnosti odhadujeme, že první zasáhne terč v průměru v 87 případech ze sta, druhý v průměru v 72 případech ze sta a třetí v průměru v 65 případech ze sta. V terči byly zjištěny dva zásahy. S jakou pravděpodobností minul třetí střelec?*

ŘEŠENÍ
$\frac{0,87 \cdot 0,72 \cdot 0,35}{0,87 \cdot 0,72 \cdot 0,35 + 0,87 \cdot 0,28 \cdot 0,65 + 0,13 \cdot 0,72 \cdot 0,65} = 50,01\%$

5.1 Binomické psti

5.2 Úplná pst nebo Bayesův vzorec

Úloha 5.15 *Jistá VŠ přijímá do 1.ročníku studenty ze všech typů SŠ. Absolventů gymnázia je* 65 *%, přitom* 60*% z nich tvoří dívky. Zbylých* 35 *% přijatých studentů navštěvovalo jiný typ školy a je mezi nimi pouze* 30*% dívek.*

a) *Jaká je pst, že náhodně vybraný student 1.ročníku je dívka?*

b) *Systém vybral náhodně jednu dívku ze všech studentů prvního ročníku (už víme) – jaká je pst, že tato dívka je absolventkou gymnázia (ještě nevíme a chceme určit)?*

Úloha 5.16 *Ve třídě je celkem dvanáct dětí, z toho jeden dyskalkulik (tj. nejde mu moc matematika). Dyskalkulik zvládne příklad na procenta v* 50*% případů, ostatní děti v* 70*%.*

a) *Jaká je pst, že náhodně vybrané dítě ve třídě uspěje v příkladu na procenta na prověrce?*

b) *Paní učitelka po prověrce opravuje příklady na procenta a nad jednou prověrkou vykřikne: „Ano, je to správně“ (vykřikuje často, takže z toho nelze usoudit, o jakého žáka se jedná). Vyčíslete pst, že se jednalo zrovna o písemku žáka, který má s procenty větší problémy.*

Úloha 5.17 *Šest lidí trénuje ve střelbě z luku na terč z příkladu 3.30. Petr a Pavel se po nějaké době tréninku trefí do pětky nebo desítky s pstí* 0,7*, Anežka, Alice a Anna s pstí* 0,5*, jenom Cyrilovi se ještě nedaří a do pětky nebo desítky se trefuje s pstí* 0,35*. Jaká je průměrná úspěšnost = pst, že náhodně vybraný hráč se trefí, nevíme který?*

Úloha 5.18 *Honza a Pavel hodí každý jednou kostkou. Vyhraje ten, komu padne větší číslo (kdyby padla stejná čísla, hod by opakovali). Po hodu se Honza raduje, že vyhrál (to víme) – s jakou pstí mu padla pětka (to nevíme)?*

Řešení některých příkladů najdete na konci textu v oddílu 13.5.

6 Procvičení prvních pěti týdnů výuky

Šesté cvičení slouží k napsání prověrky ze cvičení. Příklady na procvičení (např. příklady z minulých prověrek) byly rozděleny do neřešených příkladů z předchozích cvičení.

7 Diskrétní a spojitá náhodná veličina, distribuční funkce, střední hodnota a rozptyl

Po pečlivém projití přednášky 7 počítejte následující příklady:

Úloha 7.1 *Jan Kovář jde z tělocvičny do hospody a přemýšlí, kolik vypije piv. Rozhodne se pro následující postup:*

1. *Pokud mu při hodu kostkou padne 1,2,3,4 nebo 5, dá si pivo; pokud 6, jde domů.*
2. *Pokud vypil první pivo, háže ještě jednou. Když mu padne 1,2,3 nebo 4, dá si druhé pivo, jinak jde domů.*
3. *Pokud vypil druhé pivo, háže potřetí. Když mu padne 1,2 nebo 3, dá si třetí pivo, jinak jde domů.*
4. *Po třetím pivu jde v každém případě domů (musí se učit matematiku).*

V této situaci máte tři úkoly:

a) *Určete pravděpodobnostní funkci počtu piv, které Honza vypije (= pravděpodobnost, s jakou vypije 0 piv ,1 pivo, 2 piva, 3 piva).*

b) *Nakreslete graf příslušné distribuční funkce.*

c) *Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X = počet piv vypitých podle daného postupu.*

Úloha 7.2 *Při basebalu je hráč dvakrát na pálce. Pravděpodobnost, že při prvním pobytu na pálce zasáhne míček, je* 0,25. *Pravděpodobnost, že při druhém pobytu na pálce zasáhne míček, je*

$$\begin{cases} \text{0,35} & \ldots \text{ pokud při prvním pobytu zasáhl;} \\ \text{0,25} & \ldots \text{ pokud při prvním pobytu nezasáhl.} \end{cases}$$

Náhodná veličina X udává počet úspěšných pobytů na pálce u daného hráče. Jakých hodnot může nabývat? Určete její rozdělení pravděpodobnosti.

Úloha 7.3 *Hráč basketbalu háže trestné koše až do okamžiku, kdy se netrefí. Pak přestává házet. Nejvíce však má povoleno hodit pět úspěšných košů. a) Určete rozdělení pravděpodobnosti počtu úspěšných košů, jestliže pravděpodobnost úspěchu při každém hodu je nezávislá na předchozím hodu a je rovna* 0,9. *b) vypočtěte střední hodnotu a rozptyl veličiny z bodu (a).*

Úloha 7.4 *Hustota rozdělení pravděpodobnosti je dána vztahem*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \ldots \text{ pro } x < 0; \\ x & \ldots \text{ pro } x \in < 0; 1); \\ 0{,}5 & \ldots \text{ pro } x \in < 1; 2) \\ 0 & \text{pro } x \geq 2. \end{cases}$$

a) $P(0{,}1 \leq X \leq 0{,}25) = ?$*;*

b) $P(X < 0{,}25) = ?$*;*

c) $P(X > 0{,}25) = ?$*;*

d) $P(0 \leq X \leq 1{,}25) = ?$*;*

e) $P(X > 0) = ?$*;*

f) *Určete distribuční funkci náhodné veličiny* X*.*

Úloha 7.5 *Určete hodnotu parametru* c *tak, aby funkce* $f(x) = c \cdot e^{-|x|}$ *byla hustota, a pak nalezněte příslušnou distribuční funkci* $F(x)$*.*

Úloha 7.6 *Náhodná veličina* X *udává životnost žárovky a má distribuční funkci (1 jednotka = 1 hodina)*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \dots \text{ pro } x < 0; \\ 1 - e^{-\frac{x}{100}} & \dots \text{ pro } x \geq 0. \end{cases}$$

Vypočtěte pravděpodobnost, že náhodně zakoupená žárovka vydrží v provozu

a) *méně než* 90 *hodin;*

b) 80 *až* 120 *hodin;*

c) *více než* 150 *hodin.*

Úloha 7.7 *Jednomu středoškolskému profesoru se nechtělo opravovat písemky z matematiky, a tak se rozhodl udělit známky podle následujícího klíče:*

a) *Hodí kostkou. Pokud padne* 6*, ohodnotí písemku jedničkou; jinak*

b) *hodí znovu kostkou; pokud padne* 5 *nebo* 6*, ohodnotí písemku dvojkou; jinak*

c) *hodí znovu kostkou; pokud padne* 4, 5 *nebo* 6*, ohodnotí písemku trojkou; jinak*

d) *hodí znovu kostkou; pokud padne* 3, 4, 5 *nebo* 6*, ohodnotí čtyřkou; jinak*

e) *hodnotí písemku pětkou.*

Vypočtěte rozdělení pravděpodobnosti, pak příslušné teoretické rozdělení četnosti výsledku zkoušky pro 1296 *studentů. Určete střední hodnotu a rozptyl výsledku písemky.*

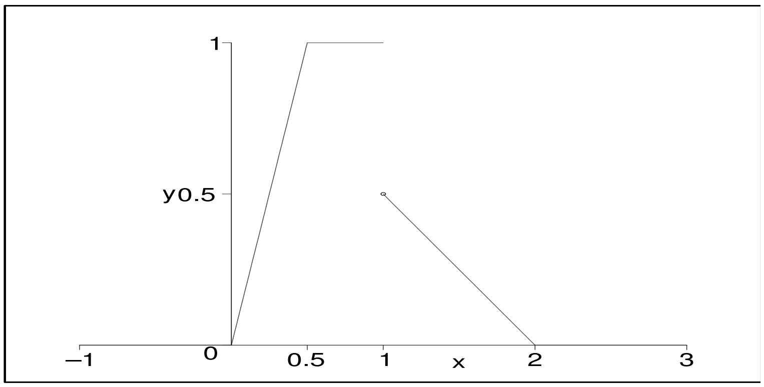
Úloha 7.8 *Horáček se jde po úspěšné zkoušce z matematiky občerstvit do hospody. Pravděpodobnostní přemýšlení u něj vítězí nad žízní, rozhodne se pít podle následujícího klíče: Padne-li mu při hodu kostkou* 1, 2, 3 *nebo* 4*, tak aniž by si cokoli objednal, jde zpět na koleje. Padne-li mu* 5 *nebo* 6*, poručí si jedno pivo a hází ještě jednou. Padne-li mu* 1, 2, 3 *nebo* 4*, tak zaplatí a jde na koleje učit se matematiku. Padne-li mu* 5 *nebo* 6*, poručí si další pivo a hází ještě jednou, atd. (eventuálně až do nekonečna).*

a) *Odvoďte pravděpodobnostní funkci počtu piv, která Horáček celkem vypije.*

b) *Vypočtěte očekávaný (střední) počet piv, která Horáček vypije.*

Úloha 7.9 *Určete střední hodnotu a rozptyl veličiny X z příkladu 7.5.*

Úloha 7.10 *Určete střední hodnotu a rozptyl veličiny X, jejíž hustota je dána na obrázku:*



Úloha 7.11 *Stanovte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X, jejíž distribuční funkce je dána vztahem*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \dots x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \dots 1 < x \leq \sqrt{2} \\ 1 & \dots x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Řešení některých příkladů najdete na konci textu v oddílu 13.7.

