NÁMĚTY K ROZVÍJENÍ KOMBINAČNÍHO MYŠLENÍ

Metodický materiál pro učitele matematiky 1. stupně ZŠ

Růžena Blažková
Květoslava Matoušková
Milena Vaňurová

Brno 1998

1. Úvod

Matematické vzdělávání na prvním stupni základní školy by mělo vycházet z vlastních zkušeností dětí získaných již i v předškolním období a z přirozené touhy dětí "umět počítat". Je vhodné, jestliže děti získávají matematické poznatky prostřednictvím řešení úloh z praktického života a prostřednictvím různých činností, které mohou mít např. ráz hry. Jedna skupina úloh, které prostřednictvím hravých činností upevňují matematické učivo, je tvořena úlohami s kombinatorickými náměty. Kombinatorika není jako téma zařazena do osnov školské matematiky, ale jejích metod a postupů získávání výsledků lze velmi vhodně využít v tématech do osnov zařazených. Nejvýrazněji se prvky kombinatoriky projevují v učivu numerace v oboru přirozených čísel, operace s přirozenými čísly a v geometrickém učivu. Děti by se měly v rámci školní výuky také učit vyhledávat, zpracovávat a hodnotit získané informace, pracovat s různými tabulkami, diagramy, grafy a soubory, což jsou činnosti, které úzce souvisejí s rozvíjením tzv. kombinačního myšlení.

Kombinatorika je matematická disciplína, která se zabývá rozdělováním, uspořádáváním a výběrem prvků - tedy tvořením tzv. konfigurací daných prvků do skupin s určitými vlastnostmi. Již od prvních ročníků školní docházky je vhodné zařazovat do výuky matematiky úlohy, jejichž řešení se opírá o elementární principy kombinatoriky. Řešením těchto úloh můžeme u dětí nenásilným způsobem vytvářet a postupně rozvíjet základy kombinačního myšlení, což výrazně přispívá ke zvyšování matematické kultury dětí. Jestliže se děti naučí při hodnocení určité situace zvažovat všechny možnosti, které mohou v dané situaci nastat, a jestliže z nich umí uvědoměle vybrat tu, která je pro ně optimální, potom se učí jednat po zralé úvaze, což je pro jejich život velmi důležitý vklad.

Pojem "rozvoj kombinačního myšlení" zpravidla zahrnuje vytváření a rozvíjení specifických schopností a dovedností. Jde především o tyto schopnosti:
- uvědomovat si vztahy mezi zkoumanými objekty,
- uvědomovat si, zda v daném souboru mohou existovat skupiny prvků požadovaných vlastností,
- provádět výběr prvků z nějaké skupiny podle určitého pravidla,
- provádět rozdělování prvků dané skupiny na základě určitého požadavku,
- provádět uspořádání prvků dané skupiny daným způsobem,
- najít metodu vyhledávání všech skupin prvků s požadovanou vlastností (např. výčtem prvků, graficky, s využitím vztahů nebo vzorců),
- rozhodnout, zda jde o skupiny uspořádané nebo neuspořádané,
- rozlišit, zda se prvky ve skupinách mohou či nemohou opakovat,

- najít pravidlo pro vyhledání všech skupin splňujících podmínky dané úlohy.

Kombinatorika má pro budoucí život žáka značný význam, neboť jejích výsledků se využívá v mnoha dalších vědách - např. ve fyzice, chemii, biologii, spojovací technice, lingvistice aj. Má význam i pro další studium matematiky, neboť je předpokladem k úspěšnému zvládnutí dalších témat učiva, např. pravděpodobnosti, statistiky, teorie čísel, teorie informací, kódování, šifrování aj. V neposlední řadě má význam i pro život člověka obecně, neboť v běžném životě každý často něco vybírá a přitom zvažuje různé možnosti výběru, rozhoduje se a hledá pro sebe efektivní řešení. Děti se setkávají od malička s různými hrami (např. pexeso, karty), u kterých musí uplatnit kombinační myšlení. V praktickém životě se kombinační myšlení uplatňuje v nejrůznějších oborech činnosti, např. při sestavování jízdních řádů, rozvrhů hodin ve školách, při výběru optimálního způsobu rozdělování práce mezi dělníky nebo stroje, při rozhodování o umístění osevů zemědělských kultur na různé pozemky a v mnoha dalších. Prvky kombinatoriky se využívají např. také při znázorňování spojování molekul nebo atomů, při vytváření skupin z písmen nebo z číslic (např. pro poznávací značky automobilů), při sestavování různých jiných znaků (např. teček a čárek u Morseovy abecedy, výstupků u Brailova písma), při výběru skupiny čísel tažených v různých hrách - např. Sportka, kde se losuje 6 čísel ze 49, atd.

Na 1. stupni ZŠ rozvíjíme v matematice kombinační myšlení prostřednictvím řešení vhodných úloh. Ukázky těchto úloh a možnosti jejich využití v učivu matematiky jsou uvedeny v další části tohoto materiálu. Úlohy jsou řazeny podle rostoucí náročnosti, od elementárních úloh k úlohám, které vyžadují složitější myšlenové operace a výpočty. Při řešení kombinatorických úloh s dětmi klademe důraz zejména na pochopení strategie při hledání řešení - přičemž však nalezení správného výsledku u dětí oceňujeme. V hojné míře využíváme odhadů výsledků před vlastním řešením úloh a využíváme také momentu překvapení, když výsledek úlohy je nepředpokládaný. To mimo jiné vzbuzuje u dětí zájem o tyto úlohy a zároveň i o matematiku.

