5.1

Již odpradávna jsou známé problémy s písmeny místo číslic. Roku 1931 zavedl pro ně M. Vatriquant název cryptogramy, pokud písmena stojí jen vedle sebe, ale nedávají smysl. Říkáme jim i algebrografy. Jestliže tvoří písmena, která máme nahradit číslicemi, slova, která mají význam, vznikají alfametrické problémy (J. A. Hunter, 1955). Nejsou přesně známy zákony, jak postupovat při řešení. Je třeba začít vždy tím, že hledáme kombinace písmen, která zřejmě představují číslice 0, 1 nebo 9. Pokuste se vyřešit následující alfametrické problémy:

a)
```
  P O Š L I
  I H N E D
-----------
P E N I Z E
```

b)
```
    T H I S
      I S A
  G R E A T
    T I M E
-----------
W A S T E R
```

(Znamená: To je velký měřič času.)

c)
```
  P R A W Y
  P O L A K
  P I L N Y
-----------
I L O O A W
```

5.2
Vyluštěte tento rébus:

$$\begin{array}{ccccc} ATU & + & IAZ & = & IITE \\ - & & - & & : \\ NEG & : & IOG & = & E \\ \hline PAU & - & NZ & = & PPA \end{array}$$

Po uspořádání písmen označujících číslice od 0 do 9 vám vyjde ruské slovo, které vyjadřuje matematický termín.

5.3
Jak rychle vypočítáte (třeba i zpaměti) tento příklad:

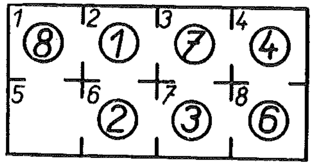
$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} ?$$

5.4
Při sčítání jsme čísla nahradili písmeny. Zjistěte všechna čísla, pro která platí:

$$\begin{array}{r} B\,D\,C\,E \\ + \quad B\,D\,A\,E \\ \hline A\,E\,C\,B\,E \end{array}$$

5.5
Zjistěte dvě čísla, jejichž součet je 123 456. Jedinou podmínkou je, aby jedno z obou čísel mělo tři stejné číslice (samozřejmě kromě jiných) s výjimkou jednotky.

5.6
Ve čtvercích 1 až 8 jsou zpřeházená čísla 1 až 8 v kroužcích (napište si je na čtverečky papíru podle obr. 21). Posouváním na volná pole máme čísla uspořádat tak, aby na papírkách i ve čtvercích byla stejná čísla.



Obr. 21

Pravidlo: Číslo 5 zůstane volné, skákat se nesmí, ve čtverečku smí být jen jedno číslo.
Jak budete postupovat?

5.7
Je daný dělenec $x^4 + 1$, dělitel $x - 1$ a podíl $x^3 + x^2 + x + 1$.
Určete bez dělení zbytek.

5.8
Sečtěte tři čísla, z nichž jedno je zapsáno jednou jedničkou a čtyřmi dvojkami, druhé dvojkou a čtyřmi trojkami a třetí jedničkou, dvěma dvojkami, trojkou a čtyřkou. Dostanete součet 98 765. Napište správně celý příklad.

5.9
Hádejte, která čísla je možno napsat třemi trojkami bez použití dalších znaků matematických výkonů, a uspořádejte je podle velikosti.

5.10
Nahraďte číslicemi:

$$MNO = (NM)^N = O\,.\,O\,.\,O$$

5.11
Co je víc: $\sqrt[5]{5}$ nebo $\sqrt{2}$?
(Určete bez vypočítání hodnot odmocnin.)

5.12
Najděte všechna čtyřciferná čísla, která mají tyto vlastnosti: první dvě a druhé dvě cifry jsou druhé mocniny čísel, které napsány vedle sebe dají číslo, jež umocněno na druhou je původní čtyřciferné číslo.

5.13
V jazyce IDO čteme tento součet:

$$\begin{array}{l} \text{SAGO (moudrost)} \\ \underline{+\ \text{SANO (zdraví)}} \\ \text{FELIC (štěstí)} \end{array}$$

Za různá písmena dosaďte různé číslice, aby součet byl správný. Vymyslete si podobnou úlohu.