8 Některá význačná rozdělení psti, diskrétní i spojitá

Úloha 8.1 *Házeme čtyřikrát kostkou. Veličina X udává, kolikrát přitom padne šestka. Jaké je rozdělení pravděpodobnosti veličiny X?*

ŘEŠENÍ
Pravděpodobnost, že při jednom hodu padne šestka, je rovna $p = \frac{1}{6}$. Hody jsou navzájem nezávislé, tj. pokud v prvním hodu padla šestka, nemá to vliv na to, zda ve druhém hodu padne nebo ne. Tedy veličina X, která měří počet šestek při čtyřech hodech, má binomické rozdělení pravděpodobnosti s parametry $N = 4$, $p = \frac{1}{6}$. Podívejme se konkrétně na pravděpodobnosti, s jakými veličina X nabývá konkrétní hodnoty. Bude odtud zřejmé i odvození vzorce pro jejich výpočet.

P(X = 0)=P(ne $6) \cdot P($*ne* $6) \cdot P($*ne* $6) \cdot P($*ne* $6) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 0,482$

P(X = 1)=P(jednou padne 6*, jinak něco jiného než* 6*)= P(*6 *padne jako první, jinak ne) + P(*6 *padne druhá, jinak ne) + P (*6 *padne jako třetí, jinak ne) + P(*6 *padne* *čtvrtá, jinak ne)*=$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=$ *(všechna možná pořadí výskytu jednoho úspěchu)*$\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\binom{4}{1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=0,386$

P(X= 2)=P(dvakrát padne šestka, jinak ne)=(všechny možnosti výběru 2 pořadí ze 4)$\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\binom{4}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=0,116$
P(X =3)=$\binom{4}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=0,015$
P(X =4)=$\binom{4}{4}\cdot(\frac{1}{6})^4=0,001.$

Všimněte si, že součet těchto pěti pravděpodobností je roven jedné. Při výpočtu jsme zaokrouhlovali na tři desetinná místa.

Úloha 8.2 *Senátor Swenson před volbami tvrdí, že pro něj bude hlasovat 70 % voličů. Agentura STEN chce provést průzkum u 20 lidí. Náhodná veličina X udává počet Swensonových voličů z dvaceti dotázaných. Určete*

a) *teoretické rozdělení veličiny X (před provedením průzkumu);*

b) *pravděpodobnost, že Swensona bude volit přesně 14 lidí z 20 dotázaných;*

c) *pravděpodobnost, že Swensona bude volit maximálně 14 lidí z 20 dotázaných.*

ŘEŠENÍ

a) *Dané teoretické rozdělení je binomické s parametry N = 20 a p = 0,7. Veličina X nabývá hodnot z množiny* $0,1,2,...,20$ *s pravděpodobností*

$$P(X\ =\ r)=\ \binom{20}{r}\cdot 0,7^r\cdot 0,3^{20-r}.$$

b) *Dosazením do vzorce a) máme*

P(X = 14)= 0,192, pokud zaokrouhlujeme na tři desetinná čísla

c) *Zde využijeme finty, abychom ušetřili několik sčítanců, vypočteme pravděpodobnost opačného jevu a odečteme ji od jedničky:*

$$\begin{gathered}P(X\ \leq\ 14=\ 1-P(X\ >\ 14)=\\ =\ 1-(p(15)+p(16)+p(17)+p(18)+p(19)+p(20))=\\ =\ 1-(0,179+0,13+0,072+0,028+0,007+0,0001=0,583\end{gathered}$$

Pokud by agentura STEN v předchozím příkladu zjistila, že "pro" bylo jen 8 lidí z 20, pak některý z teoretických předpokladů nebyl v pořádku:

vzorek dotázaných lidí nebyl náhodný (byl z antiswensonovské oblasti státu);

odpovědi nebyly nezávislé (odpovídající mezi sebou navzájem diskutovali o Swensonovi);

STEN pracovala dobře, ale Swenson byl příliš optimistický se svým odhadem (to je nejpravděpodobnější problém).

Úloha 8.3 *Hodíme 400-krát mincí. Náhodná veličina udávající počet líců v těchto pokusech má binomické rozdělení s parametry N = 400, p = 0,5. Příslušné teoretické rozdělení má tyto charakteristiky:*

a) Hodnoty X jsou v četnostech:

$$EX = Np = 200;\ DX = Np(1\text{-}p) = 100;\ \sqrt{DX} = 10.$$

Obrázek Histogram pravděpodobností binomického rozdělení pro N = 16, p = 0,5 s hodnotami relativních četností.

b) Hodnoty X jsou v podílech (= relativních četnostech):

$$EX = p = 0{,}5;\ DX = \frac{p(1-p)}{N} = 0,000625;\ \sqrt{DX} = 0,025.$$

Protože charakter histogramu pravděpodobností je stejný (rozdíl je pouze v označení hodnot na ose x), sobě odpovídající normované hodnoty se rovnají: Například pokud ze 400 hodů padne 210 líců, příslušná normovaná hodnota je

$$\frac{210\ -\ 200}{10} = 1;$$

210 lícům odpovídá relativní četnost $\frac{210}{400} = 0,525$*, příslušná normovaná hodnota je*

$$\frac{0{,}525\ -\ 0{,}5}{0{,}025} = 1.$$

Jediné, na co si musíme dávat pozor, je tedy jiná střední hodnota a rozptyl v každém z přístupů a),b).

Úloha 8.4 *Pravděpodobnost, že student Jaromír přijde pozdě do školy, je každý den 0,2. Náhodná proměnná X udává počet jeho pozdních příchodů v průběhu 20 pracovních dnů.*

a) Určete její pstní funkci

b) Určete její střední hodnotu a rozptyl

c) Určete pst toho, že Jaromír bude mít právě sedm pozdních příchodů z uvažovaných dvaceti dnů

1. ŘEŠENÍ (Binomické rozdělení-přesnější, zadáno N)
$Po(\lambda) \doteq B_i(N,p)$
$EX = N \cdot p = 4$
$DX = N \cdot p(1-p) = 3,2$
$p(7) = \binom{20}{7} \cdot 0,2^7 \cdot 0,8^{13} = 0,545$

2. alternativní ŘEŠENÍ (Poissonovo rozdělení-méně přesné)

a) λ=průměrný počet výskytů za jednotku času
λ=4
p=02 ... za 20 dní
$0,2 = \frac{\lambda}{20}$
$\lambda = 4$
$P(x = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{\lambda}$

b) *EX=DX=λ=4*

c) $p(7) = \frac{4^7}{7!} \cdot e^{-4} = 0,0595$

Největší pst je skutečně při 4 dnech pozdních příchodů.

Úloha 8.5 *Házíme šestkrát klasickou hrací kostkou, náhodná veličina X udává počet padnutých jedniček v těchto šesti hodech.*

a) *Určete její pstní funkci.*

b) *Určete její střední hodnotu a rozptyl.*

c) *Určete pst toho, že jednička padne právě třikrát.*

d) *Určete pst toho, že jednička padne minimálně třikrát.*

e) *Určete pst toho, že jednička padne nejvíc pětkrát.*

ŘEŠENÍ

a) $P(x = k) = \binom{N}{k} \cdot p^k(1-p)^{N-k}$ *k=počet úspěchů* $(0,1,2,3,4,5,6)$
N=počet opakování (6)
p=pst jenoho úspěchu $(\frac{1}{6})$

b) *EX=*$N \cdot p = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$ *DX=*$N \cdot p(1-p) = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \doteq 0,833$

c) *jednička pane přávě 3x* $p(3) = \binom{6}{3} \cdot (\frac{1}{6})^3 \cdot (1-\frac{1}{6})^{6-3} = \frac{625}{11664} \doteq 0,054$

d) *jednička padne minimálně 3x*
$p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 0,054 + 0,002 + 0,0006 + 0,00002 = 0,05662$

e) *jednička padne nejvíce 5x* $p(\leq 5) = 1 - p(6) \doteq 0,9998$

Úloha 8.6 *Pravděpodobnost výskytu jistého slova v jazyku je* $0,05$*. Kolik slov musíme mít v textu, aby v něm s pstí* $0,99$ *se tohle slovo vyskytlo aspoň jednou?*
Nápověda: jedná se o příklad na binomické rozdělení psti, ve kterém máte určit parametr N.

ŘEŠENÍ
Binomické rozdělení psti, hledáme N
Úvaha: 0x zde slovo s pstí $0,01$
$p(k) = \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{N-k}$
$0,01 = \frac{N!}{O!(N-O)!} \cdot 0,05^0 \cdot (1-0,05)^{N-0}$
$0,01 = 0,95^N$

$log_{0,94}0,01 = N$
$N = 89,78$
alespoň 1x ... N=90

ŘEŠENÍ POISSONOVÝM ROZDĚLENÍM
$p = 0,05$
90 *slov ...* $\lambda = 4,5$ *jednotka délky (času) je 100 slov*
$\lambda = 5$
$0,99 = P(x \geq 1) = 1 - p(x = 0)$
$\frac{5^0}{0!} \cdot e^{-5} = p(x = 0) = 0,01$
$0,0067$

Úloha 8.7 *Do restaurace přijde průměrně dvacet zákazníků za půlhodinu. Určete pst toho, že*

a) v průběhu 5 minut přijdou alespoň dva zákazníci;

b) v průběhu 15 minut nepřijde ani jeden zákazník;

c) v průběhu 5 minut nepřijde ani jeden zákazník;

d) v průběhu jedné hodiny přijde právě dvacet zákazníků;

e) v průběhu jedné hodiny přijde právě patnáct zákazníků.