2. Přípravné úlohy rozvíjející kombinační myšlení

Uvedené úlohy řeší žáci experimentem, přitom není nutné vyžadovat okamžitě všechna možná řešení. Do vyučování zařazujeme tyto úlohy příležitostně, buď ke změně činnosti nebo k opakování učiva jinou formou.
Žáky, kteří mají zájem o tyto úlohy, postupně učíme systému práce při vytváření všech řešení.

2.1. ***Hrajeme si s kostkami. Máme červenou, modrou a žlutou kostku. Kolika různými způsoby můžeme tyto tři kostky na sebe postavit?***
Řešení:

ž	m	ž	č	č	m
m	ž	č	ž	m	č
č	č	m	m	ž	ž

Návod k systematickému vytváření skupin:
Umístíme jednu kostku (např. červenou), na ni postavíme další dvě. Potom umístíme opět červenou kostku a pořadí zbývajících dvou kostek zaměníme. Anologicky postupujeme pro další barvy.

2.2. ***Nakreslete do jednoho řádku 2 červené a 2 modré kroužky. Kolika způsoby je můžete zakreslit ?***
Řešení:

○○●● ○●○● ○●●○
●●○○ ●○●○ ●○○●

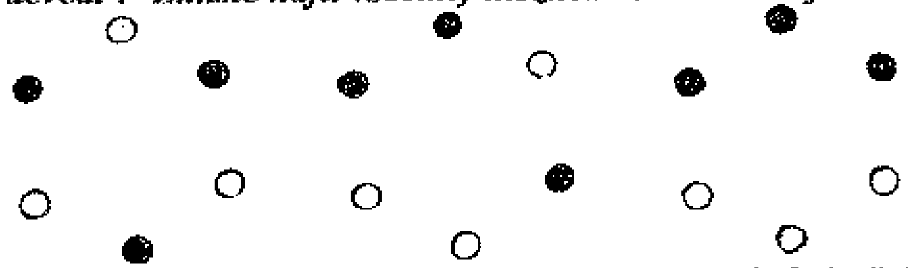
Následující úlohy se řeší analogicky, avšak jsou obtížnější vzhledem k většímu počtu možností.

2.3. ***Nakreslete do řádku 3 červené a 3 modré kroužky. Kolika způsoby je můžete zakreslit ? Zkuste najít několik možností.***
Řešení:

●●●○○○ ●○○●○● ○○○●●● ○●●○●○
●●○●○○ ●○○●●○ ○○●○●● ○●●○○●
●●○○●○ ●○●○●○ ○○●●○● ○●○●○●
●●○○○● ●○●●○○ ○○●●●○ ○●○○●●
●○○○●● ●○●○○● ○●●●○○ ○●○●●○

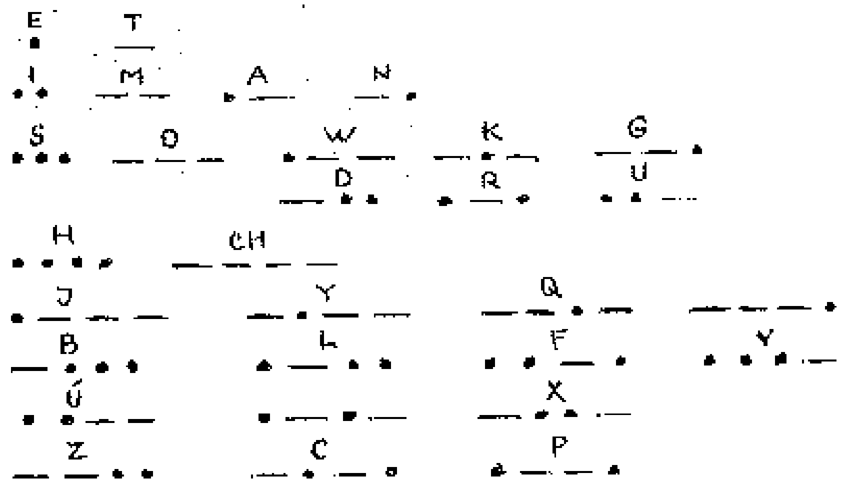
2.4. ***Tři děvčata a tři chlapci tančí v kruhu. Jaké může být rozmístění chlapců a děvčat ? Zkuste najít všechny možnosti a nakreslit je.***

Řešení:



2.5. ***Vytvořte všechny uspořádané skupiny sestávající z jedné až čtyř teček nebo čárek a zapište, která skupina označuje některé písmeno v Morseově abecedě.***

Řešení:



2.6. ***Z čísel 1, 2, 3, 4, 5 tvořte a počítejte příklady na sčítání dvou (tří, čtyř, pěti) sčítanců.***

Úlohu můžeme různými způsoby obměňovat, jak je uvedeno v příkladech a) - f):

a) Zapište všechny příklady, ve kterých jsou sčítanci různá čísla.

(Příklady 1 + 2 a 2 + 1 považujeme za různé.)

Řešení:

1 + 2	2 + 1	3 + 1	4 + 1	5 + 1
1 + 3	2 + 3	3 + 2	4 + 2	5 + 2
1 + 4	2 + 4	3 + 4	4 + 3	5 + 3
1 + 5	2 + 5	3 + 5	4 + 5	5 + 4

b) Zapište všechny příklady na sčítání dvou sčítanců.

Řešení:

1 + 1	2 + 1	3 + 1	4 + 1	5 + 1
1 + 2	2 + 2	3 + 2	4 + 2	5 + 2
1 + 3	2 + 3	3 + 3	4 + 3	5 + 3
1 + 4	2 + 4	3 + 4	4 + 4	5 + 4
1 + 5	2 + 5	3 + 5	4 + 5	5 + 5

c) Zapište všechny příklady na sčítání dvou sčítanců, přitom v tomto případě nebudeme příklady 1 + 2 a 2 + 1 rozlišovat.