5.14
Dosadit místo hvězdiček číslice není tak těžké. Pokuste se vysvětlit, zda v tom není nějaká zákonitost, že výsledkem našeho násobení je souměrné číslo.

$$\begin{array}{r} * 4 * \quad \times * * * \\ \hline * 4 * \\ * * * * \\ 4 * 4 \\ \hline 4 4 * 4 4 \end{array}$$

5.15
Šestimístné číslo začíná jedničkou. Jestliže přesuneme tuto jedničku na konec čísla, zvětší se číslo trojnásobně. Zjistěte hledané číslo.

5.16
K dvěma číslům x, y můžeme vypočítat jejich aritmetický průměr $A = \dfrac{x + y}{2}$, geometrický průměr $G = \sqrt{x \cdot y}$ a harmonický průměr, o němž víme, že platí $A : G = G : H$.

a) Jaký bude vzorec pro H vyjádřený čísly x, y?
b) Jaký vztah vyjádřený nerovnostmi platí mezi A, G, H?

5.17
Čtyřciferné číslo $ABCD$ je čtvercem jiného čísla. Známe jen jeho třetí číslici, nulu. Dále o něm víme, že $A = B + D$. Které je to číslo?

5.18
Máte před sebou sérii rozličných čísel, která jsou uspořádána podle určitého pravidla. Doplňte chybějící číslo:

1	3	7	?	31	63

5.19
Napište číslo 10 jako součet několika sčítanců, při jejichž zápisu použijete všech deseti číslic 0, 1, 2, 3, ..., 9, a to každou číslici právě jednou. Jednotliví sčítanci mohou být i zlomky.

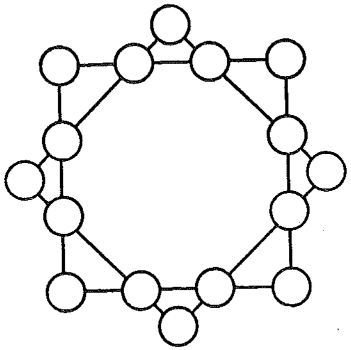
5.20
Vypočtěte:

$$\frac{2}{1 + \dfrac{1}{90\,000\,000\,000}}$$

5.21
Násobení, kde místo cifer jsou hvězdičky, vám již jistě nedělá potíže. Pokuste se nyní umocnit:

$$(* * *)^* = * * * * * 7 7 7 7$$

5.22
Oktagram je geometrický název osmicípé hvězdy. Do kroužků na obr. 22 máte napsat čísla od 1 do 16 tak, aby součet ve všech přímých směrech byl 34. Taktéž součet čtyř čísel ve vrcholech dvou čtverců, z nichž obrazec vznikl, má být 34.



Obr. 22

5.23
Za trojúhelníčky a písmena dosaďte číslice tak, aby násobení bylo správné:

$$
\begin{array}{r}
\underline{ABC\,.\,BAC} \\
\triangle\triangle\triangle\triangle \\
\triangle\triangle A \\
\underline{\triangle\triangle\triangle B} \\
\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle
\end{array}
$$

5.24
Z deseti cifer od 0 do 9 máme sestavit největší možné číslo dělitelné jedenácti. Každá cifra se v něm může vyskytnout pouze jednou.

5.25
Algebrograf (v posledním řádku jsou jen součty):

$$
\begin{array}{rcrcr}
TV & \times & TV & = & CMB \\
CVR & : & BR & = & CV \\
Z & + & T & = & V \\
LV & - & C & = & LB \\
\hline
VVK & & MV & & BRRR
\end{array}
$$

5.26
Nahraďte písmena číslicemi, aby výpočty souhlasily ve vodorovném i svislém směru:

$$
\begin{array}{ccccc}
H & \times & AD & = & EJD \\
\times & & : & & \times \\
EJ & & A & & H \\
\hline
HL & \times & ED & = & HLD
\end{array}
$$

5.27
V tomto příkladě doplňte chybějící číslice:

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{x\,2\,x\,5\,x : 3\,2\,5 = 1\,x\,x} \\
\underline{\mathrm{-x\,x\,x}} \\
\mathrm{x\,0\,x\,x} \\
\underline{\mathrm{-x\,9\,x\,x}} \\
\mathrm{x\,5\,x} \\
\underline{\mathrm{-x\,5\,x}} \\
0
\end{array}
$$

5.28
S použitím logaritmů čísel určete přirozená čísla, jejichž 31. mocnina je 35místné přirozené číslo.

5.29
Trojciferné číslo, v němž je prostřední číslice nula a zbývající dvě jsou různé od nuly, můžeme umocnit dvěma zpaměti:

$304^2 = 92\,416$

$$
\begin{array}{lr}
3^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & 9 \\
2\,.\,3\,.\,4\;.\;.\;.\;.\;. & 24 \\
4^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & 16 \\
\hline
 & 92416
\end{array}
$$

Odůvodněte.