ŘEŠENÍ
$p(k) = P(Y = k) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$
pro $k = 0, 1, 2, 3, ...$

a) $\lambda = 20$
$t = \frac{1}{6}$
$p(x \geq 2) = 1 - p(x = 0) - p(x = 1)$
$p(x \geq 2) = 1 - \frac{(20 \cdot \frac{1}{6})}{0!} \cdot e^{-20 \cdot \frac{1}{6}} - \frac{(20 \cdot \frac{1}{6})^1}{1!} \cdot e^{-20 \cdot \frac{1}{6}} = 1 - e^{-\frac{10}{3}} - \frac{10}{3} \cdot e^{-\frac{10}{3}}$

b) $\lambda = 20$
$t = \frac{1}{2}$
$p(x = 0) = \frac{(20 \cdot \frac{1}{2})^0}{0!} \cdot e^{-20 \cdot \frac{1}{2}} = e^{-10}$

c) $\lambda = 20$
$t = \frac{1}{6}$
$P(x = 0) = \frac{(20 \cdot \frac{1}{6})^0}{0!} \cdot e^{-20 \cdot \frac{1}{6}} = e^{-\frac{10}{3}}$

d) $\lambda = 20$
$t = 2$

$p(x=20) = \frac{(20 \cdot 2)^{20}}{20!} \cdot e^{-20 \cdot 2} = \frac{40^{20}}{20!} \cdot e^{-40}$

e) $\lambda = 20$
$t = 2$
$P(x=15) = \frac{(20 \cdot 2)^{15}}{15!} \cdot e^{-20 \cdot 2} = \frac{40^{15}}{15!} \cdot e^{-40}$

ŘEŠENÍ pro jinou zvolenou časovou jednotku:
X=počet výskytů náhodné události za jednotku času
$X \in 0, 1, 2, 3, ...$ $p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$
č.j.=60 min
$\lambda = 40$
$p(15) = \frac{40^{15}}{15} \cdot e^{-40}$

Úloha 8.8 *Do kanceláře vyučujícího přijdou průměrně dva studenti za hodinu na náhodnou nedomluvenou konzultaci. Určete pst toho, že*

a) *v průběhu 5 minut přijdou alespoň dva studenti;*

b) *v průběhu patnácti minut nepřijde ani jeden student;*

c) *v průběhu jedné hodiny přijdou právě dva studenti;*

d) *doba mezi dvěma po sobě jdoucímu příchody studenta je v intervalu* $\langle 10\ min;\ 50\ min \rangle$

ŘEŠENÍ
$p(k) = P(Y=k) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ *pro* $k = 0, 1, 2, 3, ...$

a) $\lambda = 2$
$t = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$
$P(x \geq 2) = 1 - P(x=0) - P(x=1)$
$P(x \geq 2) = 1 - \frac{(2 \cdot \frac{1}{12})^0}{0!} \cdot e^{-2 \cdot \frac{1}{12}} - \frac{(2 \cdot \frac{1}{12})^1}{1!} \cdot e^{2 \cdot \frac{1}{12}} = 1 - e^{-\frac{1}{6}} - \frac{1}{6} \cdot e^{-\frac{1}{6}} = 1 - \frac{7}{6} \cdot e^{-\frac{1}{6}}$

b) $\lambda = 2$
$t = \frac{1}{4}$
$P(x=0) = \frac{(2 \cdot \frac{1}{4})^0}{0!} \cdot e^{-2 \cdot \frac{1}{4}} = e^{-\frac{1}{2}}$

c) $\lambda = 2$
$t = \frac{1}{4}$
$P(x=2) = \frac{(2 \cdot 1)^2}{2!} \cdot e^{-2 \cdot 1} = \frac{4}{2} \cdot e^{-2} = 2 \cdot e^{-2}$

d) $P(Y \in (10\ min,\ 50\ min)) = \int_{10}^{50} ft\ dt = [F_x]_{10}^{50} = 1 - e^{-\frac{1}{30} \cdot 50} - (1 - e^{-\frac{1}{30} \cdot 10}) = e^{-\frac{1}{3}} - e^{-\frac{5}{3}} = 0,528$
č.j.=1 min

$\lambda = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$

NEBO
č.j.=1 hod
$\lambda = 2$
$P(Y \in \frac{1}{6}\ hod;\ \frac{5}{6}\ hod) = [F_x]_{\frac{1}{6}}^{\frac{5}{6}} = 1 - e^{-\frac{2\cdot 5}{6}} - 1 + e^{\frac{-2\cdot 1}{6}} = e^{-\frac{1}{3}} - e^{-\frac{5}{3}} = 0,528$

Úloha 8.9 *Náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení se střední hodnotou E(x)=3. Určete:*

a) *Pst toho, že náhodná veličina nabývá hodnoty menší než je její střední hodnota;*
b) *Pst, že náhodná veličina nabývá kladné hodnoty;*

ŘEŠENÍ
a) $E(x) = 3 = \lambda$
$P(x < 3) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) = 0,0498 + 0,1494 + 0,2240 \doteq 0,4232$
$P(x = 0) = \frac{3^0}{0!} \cdot e^{-3} \doteq 0,0498$
$P(x = 1) = \frac{3^1}{1!} \cdot e^{-3} \doteq 0,1494$
$P(x = 2) = \frac{3^2}{2!} \cdot e^{-3} \doteq 0,2240$

b) $P(x > 0) = 1 - P(x = 0) = 1 - \frac{3^0}{0!} \cdot e^{-3} = 1 - 0,0498 \doteq 0,9502$

Úloha 8.10 *Na jistou internetovou stránku nastane za hodinu průměrně 120 přístupů. Určete, jaká je pst, že za dvě minuty na stránku nastanou právě dva přístupy.*

ŘEŠENÍ
2 minuty z jedné hod. - $\frac{2}{60} = \frac{1}{30}$
120 přístupů $\cdot \frac{1}{30} = \frac{120}{30}$
$\lambda = \frac{120}{30} = 4$
$P(x = 2) = \frac{4^2}{2!} \cdot e^{-4} = \frac{16}{2} \cdot e^{-4} = 8 \cdot e^{-4} \doteq 0,1465$
$P(x = n) = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda}$

Úloha 8.11 *Výrobné zařízení má poruchu jednou za 2000 hodin. Předpokládejte, že doba čekání na poruchu je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením. Určete hodnotu t tak, aby pst, že zařízení bude pracovat delší dobu než t, byla 0,9.*

ŘEŠENÍ
X - doba čekání na poruchu
č.j. 1=2000 hod.
λ= *průměrný počet poruch za č.j., zde* $\lambda = 1$
$X \approx P_o(\lambda = 1)$

Hledání t:
$P(x \geq t) = 0,9$
$1 - P(x < t) = 0,9$
$1 - F(t) = 0,9$
$F(t) = 0,1$
$1 - e^{-\lambda \cdot t} = 1 - e^{-t} = 0,1$
$e^{-}t = 0,9$
$t = -ln(0,9)$
$t \doteq 0,10536$

Pokud $1 = 2000h \ \rightarrow t \ = 2000 \cdot 0,10536 \ hod \ = 210,721 \ hod.$

9 Normální rozdělení psti

Úloha 9.1 *Aniž byste né pravděpoobnosi počítali, doplňte místo otazníků znaky* $<, >, =$ *a ke každé straně nerovnosti nakreslete obsah plochy, který danou pst představuje:*

a) $P(U < 0,8)$?? $P(U < 0,9)$;

b) $P(U < 0,7)$?? $P(U > 0,7)$;

c) $P(U > -2)$?? $P(U < 2)$;

d) $P(U < -3)$?? $P(U < 3)$;

e) $P(0,9 < U < 1,1)$?? $P(1,9 < U < 2,1)$;

f) $P(1 < U < 2)$?? $P(U < 2) + P(U >)$;

g) $P(1 < U < 2)$?? $1 - P(U < 1) - P(U > 2)$;

h) $2P(U > 1)$?? $1 - P(-1 < U < 1)$.

ŘEŠENÍ

a) $P(U < 0,8) \ < \ P(U < 0,9)$;

b) $P(U < 0,7) \ > \ P(U > 0,7)$;

c) $P(U > -2) \ = \ P(U < 2)$;

d) $P(U < -3) \ < \ P(U < 3)$;

e) $P(0,9 < U < 1,1) \ > \ P(1,9 < U < 2,1)$;

f) $P(1 < U < 2) \ < \ P(U < 2) + P(U >)$;

g) $P(1 < U < 2) \ = \ 1 - P(U < 1) - P(U > 2)$;

h) $2P(U > 1) \ = \ 1 - P(-1 < U < 1)$.

Úloha 9.2 *Najděte hodnotu u, pro kterou platí (a ke každé psti nakreslete obsah plochy, kterou představuje):*

a) $P(U > u) = 0,25$;

b) $P(U < u) = 0,1$;

c) $P(U < u) = 0,99$;

d) $P(-u < U < u) = 0,99$;

e) $P(0 < U < u) = 0,35$;

f) $P(1 < U < u) = 0,2$.