Řešení:

1 + 1	2 + 2	3 + 3	4 + 4	5 + 5
1 + 2	2 + 3	3 + 4	4 + 5	
1 + 3	2 + 4	3 + 5		
1 + 4	2 + 5			
1 + 5				

d) Zapište všechny příklady na sčítání tří různých sčítanců, na pořadí sčítanců nezáleží. Příklady vypočítejte.

Řešení:

1 + 2 + 3	2 + 3 + 4	3 + 4 + 5
1 + 2 + 4	2 + 3 + 5	
1 + 2 + 5	2 + 4 + 5	
1 + 3 + 4		
1 + 3 + 5		
1 + 4 + 5		

e) Kolik různých součtů dostanete, sečtete-li 4 různé sčítance (nezáleží na pořadí).

Řešení: 5 různých součtů

$1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$1 + 2 + 3 + 5 = 11$

$1 + 2 + 4 + 5 = 12$

$1 + 3 + 4 + 5 = 13$

$2 + 3 + 4 + 5 = 14$

f) Jaký součet dostanete, sečtete-li 5 různých sčítanců ?

Řešení:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

2.7. ***Zapište číslo 6 jako součet***

a) několika stejných sčítanců,

b) sčítanců, z nichž alespň dva jsou různí (jejich pořadí nerozlišujeme).

Řešení: a) 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

2 + 2 + 2

3 + 3

b)

1 + 2 + 3	4 + 2	6 + 0
1 + 1 + 4	5 + 1	

2.8. *Doplňovačka*

a) Která čísla můžeme doplnit do kruhu a do trojúhelníku tak, aby platilo:

$$\bigcirc + \triangle = 10 .$$

Řešení:

Kruh	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trojúhelník	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

b) Do čtverečků napište čísla tak, aby platilo:

$$\square + \square + \square = 10$$

Řešení: Jestliže nerozlišujeme pořadí sčítanců, tj. nerozlišujeme např. příklady $1 + 2 + 7$, $1 + 7 + 2$, $2 + 1 + 7$, $2 + 7 + 1$, $7 + 2 + 1$, $7 + 1 + 2$, pak můžeme čtverečky vyplnit takto:

1 + 1 + 8	2 + 2 + 6	3 + 3 + 4	5 + 5 + 0	6 + 4 + 0
1 + 2 + 7	2 + 3 + 5			7 + 3 + 0
1 + 3 + 6	2 + 4 + 4			8 + 2 + 0
1 + 4 + 5				9 + 1 + 0

c) Podobnou úlohu vytvořte pro číslo 15, tj. do čtverečků zapisujte jednociferná a dvojciferná čísla tak, aby platilo:

$$\square + \square + \square = 15$$

Řešení:

1 + 1 + 13	2 + 2 + 11	3 + 3 + 9	4 + 4 + 7	5 + 5 + 5
1 + 2 + 12	2 + 3 + 10	3 + 4 + 8	4 + 5 + 6	
1 + 3 + 11	2 + 4 + 9	3 + 5 + 7		
1 + 4 + 10	2 + 5 + 8	3 + 6 + 6		
1 + 5 + 9	2 + 6 + 7			
1 + 6 + 8				
1 + 7 + 7				

2.9. *Kolik příkladů na odčítání můžete vytvořit z čísel 6, 5, 7, 2, 4 ?*

Řešení: 15 příkladů

6 - 6	5 - 5	7 - 7	4 - 4	2 - 2
6 - 5	5 - 2	7 - 6	4 - 2	
6 - 2	5 - 4	7 - 5		
6 - 4		7 - 2		
		7 - 4		

.10. *Michal si všiml poznávací značky automobilu 12 - 34. Pak se zamyslil nad úkolem: Kolik poznávacích značek je vytvořeno tak, že čísla v nich použitá tvoří řadu čísel uspořádanou vzestupně (sestupně) ?*

Řešení: Poznávacích značek je 14.

12 - 34	1, 2, 3, 4	98 - 76	9, 8, 7, 6
23 - 45	2, 3, 4, 5	87 - 65	8, 7, 6, 5
34 - 56	3, 4, 5, 6	76 - 54	7, 6, 5, 4
45 - 67	4, 5, 6, 7	65 - 43	6, 5, 4, 3
56 - 78	5, 6, 7, 8	54 - 32	5, 4, 3, 2
67 - 89	6, 7, 8, 9	43 - 21	4, 3, 2, 1
		32 - 10	3, 2, 1, 0

Poznávací značka může být také 01 - 23 0, 1, 2, 3.

3. Kombinatorické úlohy

V tomto oddílu jsou uvedeny úlohy, kterých lze využít ke správnému chápání skupin prvků, které se vytvářejí podle určitého pravidla a které vedou k postupnému zavádění základních kombinatorických pojmů.

3.1. ***Ze čtyř písmen a, b, c, d vytvořte všechny možné dvojice takové, že***
a) záleží na jejich pořadí a přitom se písmena ve dvojicích mohou opakovat,
b) záleží na jejich pořadí a přitom se písmena ve dvojicích neopakují,
c) písmena ve dvojicích se neopakují a přitom nezáleží na jejich pořadí.