5.30
U této jednoduché úlohy

$$ABC \times DEF = 1\,2\,3\,4\,5\,6$$

si stopněte čas, jak dlouho vám potrvá než ji vyřešíte. Pokud ji vyřešíte za 2 minuty, jste dobrým počtářem.

5.31

Pokuste se nahradit hvězdičky číslicemi, aby řešení bylo správné:

```
  √* * * * * * = * * *
— *
  * * *
— * *
  4 * * *
— * * * *
        0
```

5.32

Která čísla je možno napsat třemi čtyřkami bez použití dalších znaků matematických výkonů? Uspořádejte je podle velikosti a určete největší z nich.

5.33

Najděte číslo t a číselnou hodnotu písmene a, které nahrazuje číslici v této rovnici:

$$[3(230 + t)]^2 = 492\,a04$$

5.34

Zajímavá úloha, která je nová tím, že v ní jsou místo čísel písmena i v mocnitelích. Úloha se dá dobře vyřešit úsudkem, ale mnoho se nad ní narozmýšlíte:

$$\begin{array}{ccccc}
(ABA \times C) & - & (D^E \times E^C) & = & (FD \times D^F) \\
: & & - & & - \\
AG & \times & AD & = & EHB \\
= & & = & & = \\
(D^E \times C) & + & (C^E \times AA) & = & (C \times E^F)
\end{array}$$

5.35

Nahraďte písmena číslicemi s podmínkou, že $E^2 = H$ tak, aby platil součet:

$$\begin{array}{r}
DPJ \\
NDREE \\
SEND \\
\hline
CHEER
\end{array}$$

b) Pro lichoběžník (obr. 96b):

$$P = \frac{v}{6}\left(a_1 + 4 \cdot \frac{a_1 + a_3}{2} + a_3\right) = \frac{v}{2}(a_1 + a_3).$$

c) Pro trojúhelník (obr. 96c):

$$P = \frac{v}{6}\left(a_1 + 4\frac{a_1}{2} + 0\right) = \frac{a_1 \cdot v}{2}.$$

4.33

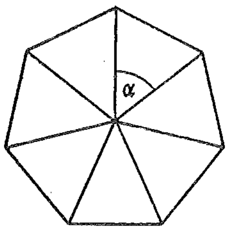
Vypočtěte nejdříve úhel α, tj. středový úhel patřící k straně sedmiúhelníku. Obr. 97.

$$360° : 7 \doteq 51°; \quad 3° = 3 \cdot 60'; \quad 180' : 7 \doteq 25';$$
$$5' = 5 \cdot 60''; \quad 300'' : 7 \doteq 43''.$$

Úhel $\alpha \doteq 51°25'43''$.
Úhel, který svírají dvě sousední strany, je potom $180° - (51°25'43'')$. Dále

$$\begin{array}{r} 180° \\ -51°25'43'' \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 179°59'60'' \\ -51°25'43'' \\ \hline 128°34'17'' \end{array}$$

Dvě sousední strany pravidelného sedmiúhelníku svírají úhel přibližné velikosti $128°34'17''$.



Obr. 97

V

5.1

a) 19 568 + 84 302 = 103 870 nebo
14 568 + 89 302 = 103 870;

b) 5 628 + 280 + 97 405 + 5 234 = 108 547;

c) 39 746 + 38 072 + 31 056 = 108 874.

5.2

Všimněme si, že v prvním sloupci od U jednotek odčítáme G jednotek a dostaneme zase U jednotek. To znamená, že G = 0.
Podívejme se na rozdíl IAZ — IOG = NZ. Protože G = 0 a číslice stovek jsou shodné, A — O = N. (1)
Vezměme rozdíl PAU — NZ = PPA a upravme ho na součet:
PPA + NZ = PAU. Protože číslice stovek jsou shodné, musí platit jedna z těchto dvou soustav:

(a) A + Z = U;	nebo (b) A + Z = U + 10;
P + N = A;	P + N + 1 = A;
(součet jednotek je menší než 10);	(součet jednotek je větší než 10).