ŘEŠENÍ

a) $P(U > u) = 0,25$;
$1 - 0,25 = 0,75$
$u = 0,68$

b) $P(U < u) = 0,1$;
$1 - 0,9 = 0,1$
$u = -1,29$

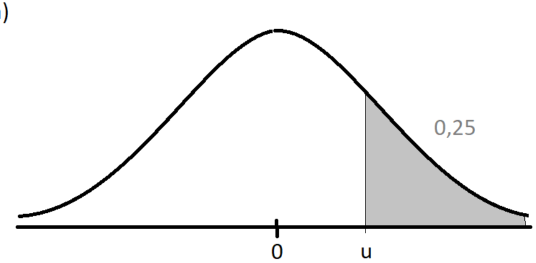
c) $P(U < u) = 0,99$;
$u = 2,33$

d) $P(-u < U < u) = 0,99$;
$u = 2,58$

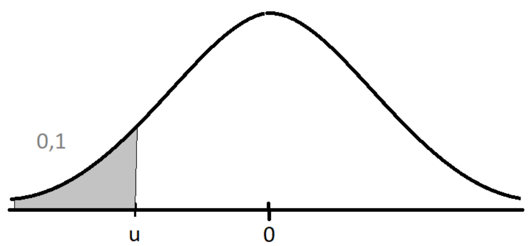
e) $P(0 < U < u) = 0,35$;
$0,5 + 0,35 = 0,85$
$u = 1,04$

f) $P(1 < U < u) = 0,2$. $0,841 + 0,2 = 1,041$
$1,041 > 1$ *neexistuje*

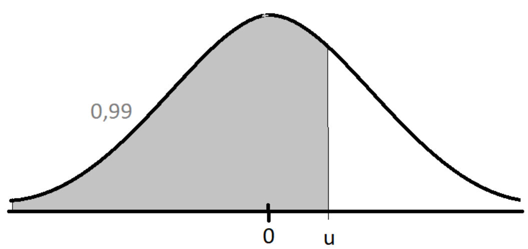
a)



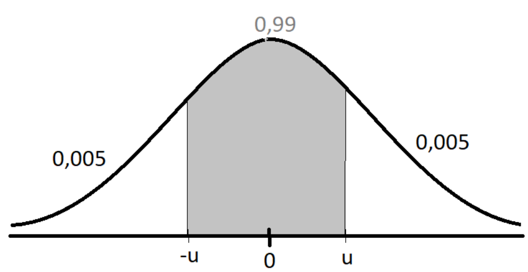
b)



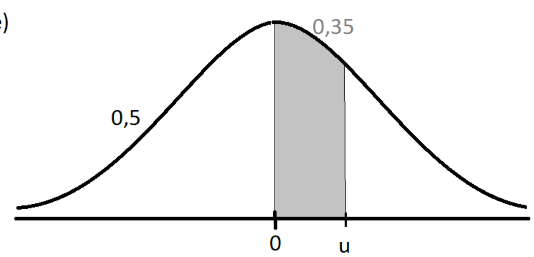
c)



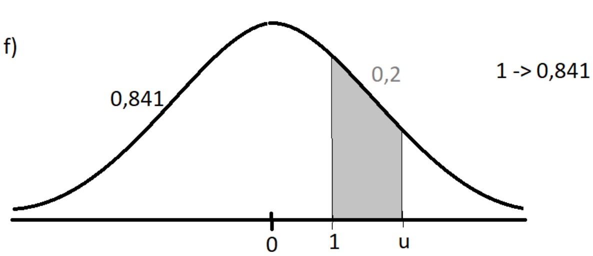
d)



e)



f)



Úloha 9.3 *Náhodná veličina x má normální rozdělení se střední hodnotou $\mu = 5$ a směrodatnou odchylku $\sigma = 4$. Vypočtěte následující pravděpodobnost a doplňte je o obrázky.*

a) $P(x < 11)$

b) $P(x > 0)$

c) $P(\in \langle 3; 7 \rangle$

d) $P(0 < x < \mu)$

e) $P(\mu - \sigma < X < \mu + 2\sigma)$

f) $P(|X - \mu| < 0,4)$

ŘEŠENÍ

a) $P(x < 11) = P(U < \frac{11-5}{4})$

b) $P(x > 0) = P(U > \frac{0-5}{4}) = P(U > -\frac{5}{4}) = 1 - P(U < -\frac{5}{4}) = 1 - (1 - P(U) = 1 - 1 + 0,8943502 = 0,8943502$

c) $P(\in \langle 3; 7 \rangle = P(\frac{3-5}{4} < U < \frac{7-5}{4} = P(-0,5 < U < 0,5) = 1 - 0,6914625 - 0,6914625 = -0,382925 \to 0,382925$

d) $P(0 < x < \mu) = P(x \in \langle 0; 5 \rangle) = P(\frac{0-5}{4} < U < \frac{5-5}{4}) = P(-1,25 < U < 0) = 1 - 0,8943502 - 0,5 = -0,3943502 \to 0,3943502$

e) $P(\mu - \sigma < X < \mu + 2\sigma) = P(1 < X < 13) = P(\frac{1-5}{4} < U < \frac{13-5}{4}) = P(-1 < U < 2) = 1 - 0,8413447 - 0,9772499 = -0,8185946 \to 0,8185946$

f) $P(|X - \mu| < 0,4) = P(X \in \langle 5,4; 4,6 \rangle) = P(\frac{5,4-5}{4} < U < \frac{4,6-5}{4}) = P(0,1 < U < -0,1) = 0,796556$

Úloha 9.4 *Doba, kterou potřebuje buňka jistého typu, aby se rozdělila na dvě buňky je náhodná veličina s normálním rozdělením se střední hodnotou 1 hodina (60 minut) a směrodatnou odchylkou 5 minut.*

a) *Jaká je pravděpodobnost, že se buňka rozdělí dříve, než za 45 minut?*

b) *Jaká je pravděpodobnost, že buňce bude trvat dělení déle než 65 minut?*

c) *Do jaké doby se rozdělí 99% buněk?*

ŘEŠENÍ

a) $P(X < 45) = P(U < \frac{45-60}{5}) = P(U < -3) = 1 - 0,9986501 = 0,00135$

b) $P(X > 65) = P(U > \frac{65-60}{5}) = P(U > 1) = 1 - 0,8413447 = 0,15866$

c) $P(X >?) = 0,99 \to P(U > \frac{?-60}{5}) = 0,99$
$\frac{x-60}{5} = 2,33$
$x = 11,65 + 60$
$x = 71,65\ min$

Úloha 9.5 *Prodejna očekává dodávku nového zboží v době od 8 do 10 hodin. Podle sdělení dodavatele je uskutečnění dodávky stejně možné kdykoliv během tohoto časového intervalu. Jaké je pst, že zboží bude dodáno v době od* $8:30$ *do* $8:45$*?*

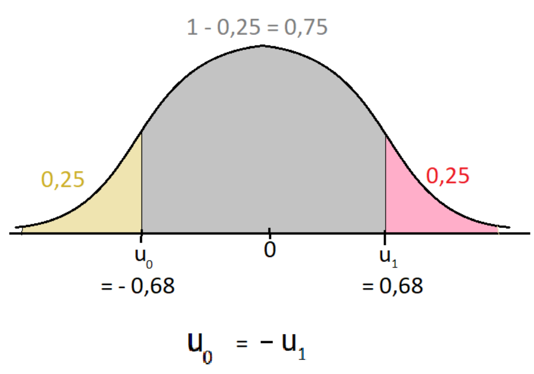
Rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti
= přiřazuje všem hodnotám náhodné veličiny stejnou pst

Hustota rovnoměrného rozdělení pst
pst=obsah intervalu

ŘEŠENÍ
$F(x) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-8}{10-8} = \frac{x-8}{2}$
$\int_{8,5}^{8,75} f(x)dx = F(8,75) - F(8,5) = \frac{8,75-8}{2} - \frac{8,5-8}{2} = 0,375 - 0,25 = 0,125 = 15,5\%$

Úloha 9.6 *V Kocourkově není stanovena žádná dolní hranice pro složení zkoušky. Jeden zly profesor se rozhodl, že vyhodí na daném termínu 25% všech studentů. Jak musí nastavit hranici pro složení zkoušky, pokud z dlouhodobých výsledků ví, že počet bodů na zkoušce lze popsat rozdělením* $N_0 = (\mu = 75, \sigma^2 = 100)$.

ŘEŠENÍ
$\mu = EX = 75$
$\sigma^2 = DX = 100$
$\sigma = \sqrt{DX} = \frac{x-75}{\sigma}$
$f(x) = \frac{1}{10\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-75)^2}{2\cdot 100}}$
$U = \frac{X-\mu_x}{\sigma_x} = \frac{x-75}{\sigma}$
$X\ N_0(75, 100)$
$P(X \leq x) = 0,25\ (25\%)$
$P(\frac{x-75}{10} \leq \frac{x-75}{10}) = 0,25$



$(x \in (-\propto; x_0))$
$U = 0,68$
$-0,68 = \frac{x_0 - 75}{10}$
$x_0 = -0,68 \cdot 10 + 75 = 68,2$

Úloha 9.7 *Honza Kovář pravidelně jezdí hrát squash. V každém z* 900 *po sobě jdoucích dny zaparkuje své auto na placeném parkovacím místě s parkovacím taxametrem, ale nikdy do něj nevhodí kupón. Pravděpodobnost, že policista daný den zkontroluje taxametr, je rovna* 0,1. *Vypočtěte.*

a) *kolikrát může Honza očekávat, že dostane pokutu,*

b) *jaká je směrodatná odchylka rozdělení očekávaného počtu pokut,*

c) *jaká je pravděpodobnost, že Honza dostane přesně 90 pokut,*

d) *jaká je pravděpodobnost, že Honza dostane 87 a více pokut,*

e) *Vypočtěte body c),d) pomocí aproximace binomického rozdělení normálním.*

ŘEŠENÍ

Úloha 9.8 250 *soustruhů pracuje nezávisle na sobě. Každý z nich je v provozu 80% z celkové pracovní doby. Vypočtěte pomocí normálního rozdělení s korekcí, jaké je pravděpodobnost, že náhodně vybraném okamžiku pracovní doby je v provozu*

a) 190 *až* 220 *soustruhů*

b) 74 *až* 86 *PROCENT soustruhů*

ŘEŠENÍ
$\int_{189,5}^{220,5} f\ dt = \phi(\frac{220,5-200}{6,32}) - \phi(\frac{189,5-200}{6,32}) = 0,9993 - 1 + \phi(1,66) = 0,9993 - 1 + 0,9515 = 0,9508$