Řešení:

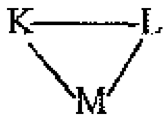
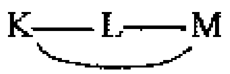
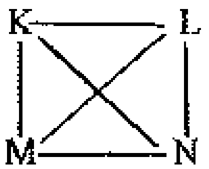
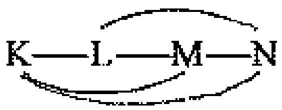
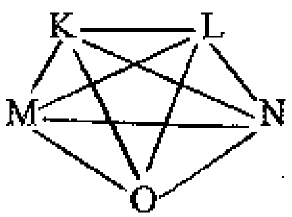
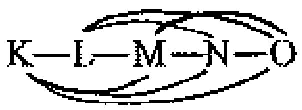
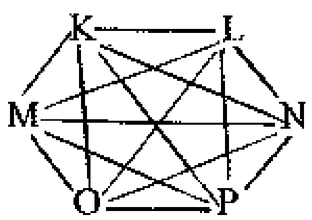
a)				b)				c)			
aa	*ab*	*ac*	*ad*	.	*ab*	*ac*	*ad*	.	*ab*	*ac*	*ad*
ba	*bb*	*bc*	*bd*	*ba*	.	*bc*	*bd*	.	.	*bc*	*bd*
ca	*cb*	*cc*	*cd*	*ca*	*cb*	.	*cd*	.	.	.	*cd*
da	*db*	*dc*	*dd*	*da*	*db*	*dc*	.	.	.	.	.

V případě a) jsme vytvořili 16 uspořádaných dvojic. Jde o uspořádané dvojice vytvořené ze čtyř prvků, přičemž prvky ve dvojicích se mohou opakovat. Jde o tzv. **variace s opakováním** druhé třídy ze čtyř prvků.
V případě b) vzniklo 12 uspořádaných dvojic, v nichž se prvky neopakují. Jde o tzv. **variace** druhé třídy ze čtyř prvků (**bez opakování**).
V případě c) jsme vytvořili 6 dvojic. Jde o výběr dvouprvkových skupin ze čtyř prvků. Dvojice jsou neuspořádané, to znamená, že nerozlišujeme dvojice např. *ab* a *ba*. Jsou to **kombinace** druhé třídy ze čtyř prvků.

3.2. ***Několik chlapců hraje tenisový turnaj systémem každý s každým. Vyjádřete, jak závisí počet sehraných zápasů na počtu hráčů.***

Řešení:

Pro jednoduchost budeme označovat hráče písmeny, např. K, L, M, N, O, P.

hráči	počet hráčů	grafické znázornění	počet zápasů	zápis výčtem prvků
K, L	2	K——L	1	KL
K, L, M	3	 nebo 	3	KL, KM, LM
K, L, M, N	4	 nebo 	6	KL, KM, KN, LM, LN, MN,
K, L, M, N, O	5	 nebo 	10	KL, KM, KN, KO, LM, LN, LO, MN, MO, NO
K, L, M, N, O, P	6		15	KL, KM, KN, KO, KP, LM, LN, LO, LP MN, MO, MP NO, NP, OP

nebo K—L—M—N—O—P

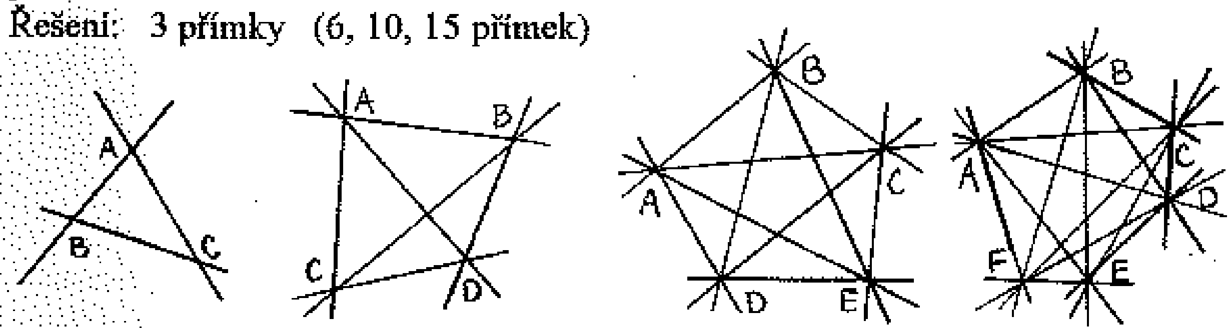
Ve všech uvedených případech jsme vytvářeli neuspořádané dvojice hráčů, protože hraje-li např. hráč K s hráčem L, jde o stejný zápas, jako když hraje hráč L s hráčem K. Protože tedy jde o neuspořádané dvojice, jedná se o **kombinace**, v tomto případě dvouprvkové, vytvářené postupně ze dvou až šesti prvků.

Na výsledku řešení této úlohy si lze povšimnout další zajímavosti - vyjádření rozdílu v počtu zápasů při postupném přibývání hráčů. Nejlépe tuto zákonitost pozorujeme v tabulce (hodnoty pro 7 a více hráčů si ověřte):

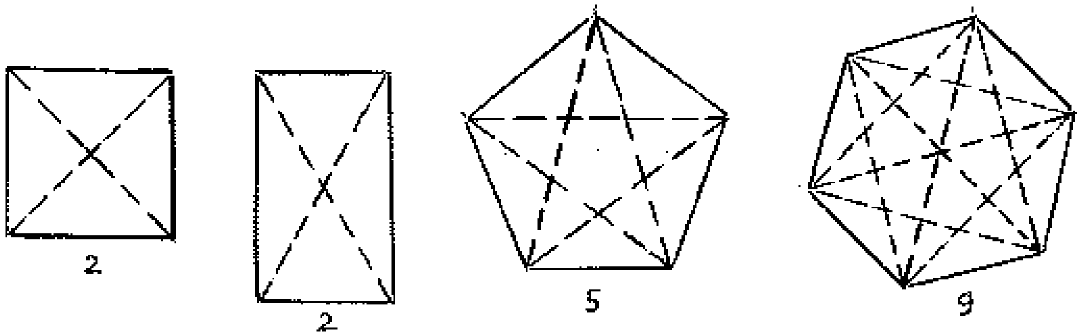
Počet hráčů	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Počet zápasů	1	3	6	10	15	21	28	36	45
Přibylo zápasů		2	3	4	5	6	7	8	9

