

Úloha č. 10: Měření rychlosti zvuku

Úkol:

1. V zapojení dvou RC generátorů naleznete na obrazovce osciloskopu Lissajousovy obrazce pro frekvence 1:1, 2:1, 3:1, 2:3 a 1:4 a zakreslete je při fázovém rozdílu $\varphi = \pi/2$. Na jednom z generátorů mějte trvale nastavenou frekvenci 1 kHz.
2. Změřte vlnovou délku zvuku v rezonátoru rezonanční metodou a spočítejte rychlost šíření zvuku a nejistotu této rychlosti.
3. Změřte vlnovou délku zvuku v rezonátoru metodou fázového posunutí a spočítejte rychlost šíření zvuku a nejistotu této rychlosti.
4. Z rychlosti šíření zvuku určete Poissonovu konstantu pro vzduch.

Kmity a vlny

Pod vlivem lineární návratné síly $F_y = -ky$ se hmotný bod pohybuje kmitavým pohybem, při kterém nepřekročí určitou maximální vzdálenost od rovnovážné polohy (tzv. amplitudu) a závislost jeho souřadnice na čase lze popsat vztahem

$$y = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

kde je A je amplituda, ω je kruhová frekvence ($\omega = 2\pi f$) a φ je fázové posunutí.

Tento pohyb je periodický s periodou T , jejíž převrácená hodnota je frekvence $f = \frac{1}{T}$; $[\text{Hz}] = \text{s}^{-1}$. Skládáním harmonických kmitů rozumíme skládání výchylek hmotného bodu, způsobených současným působením dvou nebo více návratných sil. Pro skládání těchto pohybů platí princip superpozice, tj. má-li hmotný bod v daném okamžiku vykazovat současně dvě výchylky obecně ve směrech \vec{u}_1 , \vec{u}_2 , je jeho skutečná výchylka rovna vektorovému součtu $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$. Při skládání dvou periodických pohybů bude periodický i výsledný pohyb pouze v případě, že je splněna podmínka periodicity, tj. periody jsou v poměru celých čísel: $T_1/T_2 = n_1/n_2$ a výsledná perioda $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$.

Oba kmity probíhají v téže přímce a výsledná výchylka je rovna algebraickému součtu výchylek $y = y_1 + y_2$ podle vztahu (1):

$$y = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (2)$$

Pro nejjednodušší případ skládání dvou kmitů stejné amplitudy A , stejné frekvence a nestejného fázového posunutí ($\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \varphi$), dostaneme

$$y = 2A \cos \frac{\varphi}{2} \cos \left(\omega t \frac{\varphi}{2} \right) \quad (3)$$

Skládání kmitů vzájemně kolmých

Výchylka bodu, který koná současně různosměrné kmity, je podle principu superpozice vektorovým součtem jednotlivých výchylek. Jde-li o dva kmity vzájemně kolmé, můžeme je interpretovat jako souřadnice bodu, kmitajícího současně v ose x a ose y . Musíme ovšem respektovat, že obecně se tyto kmity mohou lišit kmitočtem, amplitudou a fází:

$$x = A \cos \omega_1 t, y = B \cos(\omega_2 t + \varphi) \quad (4)$$

Skládáním těchto kmitů pak vzniká trajektorie bodu jako rovinná křivka a je-li splněna podmínka periodicity, pak tato křivka bude uzavřená, protože se bod bude po proběhnutí periody vracet opět do výchozí polohy. Tyto uzavřené křivky se nazývají Lissajousovy obrazce.

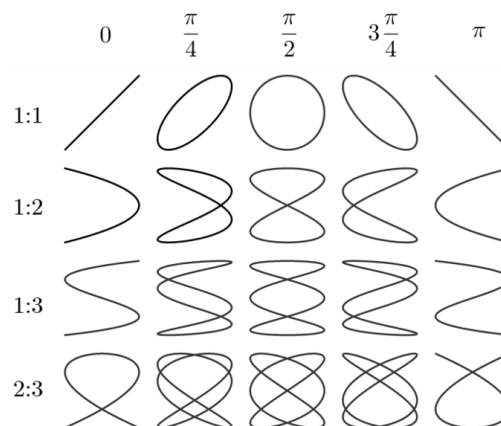
Pro nejjednodušší případ skládání dvou kolmých harmonických kmitů stejných amplitud a stejné frekvence