Úloha 9.9 *Pravděpodobnost, že se zasazený strom ujme, je* 0,85. *Vypočtěte pomocí normálního rozdělení s korekcí, jaká je pravděpodobnost, že z* 500 *zasazených stromů se jich ujme*

a) *aspoň* 420

b) *nanejvýš* 440

ŘEŠENÍ
$N = 500$
$p = 0,85$
$\mu = EX = N \cdot p = 500 \cdot 0,85 = 425$
$\sigma^2 = DX = N \cdot p(p-1) = 500 \cdot 0,85(1 - 0,85) = 63,75$
$\sigma = \sqrt{63,75}$
$u = \frac{x-\mu}{\sigma} \to u = \frac{x-425}{\sqrt{63,75}}$

a) $P(x > 420) = P(u > \frac{420-425}{\sqrt{63{,}75}})$
$P(u > -0,626224) = 1 - P(u < -0,626224) = 1 - \phi(-0,626224) = 1 - (1 - \phi(0,626224) = \phi(0,626224) \approx 0,7356527 \approx 0,736$

s korekcí
$P(x > 420) = P(u > \frac{419{,}5-425}{\sqrt{63{,}73}})$
$\phi(0,6888) \approx 0,755$

Úloha 9.10 *Podle údajů ze sčítání lidu bylo v roce* 1970 *zhruba* 75% *domácností vybaveno televizorem. Náhodně bylo vybráno* 400 *domácností.*

a) Jaká je pravděpodobnost, že z vybraných 400 *domácností má televizor* 290 *až* 305 *domácností?*

a) Určete, v jakých mezích (souměrných kolem střední hodnoty) bude počet domácností s televizorem (ze 400 *vybraných) s pravděpodobností* 95%

ŘEŠENÍ
$N = 400$
$p = 0,75$

a) $\langle 290; 305 \rangle$
$\mu = EX = N \cdot p = 400 \cdot 0,75 = 300$
$\sigma^2 = DX = N \cdot p(1-p) = 400 \cdot 0,75 \cdot 0,25 = 75 \;\rightarrow\; \sigma = \sqrt{75}$
$u = \frac{x-300}{\sqrt{75}}$
$P(290 \leq x \leq 305) = P(\frac{290-300}{\sqrt{75}} \leq u \leq \frac{305-300}{\sqrt{75}}) = P(-1,15470 \leq u \leq 0,57735)$
$\approx \phi(0,57735) - \phi(-1,15470) = \phi(0,57735) - \phi(1 - \phi(1,13470)) = 0,719042 - \phi(1 - 0,8749281) = 0,719042 - 0,125 \approx 0,594$

b) $(-u < U < u) = 95\%$
$u = 1,96$
$\frac{N-300}{5\sqrt{3}} = 1,96$
$N - 300 = 1,96 \cdot 5\sqrt{3}$
$N = 1,96 \cdot 5\sqrt{3} + 300$
$N = 317$

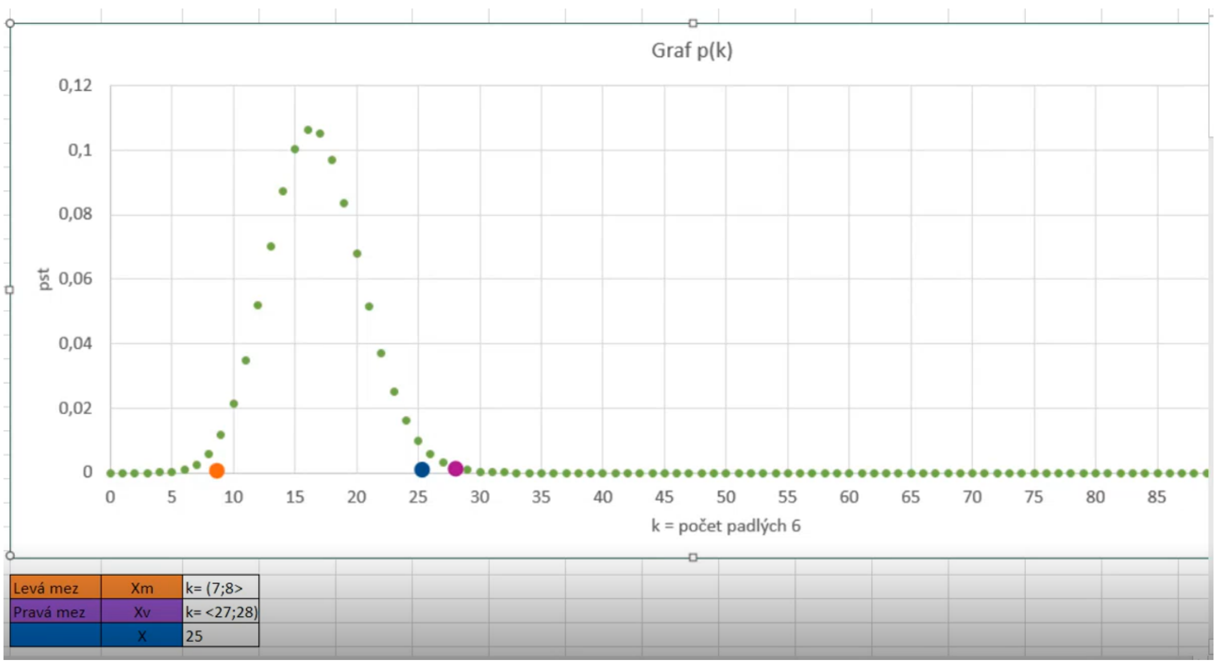
$\frac{N-300}{5\sqrt{3}} = -1,96$
$N - 300 = -1,96 \cdot 5\sqrt{3}$
$N = -1,96 \cdot 5\sqrt{3} + 300$
$N = 283$
283 *až* 317 *je hledaný rozsah.*

10 Testy střední hodnoty binomického a normálního rozdělení

Zadání úloh je neúplné – nová zadání úloh najdete ve skriptech MA0008 (přednáškový text) za kapitolou 10.

Úloha 10.1 *ŘEŠENÍ*
Hypotézy
$H_0 \ldots$ *pst, že padne* 6, *je rovna* $p = \frac{1}{6}$
$H_1 \ldots$ *pst, že padne* 6, *není rovna* $p\frac{1}{6}$

a) $X \; B_i(N = 100, p = \frac{1}{6})$
X *může nabývat hodnot* $0, 1, 2, ..., 100$
pst $p(k) = \binom{100}{k} \cdot (\frac{1}{6})^k \cdot (\frac{5}{6})^{100-k}$



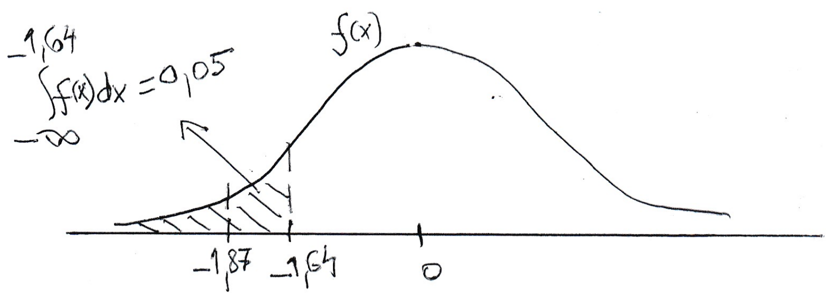
$EX = \frac{1}{6}$
$16,6x$ *padne* 6 *ze* 100 *hodů*
$\alpha = 0,05 \quad \rightarrow \quad \sum_0^{x_n} p(k) = \frac{\alpha}{2} = 0,025$
Pokud je počet padlých 6 *ze* 100 *hodů podstatně vyšší/nižší než očekávných* 16,6 *pak můžeme zamítnout* H_0 *a prohlásit, že platí* H_1

$N_0(\mu = 16,666; \sigma^2 = 13,89; \sigma = 3,73)$
$U_k = \frac{x_k - 16,6667}{3,73}$
$\pm 1,96 = \frac{x_n - 16,6667}{3,73}$

$x_k = 16,6667 \pm 3,73 \cdot 1,96$
$\to 9,35$
$\to 23,97$

Úloha 10.2 500 *resp.* $- 180 = 0,36$
40% ?
$\alpha = 0,05$
$H_0 : \pi = 0,40$
$H_1 : \pi < 0,40 \quad 0,36 < 0,40$
Testové kritérium a jeho nulové rozdělení
$T(x) = P_1 = \frac{p-\pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)}} \cdot \sqrt{n} \;\to\; N(0;1)$
$= \frac{0,36-0,40}{\sqrt{0,40\cdot(1-0,40)}} \cdot \sqrt{500} = -1,8257$
p-hodnota
$H_1 < 0,40$
$1 - F_0(1,8257) = 0,036$
$0,036 < 0,05$ *zamítnuto* H_0

doplnění dr. Fajmona
$K1$
$H_0 : p = 0,40$
$H_1 : p < 0,40$
$K2\ y = \frac{x}{500}\ B_i(N = 500, p = 0,40)$ ... *procento nespokojených lidí*
$K3\quad E(\frac{x}{500}) = p = 0,40$
$D(\frac{x}{500}) = \frac{1}{500^2} \cdot 500 \cdot p \cdot (1-p) = \frac{p(1-p)}{500}\ K4\ \frac{\frac{x}{500}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p}{500}}} = U$
$\frac{\frac{180}{500}-0,4}{\sqrt{\frac{0,4\cdot 0,6}{500}}} = -1,87$
H_0 *zamítáme*