Sečteme rovnici (1) s rovnicí P + N = A a dostaneme

$P + N - O = N$. Z toho $P = O$, což není možné, protože různé číslice jsou vyjádřeny různými písmeny. Platí tedy soustava (b).
Sečteme rovnici (1) s rovnicí $P + N + 1 = A$ a dostaneme:

$P + N + 1 = N + O$. Z toho $P + 1 = O$. (2)

Protože $G = 0$, vydělíme čísla NEG a IOG deseti a dostaneme

$NE : IO = E$ nebo $IO \times E = NE$.

Z toho buď

$EO = E$;	nebo	$EO = E + 10$;
$EI = N$;		$EI + 1 = N$.

Platí-li první soustava, $O = 1$ a podle (2) $P = 0$; to je však nemožné, protože už víme, že $G = 0$. Platí tedy druhá soustava. Dosadíme do rovnice $EO = E + 10$ z rovnice (2) $P + 1 = O$ a dostaneme $E(P + 1) = E + 10$, čili $EP = 10$. (3)
Přejdeme k rovnici $IITE : E = PPA$. Upravíme ji takto:

$(100P + 10P + A) . E = 1\,000I + 100I + 10I + E$.

Z toho

$100PE + 10PE + AE = 1\,000I + 100I + 10I + E$,

čili po dosazení z rovnice (3)

$1\,000 + 100 + AE = 1\,000I + 100I + 10I + E$.

Tato rovnice může platit jen pro $I = 1$ a $AE = 10I + E$. (4)
Nyní vezmeme součet $ATU + IAZ = IITE$. $I = 1$, platí

$$\begin{array}{r} ATU \\ +1AZ \\ \hline 11TE. \end{array}$$

Protože víme, že $A < 10$ a součet desítek nemůže dát víc než 1 stovku, dostáváme $A + 1 + 1 = 11$.
Z toho $A = 9$, takže máme

$$\begin{array}{r} 9TU \\ +19Z \\ \hline 11TE. \end{array}$$

Případ $U + Z = E$ není možný, protože z toho by vyplývaly absurdní rovnice: $T + 9 = T$ nebo $T + 9 = T + 10$. Platí tedy $U + Z = E + 10$. (5)
Další postup je lehký. Vezmeme např. rovnici $ATU - NEG = PAU$. Dosadíme za A jeho hodnotu a vyjádříme rovnici takto:

$$\begin{array}{r} P9U \\ +NEO \\ \hline 9TU. \end{array}$$

Protože E je různé od nuly a nerovná se ani 1, platí

$$9 + E = T + 10, \quad \text{čili} \quad E - T = 1; \qquad (6)$$
$$P + N + 1 = 9, \quad \text{čili} \quad P + N = 8. \qquad (7)$$

Porovnáme rovnice (4) a (6): $AE = 10T + E$,

$$E - T = 1,$$

a protože $A = 9$, platí $E = 5$ a $T = 4$.
Z (3) vyplývá, že $P = 2$. Ze (7) dostaneme $N = 6$, z (1) $O = 3$.
Hodnotu písmen Z a U určíme ze soustavy rovnic (5) a z první rovnice soustavy (b):

$$U + Z = E + 10,$$
$$A + Z = U + 10.$$

Protože $A = 9$, $E = 5$, platí $Z = 8$ a $U = 7$.

Výsledky sestavíme do tabulky:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9,
G I P O T E N U Z A.

Vzniklé ruské slovo znamená přepona.

5.3

Čísla 10, 11, 12, 13 a 14 mají zajímavou vlastnost:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2.$$

Protože 100 + 121 + 144 = 365, lehce můžeme zpaměti vypočítat, že výsledek se rovná 2.
Čísla 10, 11, 12, 13 a 14 se nazývají Račinského řada. Existuje ještě jedna taková řada. Jsou to čísla —2, —1, 0, 1, 2. Totéž je možno vypočítat i algebraicky: Označme první číslo písmenem x.
Platí:

$$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = (x + 3)^2 + (x + 4)^2.$$

Označíme-li druhé číslo uvedené řady písmenem x, dostaneme jednodušší výraz:

$$(x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2 + (x + 3)^2.$$

Po vyřešení dostaneme $x^2 - 10x - 11 = 0$, z toho $x_1 = 11$, $x_2 = -1$.