$$x = A \cos \omega t, y = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

dostaneme rovnici

$$x^2 - 2xy \cos \varphi + y^2 = A^2 \sin^2 \varphi \quad (6)$$

jež je rovnicí elipsy v pravouhlých souřadnicích a jejíž tvar závisí na fázovém rozdílu (φ). Mají-li vzájemně kolmé kmity různé periody a amplitudy, pak jejich složením vzniknou křivky složitějšího tvaru vyznačené na obr. 1 pro některé poměry period T_1/T_2 a některé hodnoty fázového rozdílu (φ).



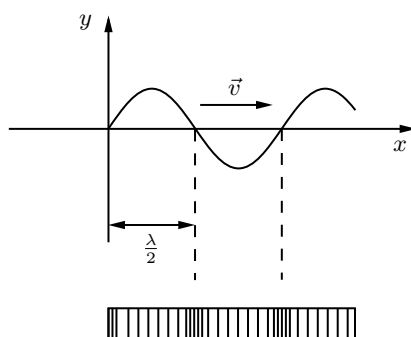
Obrázek 1: Lissajousovy obrazce

Udělíme-li hmotnému bodu, konajícímu kmitavý pohyb, počáteční rychlost v v některém směru, skládají se oba pohyby (kmitavý i postupný) a výsledným pohybem je vlnění. Děje-li se postupný pohyb rychlostí v ve směru kolmém na lineární harmonické kmity periody T , má vlnění sinusový průběh, je-li postupný pohyb konán podél směru kmitání, výchylky se dějí v bodové řadě a dochází k zhušťování a zředování bodů (obr. 2). Prvnímu vlnění říkáme příčné, druhému podélné. Postupná vzdálenost, kterou vlnění urazí za dobu jedné periody T , se nazývá vlnová délka λ :

$$\lambda = vT, v = \lambda f \quad (7)$$

Tyto vztahy uvádějí do souvislosti periodičnost časového průběhu s periodičností postupného průběhu vlnění. Harmonické vlnění s periodou T , šířící se rychlostí v bodovou řadou v ose x , je popsáno vlnovou funkcí:

$$u(x, t) = A \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (8)$$



Obrázek 2: Postupné vlnění

Vlnění se skládá podobně jako kmity. Skládání (superpozice) vlnění probíhá obdobně jako skládání kmitů a řídí se rovněž principem superpozice. Superpozicí vlnění z koherentních zdrojů označujeme jako interference vlnění. Důležitý případ superpozice dvou stejných vlnění na bodové řadě nastává, šíří-li se obě vlnění řadou v navzájem opačných směrech. Setkají-li se obě postupující vlnění v místě 0 tak, že mezi nimi není fázový posuv (obr. 3), popisují vlnění 1 a 2 vlnové funkce:

$$u_1 = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (9)$$

$$u_2 = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \quad (10)$$

a výsledné interferované vlnění je určeno součtem $u = u_1 + u_2$:

$$u = 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad (11)$$

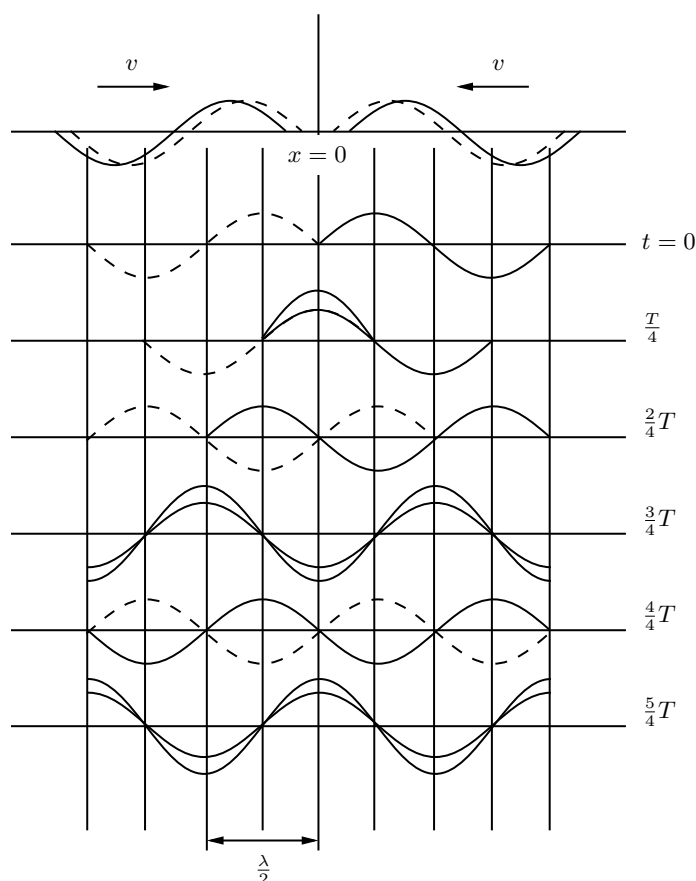
Ve všech bodech řady vzniknou jednoduché harmonické kmity se stejnou fází, ale výsledná amplituda závisí na poloze x prostřednictvím $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$. Bez zřetele k znaménku bude amplituda největší v místech:

$$\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm 1 \quad (12)$$

tedy pro

$$x = 0, \pm \frac{\lambda}{2}, \pm \frac{2\lambda}{2}, \pm \frac{3\lambda}{3}, \dots \quad (13)$$

Těmto místům říkáme kmitny. Mezi nimi leží uzly, místa v nichž jsou body v klidu, protože pro ně je amplituda stále nulová ($\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0$). Toto vlnění se nazývá stojaté.



Obrázek 3: Vznik stojatého příčného vlnění

Zvuk

Zvuk je vlnění v oboru slyšitelných frekvencí 16 až 20 000 Hz. Mají-li kmity a vlny, jimi vzbuzené, v okolním prostředí nižší kmitočet než slyšitelné zvuky, mluvíme o infrazvuku. Je-li frekvence vyšší než 20 kHz, nazýváme vlny ultrazvukovými. Podstatou akustických vln všech frekvencí jsou elastické kmity látky, které se šíří od místa k místu rychlostí závislou na mechanických vlastnostech prostředí. Kmity pevných těles se přenášejí na jiná tělesa, na kapaliny i plyny, které je obklopují a tak vznikají elastické akustické vlny.

Šíření zvuku v plynech

Pro rychlost šíření zvuku v plynech platí Laplaceův vzorec:

$$v = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} \quad (14)$$

kde je κ Poissonova konstanta; rovna poměru měrných tepelných kapacit plynu při konstantním tlaku a konstantním objemu, p je tlak plynu a ρ je hustota plynu.

Pro nepřilíši vysoké tlaky plynu platí podle stavové rovnice ideálního plynu

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} (1 + \gamma t) \quad (15)$$

takže pro rychlost šíření zvuku dostaneme vztah:

$$v = \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0} (1 + \gamma t)} \approx \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0}} \left(1 + \frac{1}{2} \gamma t \right) \quad (16)$$

tedy,

$$v = v_0 \left(1 + \frac{1}{2} \gamma t \right) \quad (17)$$

kde

$$v_0 = \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0}} \quad (18)$$

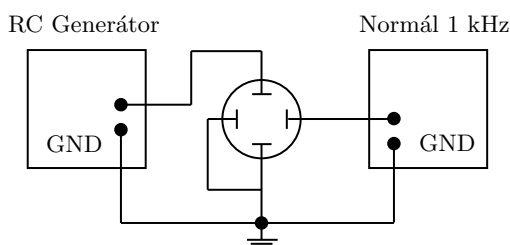
kde v_0 je rychlost šíření zvuku v plynu za normálních podmínek ($p_0 = 1,013 \cdot 10^5$ Pa, $t_0 = 0^\circ\text{C}$), $\gamma = 1/273$ je teplotní koeficient objemové roztažnosti plynu a t je teplota plynu.

Rychlost šíření zvuku v plynech závisí pouze na teplotě plynu.

K určení rychlosti šíření zvuku v plynech je třeba podle vztahu (7) určit vlnovou délku zvukových vln známe frekvence nebo podle vztahu (18) změřit teplotu plynu a určit jeho hustotu při normálním tlaku (Poissonovy konstanty plynů jsou tabelovány).

