Fyzikální praktikum 2

Úloha č. 1: Měření tíhového zrychlení reverzním kyvadlem

Úkol:

1. Urči tíhové zrychlení Země

Tíhové zrychlení je zrychlení volného pádu ve vakuu. Jeho velikost se mění se zeměpisnou šířkou a nadmořskou výškou. Rozměr tíhového zrychlení v soustavě SI je $\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Mezi jednoduché, ale současně velmi přesné, metody pro zjištění velikosti tíhového zrychlení patří měření pomocí kyvadel.

Doba kmitu T matematického kyvadla délky l je (pro velmi malé výchylky) dána vztahem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1}$$

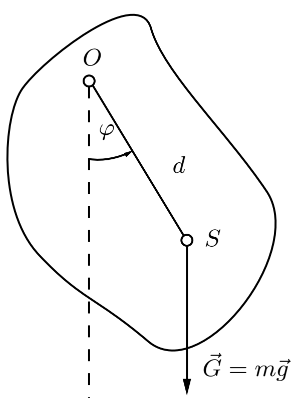
kde g je tíhové zrychlení. Z tohoto vztahu lze velmi jednoduše tíhové zrychlení zjistit, změříme-li dobu kmitu T matematického kyvadla a jeho délku. Překážka pro měření však spočívá v realizaci matematického kyvadla, které je definováno jako hmotný bod zavěšený na nehmotném závěsu. V praxi se můžeme velmi přiblížit podmínkám, za kterých byla rovnice 1 odvozená tím, že necháme kývat těžkou kouli na lehkém, tenkém vlákně. Vhodně realizované podnínky tohoto experimentu umožní změřit tíhové zrychlení s přesností větší než 1 %.

Přesnějších výsledků při měření tíhového zrychlení lze dosáhnout měřením doby kmitu fyzických kyvadel.

Fyzickým kyvadlem rozumíme každé tuhé těleso libovolného tvaru, které je volně otáčivé kolem pevné osy, neprocházející jeho hmotným středem. Po vychýlení kyvadla hmotnosti m z rovnovážné polohy a uvolnění bude kyvadlo vykonávat kmitavý pohyb kolem pevné osy **O**. Pohyb fyzického kyvadla bude popsán pohybovou rovnicí

$$J\frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 t} = -m\ g\ d\ \sin\varphi \tag{2}$$

kde J je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení **O**, d je vzdálenost této osy od hmotného středu kyvadla **S**.



Moment tíhy $M = m\ g\ d\ \sin\varphi$ vzhledem k ose otáčení O je orientován proti výchylce, proto je v rovnici znaménko mínus.

Pro malé výchylky φ ($\varphi \leq 4°$) můžeme psát $\sin\varphi \approx \varphi_{rad}$. Pohybová rovnice potom přejde na tvar

$$J\frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 t} = -m\ g\ d\ \varphi \tag{3}$$

Převedení na levou stranu a dalšími úpravami dostáváme pohybovou rovnici netlumeného harmonického pohybu

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 t} + \omega^2\varphi = 0 \tag{4}$$

kde výraz $\omega^2 = \dfrac{m\ g\ d}{J}$ nazýváme *kruhovou frekvencí*. Její souvislost s dobou kmitu T je dána známým vztahem

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m\ g\ d}} \tag{5}$$

Pro určení tíhového zrychlení využívárne doby kmitu tzv. reverzního kyvadla. Je to fyzické kyvadlo, které se kývá s stejnou dobou kmitu kolem dvou rovnoběžných os, ležících v rovině, která prochádzí hmotným středem kyvadla. Shoda doby kmitu kolem obou os může nastat ve dvou případech:

- osy jsou symetricky položeny vzhledem ke hmotnému středu fyzického kyvadla
- osy jsou od sebe vzdáleny o redukovanou délku fyzického kyvadla.

Přitom redukovanou délkou fyzického kyvadla rozumíme takovou délku matematického kyvadla, které bývá se stejnou dobou kmitu jako uvažovažované kyvadlo fyzické.

Pro experimentální využití je důležitý případ druhý, kdy se problem omezuje na hledání redukované délky fyzického kyvadla l_r. Nalezneme-li v kyvadle dvě rovnoběžné osy, kolem nichž kyvadlo kývá se stejnou dobou kmitu a leží-li tyto osy v rovině procházející hmotným středem tak, že jsou vzhledem k němu položeny asymetricky, pak vzdálenost těchto dvou os je tzv. redukovaná délka fyzického kyvadla. Pro dobu kmitu T fyzického kyvadla s redukovanou délkou l_r platí formálně shodný vztah jako pro dobu kmitu matematického kyvadla (1), v němž však délka l je nahrazená redukovanou délkou l_r, takže

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}} \tag{6}$$

Srovnáním rovnice (5) a (6) je zřejmé, že rěšením redukované délky fyzického kyvadla se vyhneneme zjišťování jeho momentu setrvačnosti J vzhledem k ose otáčení a určování vzdálenosti d osy otáčení od hmotného středu.