5.4

Na první pohled vidíme, že součet dvou čtyřciferných čísel musí být menší než 20 000, tedy $A = 1$. Z úlohy dále vidíme, že $E + E = E$, což může platit jen pro $E = 0$. Z druhého sloupce sčítání vyplývá (protože v prvním sloupci není zbytek): $C + A = B \Rightarrow B = C + 1$. Součet tedy začíná 10 ($A = 1$, $E = 0$), proto

B může být jen 5. Protože $B = C + 1$, může být C jen 4 a potom D jen 2. Celý součet je potom

$$\begin{array}{r} 5\,240 \\ +5\,210 \\ \hline 10\,450. \end{array}$$

5.5

Dvojic čísel, která splňují podmínky úlohy, je mnoho. Některé z nich:

42 888	56 222	27 555	45 666	43 777
80 568	67 234	95 901	77 790	79 679.

5.6

Postup tahů může být tento (l — znamená doleva, p — doprava, d — dolů, n — nahoru):

2 — l, 1 — d, 8 — p, 2 — n, 1 — l, 3 — l, 7 — d,
8 — p, 3 — n, 7 — l, 8 — d, 4 — l, 6 — n, 8 — p,
7 — p, 1 — p, 2 — d, 3 — l, 4 — l, 6 — l, 8 — n,
7 — p, 6 — d, 4 — p, 3 — p, 2 — n, 1 — l, 6 — l,
7 — l, 8 — d, 4 — p, 3 — p, 2 — p, 1 — n.

5.7

$x^4 + 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) + C$, kde C je zbytek. Protože to musí být identita, dosadíme např. $x = 1$. Potom $1 + 1 = 0 + C$. Z toho $C = 2$. Tuto hodnotu pro C dostaneme, nechť je hodnota x jakákoli. Vezmeme-li např. $x = 2$, potom $16 + 1 = (2 - 1)(8 + 4 + 2 + 1) + C$, čili $17 = 15 + C$ a z toho zase $C = 2$.

5.8

$$\begin{array}{r} 22\,212 \\ 33\,332 \\ 43\,221 \\ \hline 98\,765 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 22\,221 \\ 33\,323 \\ 43\,221 \\ \hline 98\,765 \end{array}$$

5.9

$$333,\ 33^3,\ 3^{33},\ 3^{3^3};$$

$$33^3 = 35\,937,\ 3^{3^3} = 3^{27},\ 3^{10} = 59\,049.$$

To nám stačí, abychom uvedená čísla uspořádali podle velikosti:

$$333 < 33^3 < 3^{3^3} < 3^{33}.$$

Největší číslo je 3^{33}.

5.10

$$729 = 27^2 = 9 \,.\, 9 \,.\, 9.$$

5.11

Umocníme oba výrazy na desátou:

$$(\sqrt[5]{5})^{10} = 5^2 = 25; \quad (\sqrt{2})^{10} = 2^5 = 32.$$

Protože $32 > 25$, tedy $\sqrt{2} > \sqrt[5]{5}$.
(Jde o kladná čísla; pak z nerovnosti $a > b$ plyne nerovnost $a^n > b^n$ a obráceně.)

5.12

Podmínce vyhovují jen čísla s nulami na konci:

$$1\,600\ (40^2),\ 2\,500\ (50^2),\ 3\,600\ (60^2)\ \text{atd.}$$

5.13

$S = 5,\ A = 3,\ G = 2,\ O = 4,\ N = 7,\ F = 1,\ E = 0,$
$L = 6,\ I = 9,\ C = 8$

nebo

$S = 5,\ A = 4,\ G = 2,\ O = 3,\ N = 7,\ F = 1,\ E = 0,$
$L = 8,\ I = 9,\ C = 6.$

Tedy součet je:

$$\begin{array}{r} 5\,324 \\ 5\,374 \\ \hline 10\,698 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\,423 \\ 5\,473 \\ \hline 10\,896. \end{array}$$

[S musí být vždy: $5 \geqq 5$. Nechť $5 = 5 \Rightarrow A$ může být jen 4, 3, 2.
F se vždy rovná 1. ($2S \geqq 10 \Rightarrow S \geqq 5$, tj. 5, 6, 7, 8, 9.)
$2A$ nesmí být více než 10 (neboť by byl zbytek 1 a $10 + 1 = 11$; tedy by byly dvě jednotky i na místě F i na místě E).
Za A tedy zvolíme 4, 2, 3. Nechť $A = 3$. Potom C můžeme zvolit jen 8 (má to být sudé číslo, které ještě nebylo).]