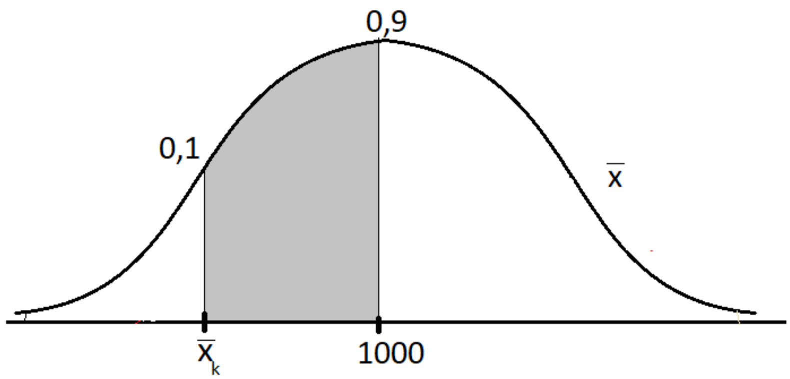


Úloha 10.3
ŘEŠENÍ
500 *lidí*

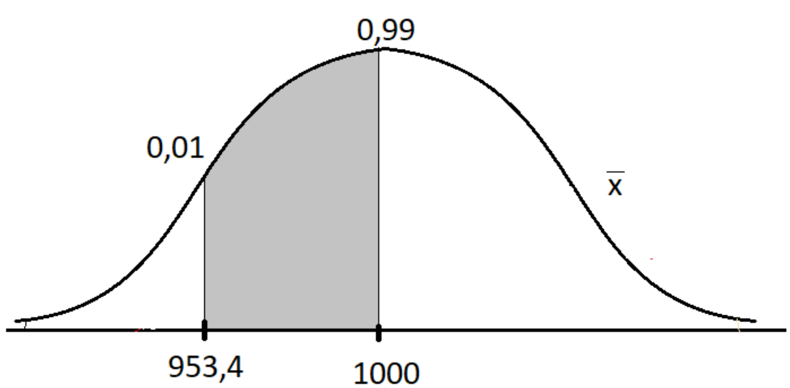
$\alpha = 0,05$
významně se liší od 40%
H_0 *nezamítneme, že nespokojených voličů je* 40%

$500 \cdot 0,4 = 200$ *nespokojených voličů*
$\alpha = 0,05$ *chyba* 1. *druhu*
$K1:$
$[H_0:$ *nezamítneme, že nespokojených voličů je* 40% $EX = 200]$
$[H_1:$ *zamítneme, že nespokojených voličů je* 40% $EX \neq 200]$
$K2: 200$ *voličů*
$K3: X \ {}^{H_0}B_i(N = 500, p = 0,4)$
$K4: \alpha = 0,05$
$N_0(\mu = 200, \sigma^2 = 120, \sigma = \sqrt{120})$
$U = \frac{x-\mu}{\sigma}$
$U = \frac{x-200}{\sqrt{120}}$
$\pm 1,96 = \frac{x-200}{\sqrt{120}}$
$x_{m,v} = (\pm 1,96 \cdot \sqrt{120}) + 200$
$x_v = 221,4707$
$x_m = 178,5292$

Úloha 10.4 *ŘEŠENÍ*
$K1:$
H_0... *poruchovost nezávisí na počtu strojů* $EX = 1000$
H_1... *poruchovost závisí na rozdílném počtu strojů* $EX < 1000$
$K2: X =$ *poruchovost v hodinách* 25 *náhodných strojů*
$K3: X \ N_0 \ (\mu = 1000, \frac{\sigma^2}{N} = \frac{10000}{25})$
$\sigma^2 = 400$
$\sigma = 20$
$K4:$ *a)*$\alpha = 0,1$
tabulka: $0,9 \to 1,29$
$-1,29 = \frac{\overline{x_k}-1000}{20}$
$\overline{x_k} = 974,2$
$970 \notin (974,2; 1000)$
H_0 *zamítnuto*



b) $\alpha = 0,01$
tabulka: $0,99 \rightarrow 2,33$
$-2,33 = \frac{\overline{x_k}-1000}{20}$
$\overline{x_k} = 953,4$
$970 \in (953,4; 1000)$
H_0 *nezamítnuto*



Úloha 10.5 *ŘEŠENÍ*
$P(x < 970) \rightarrow P(U < \frac{970-1000}{20}) = P(U < -1,5) = 1 - P(U < 1,5) = 0,0668 \rightarrow \alpha < 0,0668$

11 t-test, interval spolehlivosti

Text cvičení je neúplný – celá zadání úloh najdete v přednáškovém textu, kapitole 11.

Úloha 11.1 *z přednášky* 10, *probraný cca v minutáži* 15.00 *až* 1 : 04.

Úloha 11.2 *ŘEŠENÍ*
víme: $\sigma = 100$ *bodů*
$\overline{x} = 540$ *bodů*
$N = 25$
$U_{0,95} = 1,64$
$\sigma^2_{\overline{x}} = \frac{1}{25} \cdot 10000 = 400$
$\sigma_{\overline{x}} = \sqrt{400} = 20$

$\mu_{\overline{x}} \in (\overline{x} - U_{0,95} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}; \infty)$
$\mu_{\overline{x}} \in (540 - 164 \cdot 20; \infty)$
$\mu_{\overline{x}} \in (507,2; \infty)$

Úloha 11.3 *ŘEŠENÍ*

Úloha 11.4 *Určete p-hodnotu jednostranného statistického testu z předchozí úlohy 11.3.*

$P(\overline{x} > 8) = p$
$1 - F(8) = p$
$1 - t(\frac{8-6}{1}) = p$
$1 - t(2) = p$
$0,058 = p$

Úloha 11.5 *Zkonstruujte příslušný jednostranný* 95%*-ní interval spolehlivosti pro střední hodnotu délky z úlohy 11.3.*

Úloha 11.6 *ŘEŠENÍ*
$K1$
$H_0 : \mu_{\overline{x}} = 1000$
$H_1 : \mu_{\overline{x}} \neq 1000$

$K2$
$\frac{\overline{x}-1000}{\sqrt{\frac{est\sigma^2}{N}}}$
$est\ \sigma^2 = \overline{S^2} = 625$

$K3$

$t(v = 20 - 1 = 19)$

$K4$
t_k *je na průsečíku řádku* $v = 19$ *a sloupce* $\alpha = 0,05 = 2q$
tj. $t_m = -2,093;\ t_v = 2,093$

$K5$
$\frac{1024-1000}{\sqrt{\frac{625}{20}}} \approx 4,29;\ 4,29 \notin (-2,093; 2,093)$

H_0 *zamítáme*

Úloha 11.7 *U testu a dat z úlohy 11.6*

a) *utvořte* 95*-ní interval spolehlivosti pro střední hodnotu* μ *průměrné životnosti,*

b) *určete p-hodnotu.*

ŘEŠENÍ

a) $\mu \in (1024 \pm 2,093 \cdot \sqrt{\frac{625}{20}} = (\overline{x} \pm t_k \cdot \sqrt{\frac{S^2}{N}}) = (1012,299; 1035,7)$

b) *p-hodnota:* $2 \cdot (1 - F(4,29)) = 2 \cdot (1 - 0,9998) = 0,0004$

Úloha 11.8 *ŘEŠENÍ*

a) $\mu_1 = \overline{x_1} \pm t_k(N-1) \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{N_1}}$
$\overline{x_1} = \frac{2+5+4+2+1+4}{6} = 3$
$N = 6$
$t_k(N-1) \rightarrow$ *z tabulky* $= \pm 2,228$
$\sigma^2 = 2,2\ \overline{s_1^2} = 2,4$
$\overline{s_2^2} = 2$
$\overline{x_2} = \frac{6+4+5+7+3+5}{6} = 5$
$\mu_1 = 3 \pm 2,228 \cdot \sqrt{\frac{2,2}{6}} = 3 \pm 1,35$
$\mu_2 = 5 \pm 2,228 \cdot \sqrt{\frac{2,2}{6}} = 5 \pm 1,35$

b) $\overline{x_1} = 3;\ \overline{S_1^2} = 2,4;\ v_1 = 5$
$\overline{x_2} = 5;\ \overline{S_2^2} = 2;\ v_1 = 5$

$K1:$
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$
$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

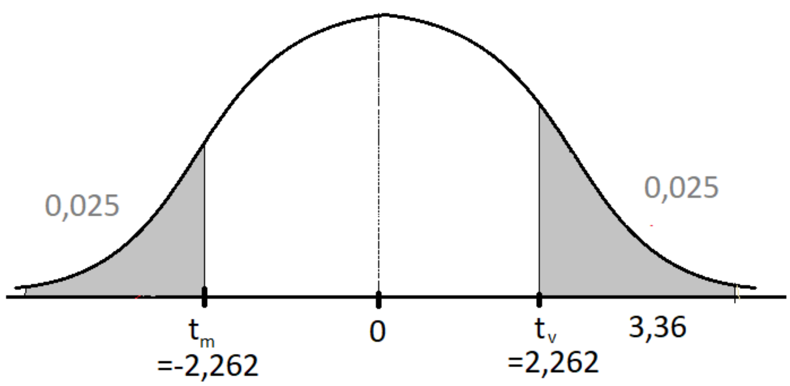
$K2$
$\frac{\overline{x_1}-\overline{x_2}-0}{est\sigma_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}}$
$\sigma^2 = 2,2$
$est\ \sigma^2_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = 0,733$
$est\ \sigma_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = 0,85634$