Konkrétní provedení reverzního kyvadla bývá různé. V běžném provedení je reverzní kyvadlo tyč opatřená dvema rovnoběžnými brity O_1 a O_2, vzdálenými o pevnou vzdálenost L. Na jednom konci tyče je těžký přívažek Z, aby bylo dosaženo nesymetričnosti poloh os vůči hmotnému středu. Posouváním přívažku můžeme docílit toho, že kyvadlo kývá kolem obou os se stejnou dobou kmitu, jinými slovy, os O_1 a O_2 se stanou osami sdruženými.

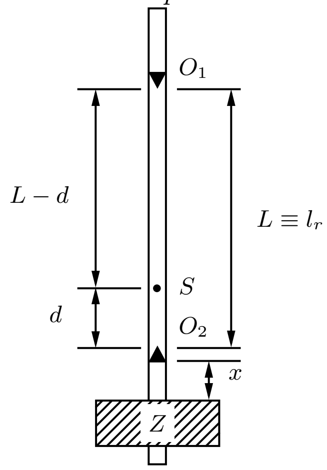
Pro určení polohy přívažku, pro niž jsou osi O_1 a O_2 osy sdružené, volíme metodu grafické interpolace. Měříme dobu kmitu T_1 a T_2 kolem os O_1 a O_2 v závislosti na poloze x přívažku Z. Změříme doby kmitu kolem obou os alespoň pro tři různé polohy přívažku.

Tíhové zrychlení vypočítame ze vztahu

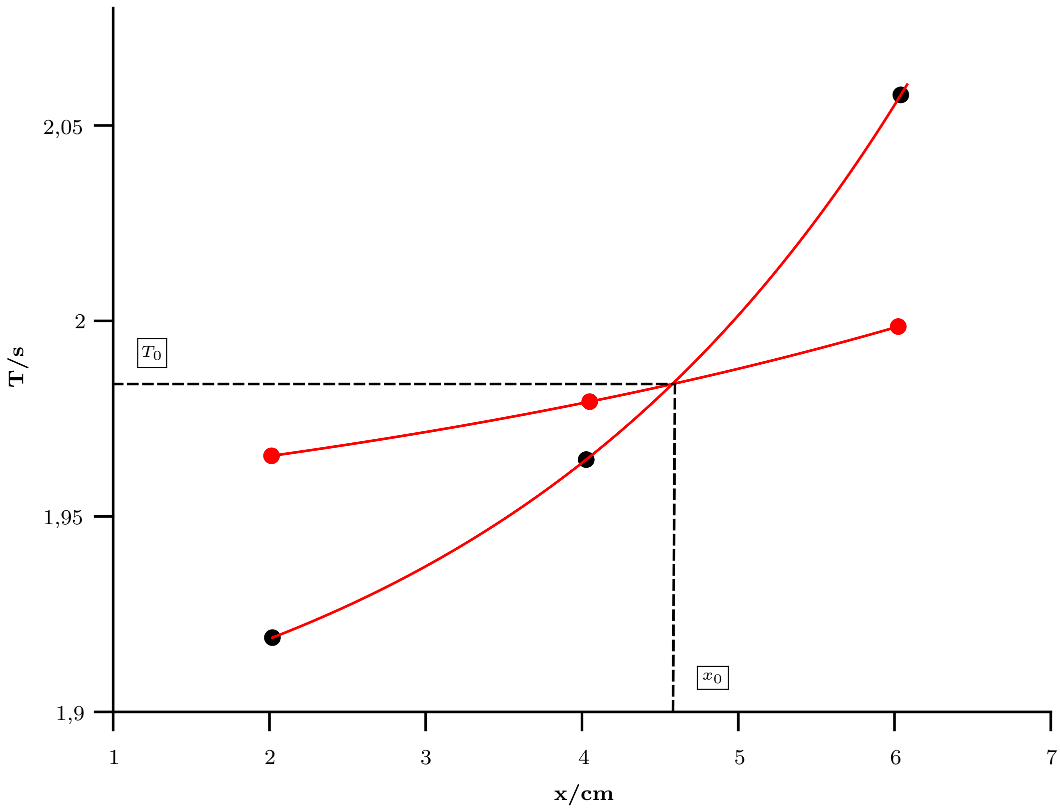
$$g = \frac{4\pi^2}{T_0^2} l_r \tag{7}$$

kde za dobu kmitu dosazujeme dobu kmitu T_0, pro sdružené osy kyvadla a za redukovanou délku l_r vzdálenost břitů kyvadla. Při běžném měření můžeme tímto postupem určit tíhové zrychlení s přesností asi 0,5%, měříme-li vzdálenost břitů pásovým měřidlem a dobu kmitu stopkami z měření 50 až 100 kmitů. Při měření doby kmitu z měření velkého počtu kmitů bývá výhodné užít omezovací metody.