Vyhledávání Lissajousových obrazců

Na základě skládání vzájemně kolmých kmitů budeme sledovat Lissajousovy obrazce na obrazovce osciloskopu, ke kterému připojíme podle schématu na obr. 4 dva RC generátory. Ty budou sloužit jako dva zdroje kmitů různé frekvence, přiváděných na horizontální a vertikální elektrody (destičky) osciloskopu a budou tak odpovídat kmitům v ose x a y na obrazovce. Velikosti frekvencí a amplitud jednotlivých kmitů nastavujeme na stupnicích generátorů. Na ose x nastavíme trvale frekvenci 1 kHz a postupně budeme měnit frekvenci kmitů na ose y . Na obrazovce se budou postupně objevovat složité uzavřené i neuzavřené křivky a vždy, když se budeme blížit k poměru frekvencí vyjádřenému celými čísly, se objeví některý Lissajousův obrazec z obr. 1. Doladíme ho potom do co nejzřetelnější podoby, zakreslíme jeho tvar a zaznameneáme příslušnou frekvenci RC generátoru.

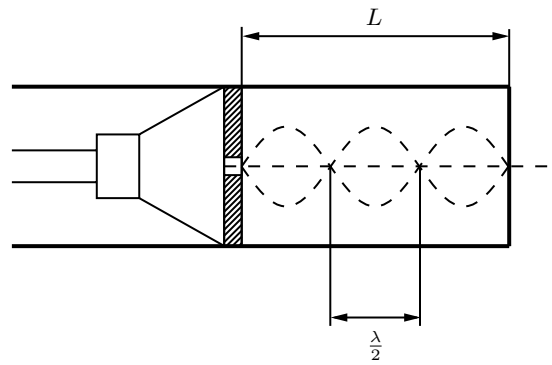


Obrázek 4: Schéma zapojení pro skládání vzájemně kolmých kmitů

Měření vlnové délky rezonanční metodou

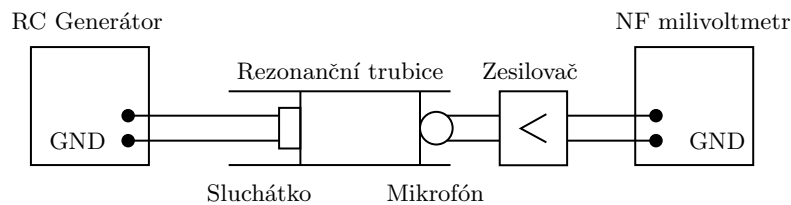
Metoda spočívá v měření vlnové délky stojatého vlnění, které se vytvoří v uzavřeném rezonátoru (obr. 5). Jeden z uzávěrů rezonátoru je tvořen pohyblivým pístem, opatřeným otvorem, kterým vniká do rezonátoru vlnění ze zdroje. Stojaté vlnění vznikne interferencí vlnění ze zdroje a vlnění odraženého na konci rezonátoru, postupujících proti sobě (viz obr. 3). Vzniklé stojaté vlnění má maximální amplitudu, je-li délka vzduchového sloupce L , uzavřeného pístem v trubici, rovna právě celistvému násobku půlvlny:

$$L = k \frac{\lambda}{2}, k = 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$



Obrázek 5: Uzavřený rezonátor

a v trubici dojde k rezonanci. Pohybem pístu lze postupně realizovat jednotlivé rezonanční délky ($k = 1, 2, 3, \dots$) a vzdálenost po sobě následujících rezonančních poloh pístu je rovna právě $\frac{\lambda}{2}$. K vlastnímu měření použijeme uspořádání podle obr. 6.