$K3 : \frac{\overline{x_1}-\overline{x_2}-0}{est\ \sigma_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}}\ t(\nu = 10)$
$K4 : \alpha = 0,05$
$K5 := \frac{3-5-0}{0,85634} = -2,3335 \notin (-2,228; 2,228)$
$\rightarrow\ H_0$ *zamítáme*
druhorození mají statisticky více schůzek

c) $p = 2\cdot(1 - F(2,336)) = 2\cdot(1 - 0,979188) = 0,041624$
$pt(2.336, 10) = 0,979188$

Úloha 11.9 *ŘEŠENÍ*

a) $t = \pm 2,262\ (2q = 005)$
$H_0 \notin (-2,262; 2,262)\ \rightarrow\ H_0$ *zamítáme*
Hodnoty denního světla jsou vyšší než světla umělého.



b) *př.* $\mu \in 1,6 \pm 2,262\cdot\sqrt{\frac{2,27}{10}}$
$\mu \in (0,522; 2,678)$

c) *p-hodnota*
$2\cdot(1 - F(3,36)) =$
$0,00839 = 2\cdot(1 - pt(3.36, 9) = p))$

12 testy chí kvadrát

Úloha 12.1 *Prodej Kola-loky má normální rozdělení se střední hodnotou* 82000 *lahví denně a směrodatnou odchylkou* 1500 *lahví denně. V zájmu výrobce je snížit tuto směrodatnou odchylku, protože by to učinilo obchod pružnějším. Proto se snaží o novou reklamu výrobku. Prvních deset dnů „nového“ prodeje vykazuje tyto výsledky (v počtech prodaných lahví):*

$$81752, 83812, 82104, 82529, 82620, 82033, 81925, 81599, 82730, 81885.$$

Ověřte oboustranným testem (z něho to bude také dobře vidět), zda nová reklama snížila směrodatnou odchylku počtu prodaných lahví za den.

Úloha 12.2 *Výška mužů v USA má normální rozdělení se střední hodnotou* 70 *palců (jeden palec =* 2,54 *cm) a směrodatnou odchylkou dva palce. Antropologa Františka Neználka zajímá, zda muži kmene Bora-Bora mají tentýž rozptyl hodnot své výšky. Získá náhodně vybraný vzorek sedmi mužů kmene Bora-Bora:*

$$69, 68, 68, 67, 70, 71, 69.$$

Může zamítnou nulovou hypotézu o stejných rozptylech?

Úloha 12.3 *Honza Kovář pracuje v mincovně. Jeho úkolem je zajistit, aby mince byly dobře vyváženy – aby například při hodu desetikorunou padal rub i líc stejně často. Proto hodí stovkou desetikorun a padne mu* 61*-krát líc. Testujte následující hypotézy:*
H_0*: pravděpodobnost padnutí líce je* 0,5*;*
H_1*: pravděpodobnost padnutí líce není* 0,5.

Úloha 12.4 *Rozdělení IQ v České Republice je normální (v matematickém slova smyslu) se střední hodnotou* 100 *a rozptylem* 225*. Náhodně vybraný vzorek obyvatel Brna prokázal následující rozdělení IQ:*

IQ	< 55	$55-70$	$70-85$	$85-100$	$100-115$	$115-130$	$130-145$	> 145
četnost	20	17	29	52	63	42	13	14

Řekli byste, že brňané dostatečně stejně reprezentují Českou Republiku ve vztahu k IQ? Proveďte statistický test dobré shody v tomto případě.

Úloha 12.5 *Je prováděn výzkum, který má potvrdit, že očekávání u člověka ovlivňuje výsledek experimentu. Každému z devíti náhodně vybraných učitelů Katedry matematiky je přidělen jeden náhodně vybraný student. Čtyřem učitelům je neformálně řečeno, že jejich student není zrovna nejchytřejší, pěti ostatním je řečeno, že jejich student je celkem inteligentní. Pak každý vyučující podrobil svého studenta testu ze statistiky, a pečlivě přitom pokládal otázky a zaznamenával počet chyb. Získala se data*

a) *U studentů, kteří byli nepřímo představeni jako inteligentní:* 6, 8, 5, 12.

b) *U studentů, kteří byli nepřímo představeni jako ne zrovna nejchytřejší:* 10, 2, 14, 9, 4.

Ověřte neparametrickým testem, zda tato data potvrzují hypotézu, že vyučující, který studenta předem (= a priori) považuje za chytrého, mu napočítá méně chyb.

Úloha 12.6 *Dělníky na stavbě zajímá otázka, zda mají ve svých kancelářích více knih politici nebo psychologové; navštíví kancelář několika z nich a spočítají všechny knihy na regálech. Určete pomocí neparametrického testu, zda existuje významný rozdíl v počtu knih u těchto dvou profesí.*

a) *Politikové (9 lidí):* 87, 72, 65, 54, 67, 76, 73, 82, 104.

b) *Psychologové (12 lidí):* 131, 94, 77, 88, 116, 90, 87, 76, 95, 164, 127, 77.

Ověřte neparametrickým testem, zda tato data potvrzují hypotézu, že vyučující, který studenta předem (= a priori) považuje za chytrého, mu napočítá méně chyb.

Řešení některých příkladů najdete na konci textu v oddílu 13.12.

13 Výsledky některých příkladů

13.1 Výsledky ke cvičení 1 – průměr

13.2 Výsledky ke cvičení 2 – popisná statistika

ad 2.1 **ad a)** Příslušné hodnoty četností ν_i a pravděpodobností $p(\nu_i)$ jsou v tabulce:

ν_i	1	2	3	4	5
$c(\nu_i)$	19	11	17	19	11
$p(\nu_i)$	0,247	0,143	0,221	0,247	0,143

ad b) Využijeme vzorce pro případ známých četností: $\overline{x} = 2{,}896$, $s^2 = 1{,}937$, $s = 1{,}392$.

ad 2.2 Uvedený příklad ilustruje možnost vytváření rozdělení četností i ve spojitém případě.

ad a) Příslušné rozdělení četností pro vytvořené třídy je v tabulce:

interval (=třída)	$< 0; 3)$	$< 3; 6)$	$< 6; 9)$	$< 9; 12)$	$< 12; 15)$	$< 15; \infty)$
reprezentant třídy	1,5	4,5	7,5	10,5	13,5	16,5
četnost třídy	14	9	2	2	1	1

ad b) $\overline{X} = \frac{1}{29} \cdot \sum x_i = 4{,}2276$, $s^2 = 17{,}3964$, $s = 4{,}1709$.

ad c) $\overline{X} = 4{,}3966$, $s^2 = 15{,}1958$, $s = 3{,}8982$. Hodnoty b) jsou samozřejmě přesnější, ale pokud bychom měli k dispozici jen intervalové rozdělení četností a už neměli přístup k původním hodnotám měření, tak $\overline{x}$, s^2 a s vypočtené zde nám dávají celkem solidní popis veličiny X (četnosti v posledních dvou intervalech jsou rovny jedné - kdybychom tedy místo středu intervalu brali jako reprezentanta příslušnou jedinou hodnotu, parametry ad c) by byly ještě lepším odhadem přesných ad b)).

13.3 Výsledky ke cvičení 3

13.4 Výsledky ke cvičení 4

13.5 Výsledky ke cvičení 5

13.6 Výsledky ke cvičení 6

13.7 Výsledky ke cvičení 7

ad 7.1 ad a) $p_0 = 0{,}167$; $p_1 = 0{,}278$; $p_2 = 0{,}278$; $p_3 = 0{,}278$. Musí platit $\sum p_i = 1$ (přesně to tak není díky tomu, že jednotlivé pravděpodobnosti jsou zaokrouhleny na tři desetinná místa).

ad b) Distribuční funkce je schodová funkce analogická např. distribuční funkci z příkladu 7.1 na přednášce s tím rozdílem, že nyní má čtyři schody v bodech 0, 1, 2, 3 o výškách p_0, p_1, p_2, p_3.

ad c) $EX = \frac{5}{3} \doteq 1{,}6667$, $DX = 1{,}114222$.

ad 7.2 X udává počet úspěšných pobytů na pálce ze dvou možných – může tedy nabývat hodnoty 0, 1 nebo 2. Pravděpodobnost, že ani jeden ze dvou pobytů na pálce nebude úspěšný, vypočteme jako pravděpodobnost průniku jevů (pobyt1ne)∩(pobyt2ne): $P(X = 0) = 0{,}75 \cdot 0{,}75 = 0{,}5625$. Podobně snadný je výpočet pravděpodobnosti, že oba pobyty byly úspěšné - zde při výpočtu průniku jevů (pobyt1ano)∩(pobyt2ano) podle **??** máme $P(X = 2) = P((\text{pobyt1ano})\cap(\text{pobyt2ano})) = P(\text{pobyt1ano})\cdot P(\text{pobyt2ano}|\text{pobyt1ano}) = 0{,}25 \cdot 0{,}35 = 0{,}0875$. Nejkomplikovanější je výpočet pravděpodobnosti, že ze dvou pobytů bude úspěšný právě jeden. Respektive pokud bychom využili toho faktu, že součet diskrétních pravděpodobností je roven jedné, máme $P(X = 1)$ hned: $P(X = 1) = 1 - 0{,}5625 - 0{,}0875 = 0{,}35$. Z pedagogických důvodů vypočtěme $P(X = 1)$ ještě jinak, že totiž sečteme pravděpodobnost navzájem se vylučujících situací: $P(X = 1) = P((\text{pobyt1ano})\cap(\text{pobyt2ne}))\cup P((\text{pobyt1ne})\cap(\text{pobyt2ano})) = P((\text{pobyt1ano})\cap(\text{pobyt2ne}))+P((\text{pobyt1ne})\cap(\text{pobyt2ano}))$. Takže dostaneme $P(X = 1) = 0{,}25 \cdot 0{,}65 + 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 0{,}35$ – vyšlo to!!