Pozn.: Pokud je rozkyv φ větší než je mezní hodnota, pro kterou byl odvozen výraz (5) pro dobu kmitu, musíme udělat opravu na nulový rozkyv.



Do grafu vyneseme na osu x polohu přívažku a na osu y příslušné doby kmitů pro každou u obou os. Tak získáme pro každou osu závislost doby kmitu T na poloze x přívažku. Průsečík těchto dvou závislostí určuje takovou polohu x_0 přívažku, pro niž by měla být doba kmitu v mezích pozorovacích chyb stejná (T_0) kolem obou os.



Budou-li se však doby kmitu při nastavení závaží do polohy x_0 přesto lišit, provedeme postup grafické interpolace znovu a polohami přívažku blízkými příslušné hodnotě průsečíku x_0 obou závislostí x_0.

Orientační postup:

1. Určete vzdálenost mezi břity kyvadla.
2. Najděte polohu závaží na konci reverzního kyvadla tak, aby se kyvadlo kývalo se stejnou periodou na obou osách (použitím interpolační a omezovací metody, viz. teorie)
3. Vypočítejte tíhové zrychlení Země.

DODATEK: Omezovací metoda

Jak už bylo výše uvedeno, je vhodné, při velkém počtu dat použít omezovací metody spracování měření.

Pro měření času u periodických dějů, které se opakují ve velkém počtu a pro něž je jedna perioda delší než dvojnásobek odhadu chyby jednoho měření, můžeme použít omezovací metodu, kterou lze za uvedených předpokladů dosáhnout libovolné relativní přesnosti. Postup vyložíme na příkladu měření doby kyvu reverzního kyvadla.

Změříme stopkami např. dobu deseti kyvů:

$$10\tau = 12,2\,\mathrm{s} \tag{8}$$

Víme-li teď, že tato doba je zaručena uvnitř mezí $\pm 0,2\,\mathrm{s}$ (což je přesnost jednoho měření stopkami), můžeme zapsat:

$$12,0\,\mathrm{s} < 10\tau < 12,4\,\mathrm{s} \tag{9}$$

Pro 20 kyvů bude tedy

$$24,0\,\mathrm{s} < 20\tau < 24,8\,\mathrm{s} \tag{10}$$

Tyto meze jsou užší, než doba jednoho kyvu. Stačí tedy spustit stopky na začátku libovolného kyvu a bez počítání kyvů je zastavit při ukončení kyvu po 24,0 sekundách. Na stopkách přečteme hodnotu, např. 24,4 s. Tím se zúží meze pro 20 kyvů a bude

$$24,2\,\mathrm{s} < 20\tau < 24,6\,\mathrm{s} \tag{11}$$

Z toho pak pro 50 kyvů

$$60,5\,\mathrm{s} < 50\tau < 61,5\,\mathrm{s} \tag{12}$$

Rozdíl mezí je opět menší než doba jednoho kyvu, takže zastavením stopek po 60,5 sekundách dostaneme zase přesnější určení doby 50 kyvů. Určili jsme 61,2 s. Tím se zúží meze pro 50 kyvů a bude

$$61,0\,\mathrm{s} < 50\tau 61,4\,\mathrm{s} \tag{13}$$

Pro 100 kyvů bude tedy

$$122,0\,\mathrm{s} < 100\tau < 122,8\,\mathrm{s} \tag{14}$$

Rozdíl mezí je opět menší než doba jednoho kyvu, stačí tedy spustit stopky na začátku libovolného kyvu a bez počítání kyvů je zastavit při ukončení kyvu po 122,0 sekundách. Ukončíme-li teď měření, je údaj $100\tau = 122,4\,\mathrm{s}$ zaručen uvnitř mezí $\pm 0,2\,\mathrm{s}$

$$122,2\,\mathrm{s} < 100\tau < 122,6\,\mathrm{s} \tag{15}$$

Z toho pro dobu jednoho kyvu platí:

$$1,222\,\mathrm{s} < \tau < 1,226\,\mathrm{s} \tag{16}$$

neboli

$$\tau = (1,224 \pm 0,002)\,\mathrm{s} \tag{17}$$

Výhodou metody je, že můžeme určit dobu velkého počtu opakovaných dějů bez jejich přesného počítání. Podstatnou podmínkou použití této metody ovšem je, abychom volili jen takový násobek, aby rozdíl mezí násobku byl menší než velikost měřeného intervalu.