Podobným způsobem můžeme řešit další úlohy:

3.3. ***Vyznačte si na papíře 3 různé body, které neleží na jedné přímce. Kolik přímek je těmito body určeno ? Narýsujte je.***
Stejnou úlohu řešte postupně pro 4 (5, 6) bodů, z nichž žádné 3 neleží v téže přímce.
Řešení: 3 přímky (6, 10, 15 přímek)



3.4. ***Kolik úhlopříček má čtverec, obdélník, pravidelný pětiúhelník, pravidelný šestiúhelník ?***
Řešení:



Úlohy k procvičení

1. Ve společnosti se sešlo 8 přátel. Na uvítanou si s každý s každým podal ruku. Kolik podání rukou to bylo? (28)

2. V cukrárně prodávali pět druhů zmrzliny - vanilkovou, čokoládovou, jahodovou, oříškovou a meruňkovou. Anička si chtěla koupit tři různé kopečky zmrzliny. Kolik možností výběru zmrzliny měla ? (10)

3. Kolika způsoby je možno vybrat si oběd, který sestává z polévky, hlavního jídla a salátu, jestliže v nabídce jídelníčku jsou polévky - hovězí, fazolová a bramborová, hlavní jídla - řízek, sekaná, květák, roštěná a saláty - zelný a paprikový ? (16) (24)

4. Jana má tři svetry - bílý, červený a hnědý, dvoje dlouhé kalhoty - modré a šedé a dvě bundy - riflovou a péřovou. Kolika různými způsoby si může vybrat oblečení tak, aby měla vždy kalhoty, svetr a bundu ? (12)

5. Jsou dány čtyři různé body A, B, C, D, které leží na jedné přímce. Kolik různých úseček je těmito body určeno ? (6)

6. Jsou dány úsečky: a = 7 cm, b = 2 cm, c = 4 cm, d = 80 mm. Vypočtěte obsahy a obvody všech obdélníků, jejichž strany mohou být úsečky a, b, c, d. (Obdélníků je 6.)

7. Z daných čísel 379, 8554, 726, 1 999 vytvořte všechny možné příklady na sčítání (nerozlišujte pořadí sčítanců)
   a) dvou různých sčítanců. Kolik těchto příkladů vytvoříte ? (6)
   b) tří různých sčítanců. Kolik těchto příkladů vytvoříte ? (4)
   c) čtyř různých sčítanců.

8. Z čísel v předcházející úloze vytvářejte příklady na odčítání (počítejte jen takové příklady, kdy od většího čísla odčítáme číslo menší). Kolik je všech takových příkladů? (6)

9. Kolika způsoby můžeme vybrat z pěti chlapců a čtyř děvčat šestičlennou skupinu pro reprezentaci třídy v soutěži ? (84)

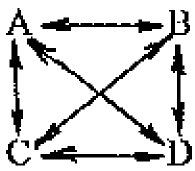
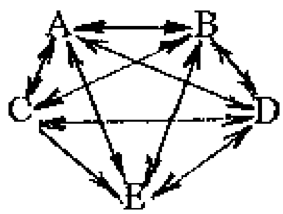
10. Kuželky jsou postaveny do čtverce tak, že v každé řadě jsou 3 kuželky. Při házení koulí můžeme shodit 0 až 9 kuželek. Kolik je teoreticky různých možností pro shození žádné, jedné, dvou, ..., až devíti kuželek? (0 kuželek - 1 možnost, 1 kuž. - 9, 2 kuž. - 36, 3 kuž. - 84, 4 kuž. - 126, 5 kuž. - 126, 6 kuž. - 84, 7 kuž. - 36, 8 kuž. - 9, 9 kuž. - 1)

VARIACE

Znovu si projděte příklad 3.2. a pozorujte, čím se liší od následujícího příkladu:

3.5. ***Několik kamarádů se dohodlo, že si o prázdninách pošlou pohlednice, každý každému. Sledujte počet zaslaných pohlednic v závislosti na počtu kamarádů.***

Řešení: Kamarády označíme písmeny A, B, C, D, E.

počet kamarádů	grafické znázornění	zápis výčtem prvků	počet pohlednic	výpočet
2		AB, BA	2	2 . 1 = 2
3		AB, BA, AC, CA, BC, CB	6	3 . 2 = 6
4		AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC	12	4 . 3 = 12
5		AB, AC, AD, AE, BA, BE, BC, BD, CA, CB, CD, CE, DA, DB, DC, DE, EA, EB, EC, ED	20	5 . 4 = 20

V tomto případě se jedná o vytváření uspořádaných dvojic (pohlednice poslaná kamarádem A kamarádovi B je různá od pohlednice zaslané kamarádem B kamarádovi A). Jde o tzv. **variace bez opakování** druhé třídy, postupně ze dvou, tří, čtyř a pěti prvků.

