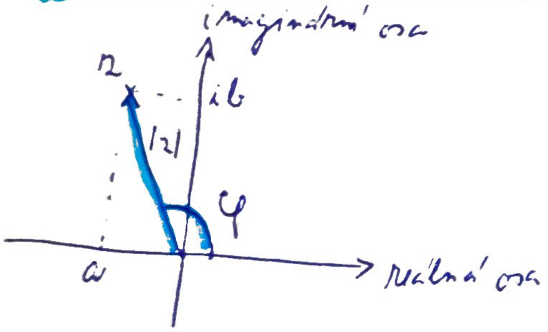
Algebra 1 - jaro 2022

Komplexní čísla v goniometrickém tvaru

- každé číslo lze zapsat v goniometrickém tvaru

$\boxed{z = |z|(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)}$, kde $|z|$ je vzdálenost z od počátku a φ je úhel, který svírá spojnice z s počátkem a kladná poloosa x



Př. 1: Zapište číslo v goniometrickém tvaru

a) $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $z = 8i - 8$

Př. 2: Zapište číslo v algebraickém tvaru $(a+bi)$

a) $28\left(\cos\frac{73}{6}\pi + i\cdot\sin\frac{73}{6}\pi\right)$

b) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{13}{4}\pi + i\cdot\sin\frac{13}{4}\pi\right)$

Násobení a dělení komplexních čísel v goniometrickém tvaru

- výhodnější než ve tvaru algebraickém (násobení dvojčlenů)

$z_1 = |z_1|(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$ $z_2 = |z_2|(\cos\rho + i\cdot\sin\rho)$

$$z_1\cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\cdot(\cos(\varphi+\rho) + i\cdot\sin(\varphi+\rho))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot(\cos(\varphi-\rho) + i\cdot\sin(\varphi-\rho))$$

Moivreova věta

Pro každé $z \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$:

$$z = (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^n = \cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi)$$

Obecněji tedy

$$z = |z| (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$
$$z^n = |z|^n (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$$

Př. 3: Umocněte pomocí Moivreovy věty, výsledek zapište v algebraickém tvaru

a) $\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right)^{74}$

b) $(-2+2i)^{100}$

c) $\left(\frac{1}{1+i}\right)^{30}$

Binomická rovnice

$\boxed{x^n - a = 0}$; $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$

- kořeny rovnice jsou komplexní čísla $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, která tvoří v Gaussově rovině pravidelný n-úhelník se středem v počátku souřadnic
- platí: $a = |a| (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$

$$\boxed{x_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot \left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)}$$

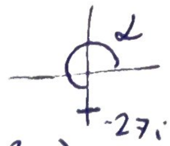
$$k = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$x^3 + 27i = 0$$

$$a = -27i$$

$$a = 27 \cdot (0 - i)$$

$$a = 27\left(\cos \tfrac{3}{2}\pi + i \cdot \sin \tfrac{3}{2}\pi\right)$$



$$x_k = \sqrt[3]{27} \cdot \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3}\right)$$

$k = 0 \ldots$

$$x_0 = 3 \cdot \left(\cos \tfrac{3}{6}\pi + i \cdot \sin \tfrac{3}{6}\pi\right)$$

$$x_0 = 3 \cdot \left(\cos \tfrac{\pi}{2} + i \cdot \sin \tfrac{\pi}{2}\right)$$

$k = 1 \ldots$

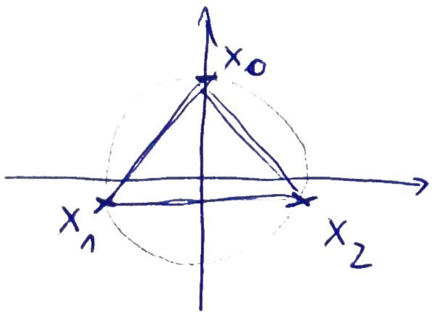
$$x_1 = 3 \cdot \left(\cos \frac{\frac{3}{2}\pi + 2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\frac{3}{2}\pi + 2\pi}{3}\right)$$

$$x_1 = 3 \cdot \left(\cos \tfrac{7}{6}\pi + i \cdot \sin \tfrac{7}{6}\pi\right)$$

$k = 2 \ldots$

$$x_2 = 3 \cdot \left(\cos \frac{\frac{3}{2}\pi + 4\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\frac{3}{2}\pi + 4\pi}{3}\right)$$

$$x_2 = 3 \cdot \left(\cos \tfrac{11}{6}\pi + i \cdot \sin \tfrac{11}{6}\pi\right)$$



Výsledky tvoří rs Δ.

Př. 4: Řešte, výsledky zakreslete do Gaussovy roviny

a) $x^4 - 64 = 0$

b) $x^6 + i = 0$

c) $x^3 - \sqrt{3} - i = 0$