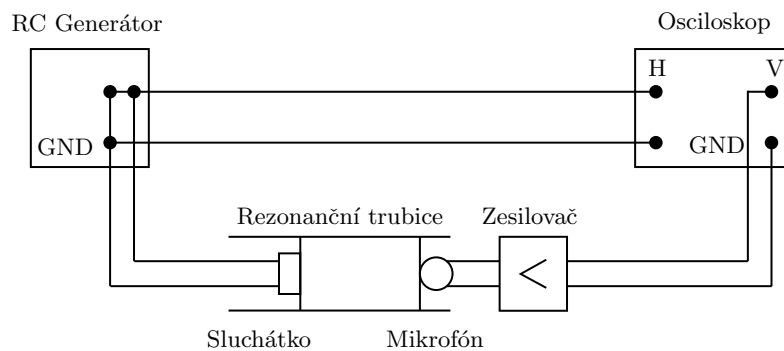


Obrázek 6: Schéma zapojení pro rezonanční metodu

Zdrojem zvuku, vnikajícího do skleněného uzavřeného rezonátoru, je telefonní sluchátko, napájené střídavým napětím známé frekvence z tónového RC generátoru. Elektrické kmity z generátoru rozkmitají se stejnou frekvencí membránu sluchátka, která rozkmitá vzduchový sloupec v trubici. Vytvořené stojaté vlnění v trubici indikujeme mikrofonom, v němž je zvukové vlnění převedeno zpět ve střídavý elektrický signál, který pak přivádíme přes zesilovač na nízkofrekvenční milivoltmetr (NF). Posunem pístu se sluchátkem hledáme rezonanční polohu, jež se projeví maximálním napětím na milivoltmetru. Jednotlivé po sobě jdoucí rezonanční polohy pístu odečítáme na stupnici umístěné na tyči, která posuv pístu ovládá. Vzdálenost sousedních poloh je rovna 2λ . Protože konec jednoho měření je počátkem měření následujícího, zpracujeme naměřené hodnoty postupnou metodou.

Měření vlnové délky zvuku metodou fázového posunutí

Fázový posuv kmitů membrány sluchátka vůči kmitům registrovaných mikrofonom se změní o hodnotu 2π , zvětší-li se délka zvukového sloupce L o vlnovou délku λ . Složíme-li oba kmity, jež mají stejnou amplitudu i frekvenci ve směrech navzájem kolmých, dostaneme rovnici křivky (6). V závislosti na fázovém posuvu vznikají křivky podle 1. řádku obr. 1. K vlastnímu měření použijeme uspořádání podle obr. 7. Z tónového generátoru se přivádí střídavé napětí známé frekvence jednak na sluchátko, jednak na horizontální destičky osciloskopu. Na vertikální destičky osciloskopu přivedeme přes zesilovač napětí z mikrofону. Na obrazovce osciloskopu se objeví obecně elipsa. Posuvem pístu se mění délka vzduchového sloupce a změnou délky se mění fázový posuv obou skládaných kmitů. Je-li $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$, dostaneme podle 1. řádku obr. 1 na osciloskopu úsečky procházející (1. a 3.) a (2. a 4.) kvadrantem a jednomu překlopení úsečky odpovídá posuv pístu o hodnotu $\lambda/2$. Posuvem pístu hledáme polohy, v nichž se na osciloskopu objeví úsečka. Naměřené hodnoty opět zpracujeme postupnou metodou.



Obrázek 7: Schéma zapojení pro metodu fázového posuvu

Orientační postup

- Zapojte přístroje podle obr. 4 a vyhledejte Lissajousovy obrazce pro poměry frekvencí kmitů 1:1, 2:1, 3:1, 2:3 a 1:4. Tyto poměry lze určit z poměru počtu dotyků křivky se stranami obdélníka, které jsou rovnoběžné s osami x a y. Nalezené tvary obrazců nakreslete pro fázový posuv 90° do protokolu.
- Zapojte úlohu podle obr. 6 a na RC generátoru nastavte frekvenci 2kHz. Měřte rezonanční metodou souřadnice jednotlivých maxim podle odstavce 2.2 a výsledky zpracujte postupnou metodou. Rychlost šíření zvuku počítejte ze vztahu (7).
- Zapojte úlohu podle obr. 7 a postupujte podle odstavce 2.3. Rychlost šíření zvuku i zde počítejte podle vztahu (7).
- Spočítejte Poissonovu konstantu ze vztahu (18). Normální podmínky $p_0 = 101324,72 \text{ Pa}$, $\rho_0 = 1,293 \text{ kg m}^{-3}$, t je ve $^\circ\text{C}$.