3.6. ***Kolik různých dvojciferných přirozených čísel můžeme vytvořit z číslic 3, 5, 7, 9 tak, že se číslice v zápisu čísla neopakují (každá číslice se vyskytuje v zápisu čísla nejvýše jednou)?***

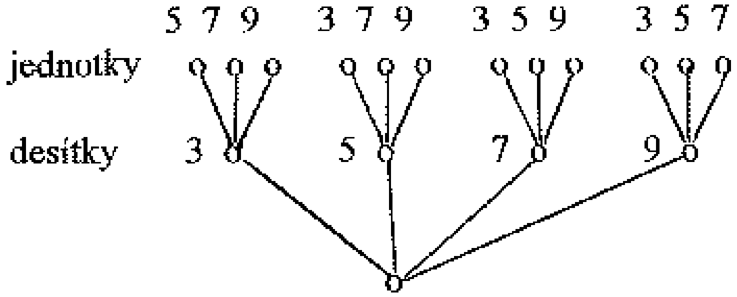
Řešení:

Hledání čísel provádíme systematicky buď pomocí tabulky, nebo pomocí stromu.

Tabulka:

35	37	39
53	57	59
71	75	79
93	95	97

Strom:



Při sestavování tabulky i stromu vycházíme z toho, že na místě desítek může být některá z číslic 3, 5, 7, 9. Máme tedy čtyři možnosti. Ke každé číslici na místě desítek můžeme dále přiřadit na místo jednotek zbývající tři číslice.

Z kombinatorického hlediska jde v této úloze o vytváření uspořádaných dvojic ze čtyř prvků, tj. o **variace druhé třídy ze čtyř prvků**. Všech čísel je 4 . 3 = 12.

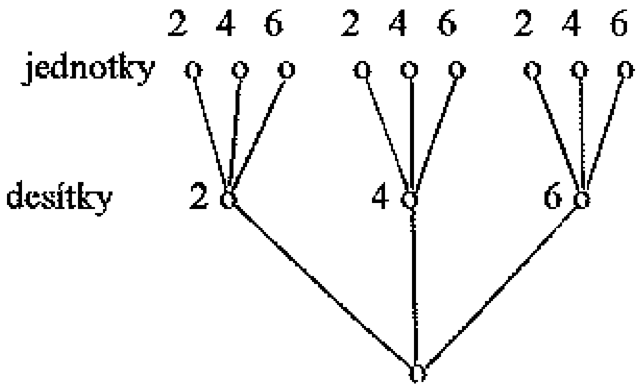
3.7. ***Kolik různých dvojciferných přirozených čísel můžeme zapsat pomocí číslic 2, 4, 6 tak, že se***
a) v zápisu čísla každá číslice vyskytuje nejvýše jednou,
b) v zápisu čísla číslice mohou opakovat ?
Řešení:
a) Hledaných čísel je 6: 24, 26, 42, 46, 62, 64.
Úlohu řešíme stejným způsobem jako úlohu 3.6.

b) Hledaná čísla zapíšeme pomocí tabulky a pomocí stromu.

Tabulka:

22	24	26
42	44	46
62	64	66

Strom



Hledaných čísel je 9: 22, 24, 26, 42, 44, 46, 62, 64, 66.
Jedná se o **variace s opakováním** druhé třídy ze tří prvků.

3.8. ***Kolik různých trojciferných čísel můžeme zapsat pomocí cifer 4, 7, 8 tak, že se v zápisu čísla***

a) každá cifra vyskytuje právě jednou,
b) cifry mohou opakovat ?

Řešení:
Úlohu řešíme podobně, jako úlohu číslo 3.7. buď pomocí tabulky, nebo pomocí stromu (strom bude mít tři úrovně - stovky, desítky, jednotky).

a) Hledaných čísel je 6: 478, 487, 748, 784, 847, 874.
Jedná se o variace bez opakování třetí třídy ze tří prvků.

b) Hledaných čísel je 27:
444, 447, 448, 474, 477, 478, 484, 487, 488
744, 747, 748, 774, 777, 778, 784, 787, 788
844, 847, 848, 874, 877, 878, 884, 887, 888.
Jde o variace s opakováním třetí třídy ze tří prvků.

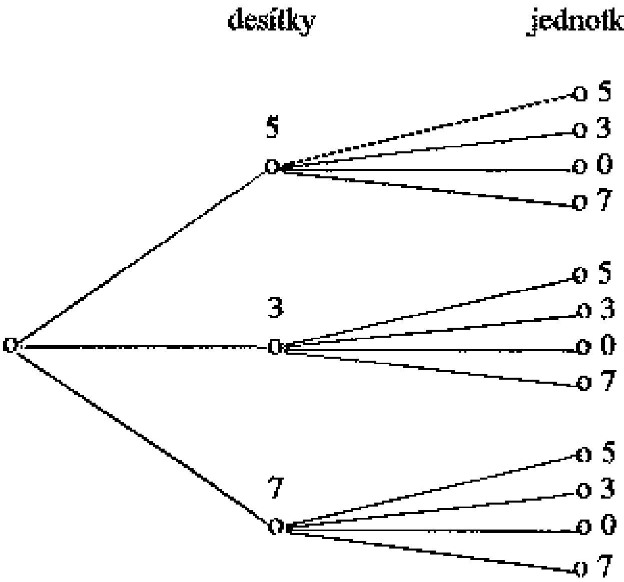
3.9. ***Pomocí číslic 5, 3, 0, 7 zapište všechna dvojciferná čísla, přičemž se v zápisu čísla a) žádná z číslic neopakuje,***
b) číslice mohou opakovat.

Řešení:
a) Hledaná čísla získáme pomocí tabulky:

53	50	57
35	30	37
75	73	70.

Na místo desítek zapisujeme postupně číslice 5, 3, 7 a k nim na místo jednotek postupně připisujeme zbývající tři číslice. Všech hledaných čísel je tedy 3.3 = 9.

b) Řešení můžeme získat např. sestavením stromu. Je třeba si uvědomit, že na místě desítek nemůže být číslice 0.