ad 7.3 ad a) $P(X = 0) = 0{,}1$; $P(X = 1) = 0{,}09$; $P(X = 2) = 0{,}081$; $P(X = 3) = 0{,}0729$; $P(X = 4) = 0{,}06561$; $P(X = 5) = 0{,}59049$. Pokud by se (až na zaokrouhlovací chybu) součet těchto hodnot nerovnal jedné, byl by to dobrý náznak, že někde se stala chyba.

ad b) $EX = 3{,}6856$, $DX = 3{,}2985$.

ad 7.4 a) 0,02625 b) 0,03125 c) $1 - 0{,}03125 = 0{,}96875$ d) 0,625 e) 1 f) $F(x)$ určíme podle nenápadného vzorce v textu, který ani nemá číslo. Tak už to v životě bývá, že ty nejdůležitější vzorce a události dějin zůstávají zapomenuty; strašně mě zaráží jedna taková věc z Bible, z knihy Přísloví:

Bylo malé město a v něm hrstka mužů. Tu přitáhl na ně velký král, obklíčil je a zbudoval proti němu mohutné náspy. Našel se pak v něm nuzný moudrý muž, který by byl to město svou moudrostí zachránil, ale nikdo si na toho nuzného muže ani nevzpomněl.

$$F(x) = P(X < x) = P(X \in (-\infty, x)) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Tak tedy

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \dots \text{ pro } x \leq 0; \\ \frac{x^2}{2} & \dots \text{ pro } x \in (0; 1\rangle; \\ \frac{1}{2} + \frac{x-1}{2} & \dots \text{ pro } x \in (1; 2\rangle; \\ 1 & \dots \text{ pro } x > 2. \end{cases}$$

ad 7.5 Ze vztahu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$ lze určit, že $c = \frac{1}{2}$. Pak

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-x} & \dots \text{ pro } x > 0; \\ \frac{1}{2} \cdot e^{x} & \dots \text{ pro } x \leq 0. \end{cases}$$

Při odstraňování absolutní hodnoty v integrované funkci musíme situaci rozdělit na dva případy (případ $x \leq 0$ a případ $x > 0$), odtud i dvojí tvar funkce $F(x)$.

ad 7.6 **ad a)** $P(X < 90) = F(90) = 1 - e^{-\frac{90}{100}} = 0{,}593$;
ad b) $P(X \in (80; 120)) = F(120) - F(80) = 1 - e^{-1{,}2} - 1 + e^{-0{,}8} = 0{,}148$;
ad c) $P(X > 150) = 1 - F(150) = 1 - 1 + e^{-1{,}5} = 0{,}223$.

ad 7.7 Rozdělení pravděpodobnosti a rozdělení četnosti je dáno v tabulce:

známka ν_i	1	2	3	4	5
pravděpodobnost $p(\nu_i)$	0,166	0,277	0,277	0,185	0,093
četnost $c(\nu_i)$	216	360	360	240	120

Dále pomocí hodnot pravděpodobností vypočteme očekávané (průměrné) ohodnocení $EX = 2{,}756$ a rozptyl tohoto ohodnocení $DX = 1{,}456$.

ad 7.8 **a)** $P(X = 0) = \frac{2}{3}$;
$P(X = 1) = \frac{2}{9}$;
$P(X = 2) = \frac{2}{27}$;
atd. $P(X = k) = \frac{2}{3^{k+1}}$, atd.

b) $EX = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X = k) = 0 + 1 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{2}{27} + \cdots =$
$= \frac{2}{9} \cdot \left(1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots\right)$
a nyní tuto nekonečnou řadu v závorce sečteme tak, že místo jedné třetiny napíšeme x a řadu

$$s(x) = 1 + 2 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x^3 + \dots$$

sečteme tak, že ji zintegrujeme člen po členu, sečteme (už bude možné sečíst snadno podle vzorce pro součet geometrické řady) a výsledek zderivujeme; až takto získáme součet $s(x)$, dosadíme zase zpět konkrétní hodnotu $x = \frac{1}{3}$. Tím jsme vyřídili součet řady v závorce, vrátíme se k celému výpočtu a výsledek je jedna polovina.

ad 7.9 Při odstraňování absolutní hodnoty rozdělíme integrovaný interval na dvě části, a pak u každé části provádíme per partes. Z grafu hustoty je vidět, že $EX = 0$, ovšem při výpočtu rozptylu se integrování nevyhneme: $DX = EX^2 - E^2X = EX^2 - 0 = 2$.

ad 7.10 $EX = \frac{19}{24} = 0{,}7917$, $EX^2 = \frac{25}{32} = 0{,}7812$, tj. $DX = EX^2 - E^2X = 0{,}1544$.

ad 7.11 $EX \doteq 1{,}22$; $EX^2 = 1{,}5$, tj. $DX = EX^2 - E^2X = 0{,}0116$.

13.8 Výsledky ke cvičení 8

13.9 Výsledky ke cvičení 9

13.10 Výsledky ke cvičení 10

13.11 Výsledky ke cvičení 11

13.12 Výsledky ke cvičení 12

ad 12.1. $\sigma_0 = 1500$, $n = 10$,

$$s^2 = \frac{1}{n}\left(\sum x_i^2\right) - \overline{x}^2 = \frac{1}{10}\cdot 67734929545 - \left(\frac{1}{10}\cdot 822989\right)^2 = 384013{,}29,$$

pak $\overline{s^2} = \frac{10}{9}\cdot s^2 = 426681{,}433$. Test:
H_0: $\sigma^2 = 1500^2$;
H_1: $\sigma^2 \neq 1500^2$;

$$\text{kritérium} \ldots \frac{n\cdot S^2}{\sigma_0^2} = \frac{10\cdot 384013{,}29}{1500^2} \doteq 1{,}7 \notin (2{,}70039; 19{,}0228);$$

s devíti stupni volnosti pro $\alpha = 0{,}05$ tedy H_0 zamítáme, snížení odchylky se prokázalo.

ad 12.2. Hodnota kritéria je 5, nemůžeme zamítnout H_0.

ad 12.3. Hodnota kritéria je 4,84, což je statisticky významné, zamítáme H_0.

ad 12.4. Protože normální rozdělení představuje spojitou náhodnou veličinu, dovolte mi celý příklad provést podrobně:
Potřebujeme vlastně jen znát pravděpodobnosti, s jakými nabývá normálně rozdělená veličina hodnot z uvedených intervalů
– četnosti pak získáme vynásobením těchto pravděpodobností číslem 242 (počet vybraných obyvatel);
záhlaví (první sloupec) tabulky vynechávám, aby se vešel poslední sloupec:

< 55	$55 - 70$	$70 - 85$	$85 - 100$	$100 - 115$	$115 - 130$	$130 - 145$	> 145
0,0013499	0,0214002	0,1359052	0,3413447	0, 3413447	0,1359052	0,0214002	0,0013499
0,33	5,18	32,89	82,605	82,605	32,89	5,18	0,33

Například hodnotu 0,0013499 lze vypočíst následovně:

$$P(X \in (0; 55)) = \Phi\left(\frac{55-100}{15}\right) - \Phi\left(\frac{0-100}{15}\right) \doteq \Phi(-3) - \Phi(-6{,}67) \doteq \Phi(-3) = 0{,}0013499.$$

Četnost pak spočteme jako $242\cdot 0{,}0013499 \doteq 0{,}33$. Další hodnoty v tabulce získáme analogicky. Nyní dosazením četností z této tabulky a tabulky zadání do vzorce kritéria testu dostaneme:

$$\text{krit.} = \frac{(0{,}33-20)^2}{0{,}33} + \frac{(5{,}18-17)^2}{5{,}18} + \cdots + \frac{(0{,}33-14)^2}{0{,}33},$$

což je vysoké číslo, mnohem větší než kritická hodnota $\chi_k^2(7)$, takže zamítáme hypotézu H_0 o tom, že Brno je vyváženým reprezentantem IQ v České Republice.

ad 12.5. Použijeme Mannův–Whitneyův test:

hodnota	2	4	5	6	8	9	10	12	14
pořadí	1	2	3	4	5	6	7	8	9
skupina	H	H	I	I	I	H	H	I	H

Pak $U_1 = U_I = 20 + 15 - 25 = 10$, $U_2 = 20 + 10 - 20 = 10$, odtud $10 > U_k = 1$, tj. H_0 nezamítáme (inverzní vlastnosti pro zamítnutí na rozdíl od většiny testů v tomto textu), oba soubory se statisticky významně neliší (tzv. „haló efekt“) se tedy mezi vyučujícími KM nerozšířil statisticky významně.

ad 12.6. Použijeme opět Mannův–Whitneyův test: při určování pořadí např. dvě hodnoty 76 mají pořadí 6,5, dvě hodnoty 77 mají pořadí 8,5, apod.

$$U_1 = 9 \cdot 12 + \frac{12 \cdot 13}{2} - 171 = 15, \qquad U_2 = 9 \cdot 12 + \frac{9 \cdot 10}{2} - 60 = 93,$$

tedy $U = 15 < 26 = U_k$ a ZAMÍTÁME H_0 (inverzní vlastnosti pro zamítnutí na rozdíl od většiny testů v tomto textu), mezi profesemi, co se týká objemu knih v kanceláři, je významný rozdíl.

Seznam literatury:

(Fajmon, 2021) MA 008 – přednáškový text (Teorie pravděpodobnosti).

(Fajmon, Nezval, 2021) MA 008 – s využitím Excelu (Teorie pravděpodobnosti).