Protože na místě desítek nemůže být 0, zapíšeme na toto místo některou z číslic 5, 3, 7 - máme tedy tři možnosti. K těmto číslicím připisujeme postupně na místo jednotek číslice 5, 3, 0, 7. Hledaných čísel je tedy 3 . 4 = 12.

Úlohy k procvičování:

1. Kolik různých signálů sestavených z postupně zahrané dvojice tónů můžeme vytvořit z tónů c, e, g, h ? (Signál c-e je různý od signálu e-c atd.) (12)
   Kolik akordů je možné vytvořit z těchto tónů (uvažujeme, že současně zahrajeme dva, tři, ev. čtyři tóny) ? (6, 4, 1)

2. Jsou dány tři různé body A, B, C, které leží v téže přímce. Kolik polopřímek je těmito body určeno ? (6)
   Které polopřímky splývají ?
   Které polopřímky jsou opačné ?

3. Kolik různých monogramů je možno vytvořit z písmen: A, B, C, D, E, F, H, K, L, M, P, V ? (144)

4. Kolik různých poznávacích značek BM . . - . . můžeme vytvořit pomocí všech deseti číslic ? (10 000 - 1 = 9 999, značka BM 00 - 00 neexistuje)

PERMUTACE - POŘADÍ

3.10. ***Pomocí číslic 1, 6, 7 zapište všechna trojciferná čísla tak, aby se číslice neopakovaly.***

Řešení:

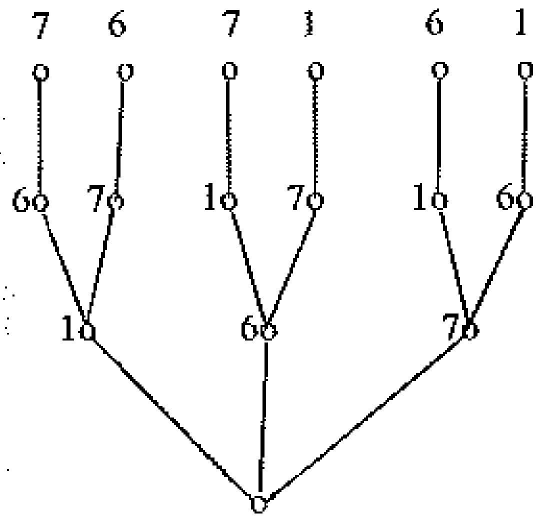
Na místo stovek zapíšeme číslici 1. Zbývající dvě číslice zapíšeme na místa desítek a jednotek. Jsou dvě možnosti: 167 176

Analogicky vytvoříme trojciferná čísla s číslicemi 6 a 7 na místě stovek:

617 671 716 761

Vytvořili jsme 6 čísel. Jedná se o uspořádané trojice ze tří různých prvků, tj. variace bez opakování třetí třídy ze tří prvků. Takovéto variace se nazývají permutace.

Určení počtu všech hledaných permutací z daných prvků vynikne, pokud jejich vytváření znázorníme pomocí stromu:



Počet všech permutací vytvořených z daných tří prvků je 6 = 3.2.1. Můžeme totiž číslici na místo stovek vybrat třemi způsoby. Každé této číslici můžeme přiřadit jednu ze dvou číslic na místo desítek a k této dvojici číslic pak zbývá k přiřazení jedna číslice na místo jednotek.

3.11. ***Čtyři děvčata, Alena, Barbora, Cilka a Dana, se dohodla, že se ve dvou školních lavicích stojících za sebou každý den přesadí tak, aby se každá postupně vystřídala na všech místech. Kolik dnů na to potřebují ?***

Řešení:

Úlohu můžeme řešit experimentem. Dívky označíme A, B, C, D.

Nejprve umístíme do první lavice vlevo žákyni A a k ní postupně přiřazujeme zbývající dívky. Máme tyto možnosti: AB AC AD.

Zbývající dvě žákyně umisťujeme do druhé lavice. To lze provést vždy dvěma způsoby.

A B	A B	A C	A C	A D	A D
C D	D C	B D	D B	B C	C B

Další možnosti získáme analogicky tak, že do první lavice vlevo postupně umístíme žákyně B, C, D.

B A	B A	B C	B C	B D	B D
C D	D C	A D	D A	A C	C A
C A	C A	C B	C B	C D	C D
B D	D B	A D	D A	A B	B A
D A	D A	D B	D B	D C	D C
B C	C B	A C	C A	A B	B A

Z experimentu vyplývá následující úvaha:

Vytváříme čtyřprvkové uspořádané skupiny ze čtyř prvků - permutace. Jejich počet je určen součinem 4.3.2.1 = 24. K obsazení místa v první lavici vlevo máme čtyři možnosti. Na obsazení vedlejšího místa v první lavici máme 3 možnosti. Máme-li obsazenou první lavici, pak můžeme vždy dvěma způsoby obsadit místo ve druhé lavici vlevo a zbývá jedna možnost obsazení posledního místa.

Z výčtu prvků i z úvahy plyne odpověď: Děvčata se vystřídají na všech místech za 24 dnů.

Úlohy k procvičení:

1. Najdi všech 24 čtyřciferných čísel, která jsou zapsána ciframi 9, 8, 4, 3. Číslice se v zápisech čísel neopakují.

2. Kolik poznávacích značek AB . . - . . obsahuje všechny číslice 0, 3, 7, 9 ? (24)

3. Petr, Jana, Hana, Eva, Michal budou přednášet na vánoční besídce každý jednu básničku. V jakém pořadí mohou vystoupit ? Zjistěte všechny možnosti. (120)

4. Kolika způsoby se mohou postavit za sebe do řady 3 (4) kamarádi ? (6, 24) Kolik možností má 5 (6) kamarádů ? (120, 720)

5. Ve čtvrté třídě mají mít žáci ve čtvrtek 5 vyučovacích hodin - český jazyk, matematiku, vlastivědu, přírodovědu a hudební výchovu. Kolika různými způsoby může paní učitelka sestavit rozvrh na čtvrtek ? (120)

6. Zapište pod sebe všechny permutace vytvořené např. z čísel 1, 2, 3. Vznikne tak obdélníkové schema, které má 6 řádků a tři sloupce. Určete součty všech čísel v každém sloupci a tyto součty porovnejte.

7. Vyberte si libovolné tři různé cifry (s vyjímkou 0) a pomocí nich zapište všechna trojciferná čísla tak, aby se v nich cifry neopakovaly. Všechna tato trojciferná čísla sečtěte a součet dělte ciferným součtem kteréhokoliv z těchto čísel. Přesvědčte se o tom, že výsledkem je vždy číslo 222.

PERMUTACE S OPAKOVÁNÍM

3.12. ***Kolika způsoby můžeme za lokomotivu zařadit 5 vagónů, z toho jsou 3 nákladní a 2 jsou cisterny ?***

Řešení:

Jde o vytváření uspořádaných skupin z pěti prvků dvou druhů, z nichž jeden se opakuje třikrát a druhý dvakrát. Označíme-li nákladní vagón n , cisternu c, pak pro seřazení vagónů je těchto 10 možností:

n n n c c	n c c n n
n n c n c	c n n n c
n n c c n	c n n c n
n c n n c	c n c n n
n c n c n	c c n n n

Úlohy k procvičení:

1. Zapište všechna pěticiferná čísla pouze pomocí číslic 4 a 7 tak, aby se v nich vyskytovala číslice 4 třikrát a číslice 7 dvakrát.
   Řešení: Hledaných čísel je 10:

77 444	74 744	74 474	74 447
47 744	47 474	47 447	
44 774	44 747	44 477	

2. Zapište všechna přeskupení písmen, která lze vytvořit z písmen slova LIBA. Kolik těchto přeskupení je správným českým slovem ?
   (Všech přeskupení je 24.)

3. Zapište všechna přeskupení písmen, která lze vytvořit z písmen slova
   a) ANKA (12)
   b) ANNA (6)

4. Kolik různých šestimístných kódů můžeme vytvořit ze tří jedniček a ze tří nul. (Vytváříme všechna šestimístná přeskupení tří jedniček a tří nul.)
   (20)

4. Závěr

V předcházejících kapitolách jsou uvedeny úlohy, o nichž předpokládáme, že budou řešeny prostřednictvím manipulativní činnosti a jejich výsledky budou získávány pomocí výčtu prvků. Nejde nám totiž o výuku kombinatoriky, ale o to, abychom dětem umožnili postupné pronikání do této problematiky.

Pro zájemce uvádíme v poznámce kombinatorické vztahy, pomocí kterých lze určit počet jednotlivých uspořádaných či neuspořádaných skupin prvků, o kterých jsme v předcházející části pojednali. K tomu je třeba připomenout i některé další důležité pojmy:

Součin přirozených čísel 1 . 2 . 3 . ... . n označujeme v kombinatorice symbolem **n!** a nazýváme **n-faktoriál**.

Definujeme: $n! = 1 . 2 . 3 . \ldots . n$

$1! = 1$

Dále definujeme $0! = 1$

Např. $3! = 3 . 2 . 1 = 6$

$4! = 4 . 3 . 2 . 1 = 24$

$5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$ atd.

Můžete se přesvědčit, že $10! = 3\ 628\ 800$

Kombinační číslo (čteme *n* nad *k*)

$$\binom{n}{k} = \frac{n.(n-1).(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Nyní uvedeme obecné definice základních kombinatorických pojmů a vzorce pro výpočet.

Variace bez opakování *k*-té třídy z *n* prvků jsou uspořádané *k*-členné skupiny sestavené z *n* prvků tak, že se každý prvek ve skupině vyskytuje nejvýše jednou.

Počet všech variací bez opakování *k*-té třídy z *n* prvků je

$$V(k,n) = n(n-1)(n-2). \ldots .(n-k+1) \quad \text{nebo} \quad V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Variace s opakováním *k*-té třídy z *n* prvků jsou uspořádané *k*-členné skupiny sestavené z *n* prvků tak, že se v nich každý prvek vyskytuje nejvýše *k* krát.

Počet všech variací s opakováním *k*-té třídy z *n* prvků je:

$$V'(k,n) = n^k$$

Permutace z *n* prvků bez opakování je uspořádaná *n*-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní vyskytuje každý prvek právě jednou. (Jsou to vlastně variace bez opakování *n*-té třídy z *n* prvků.)

Počet všech permutací bez opakování vytvořených z *n* prvků je

$$P(n) = n!$$

Permutace s opakováním z *n* prvků je uspořádaná *k*-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý prvek vyskytuje alespoň jednou.

Počet permutací s opakováním z *n* prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují $k_1, k_2, \dots k_n$ krát je:

$$P'(k_1, k_2, \dots k_n) = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$$

Kombinace bez opakování *k* -té třídy z *n* prvků je neuspořádaná *k*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Počet všech kombinací *k*-té třídy z *n* prvků je:

$$K(k,n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Pro úplnost ještě uvádíme vztah pro výpočet kombinací s opakováním, i když jsme je v první části neuváděli.

Kombinace s opakováním *k*-té třídy z *n* prvků je neuspořádaná *k*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše *k*-krát.

Počet všech kombinací s opakováním *k*-té třídy z *n* prvků je:

$$K'(k,n) = \binom{n+k-1}{k}$$