5.14

Násobíme-li číslo 1 001 dvojciferným číslem se stejnými číslicemi, dostaneme souměrný výsledek. Podle toho můžeme zvolit příslušné činitele:

$$\begin{array}{r} 242 \times 182 \\ \hline 242 \\ 1936 \\ 484 \\ \hline 44044 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1\,001 \,.\, 44 \\ \hline 1\,001 = 91 \,.\, 11 \\ \quad\ 44 = 2 \,.\, 2 \,.\, 11 \\ \hline 2 \,.\, 2 \,.\, 11 \,.\, 11 \,.\, 91 = 242 \,.\, 182 = 44\,044 \end{array}$$

5.15

Šestimístné číslo, o němž víme, že začíná jednotkou, můžeme psát ve tvaru $(100\,000 + a)$, kde a je pětimístné číslo. Z podmínky úlohy víme, že $3 \,.\, (100\,000 + a) = 10a + 1$. Z této rovnice dostaneme hodnotu pro číslo $a = 42\,857$. Hledané číslo je tedy 142 857. Platí:

$$3 \,.\, 142\,857 = 428\,571.$$

5.16

a) Z uvedené úměry $H = \dfrac{G^2}{A}$. Po dosazení a úpravě máme

$$H = \frac{2xy}{x + y}.$$

b) Platí:

$$H < G < A.$$

Pro n prvků, jejichž hodnoty označíme $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$A = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n},$$

$$G = \sqrt[n]{x_1 \,.\, x_2 \,.\, \ldots \,.\, x_n},$$

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}.$$

5.17

Dvojmístné číslo, které umocníme dvěma, abychom dostali čtyřmístné číslo, má číslice x a y a musí platit

$$(10x + y)^2 = 100x^2 + 20xy + y^2.$$

V našem případě je y různé od nuly, neboť jinak by $C = D = 0$, tedy $A = B$. Dále y se nerovná 3 a 7, protože by potom $D = 9$ a z $A = D + B = 9$ vyplývá číslo 9 009, které není druhou mocninou žádného dvojciferného čísla, y se nerovná ani 4, ani 5, ani 6, protože potom nemůžeme zjistit x tak, aby cifra desítek v čísle $20xy + y^2$ se rovnala nule. Zůstává tedy jediné řešení $x = 9$, $y = 9$ a hledané číslo je $9\,801 = 99^2$.

5.18

1	$2 \,.\, 1 + 1 = 3$	$2 \,.\, 3 + 1 = 7$	$2 \,.\, 7 + 1 = 15$

$2 \,.\, 15 + 1 = 31$	$2 \,.\, 31 + 1 = 63$

5.19

Uvedeme dvě řešení. Pokuste se najít další.

$$10 = 8\frac{35}{70} + 1\frac{46}{92}; \quad 10 = 2\frac{15}{30} + 7\frac{48}{96}.$$

5.20

Kromě obvyklého způsobu přeměny tohoto složeného zlomku na jednoduchý a dělení, kdy dostaneme

$$\frac{180\,000\,000\,000}{90\,000\,000\,001} = 1{,}\,999\,999\,999\,977\ldots,$$

což je zdlouhavý a úmorný výpočet, můžeme počítat i takto:

$$\frac{2}{1 + \frac{1}{90\,000\,000\,000}} \text{ je přibližně tolik jako}$$

$$2 \,.\, \left(1 - \frac{1}{90\,000\,000\,000}\right),$$

neboť

$$2\left[\left(1 + \frac{1}{90\,000\,000\,000}\right)\left(1 - \frac{1}{90\,000\,000\,000}\right)\right] =$$
$$= 2\left[1 - \left(\frac{1}{90\,000\,000\,000}\right)^2\right].$$

$\left(\frac{1}{90\,000\,000\,000}\right)^2$ je tak malá veličina, že je možno ji zanedbat.

Můžeme tedy počítat:

$$2\left(1 - \frac{1}{90\,000\,000\,000}\right) = 2 - \frac{2}{90\,000\,000\,000} =$$
$$= 2 - \frac{2}{9} \,.\, 10^{-10} = 2 - 0{,}2222\ldots \,.\, 10^{-10} =$$
$$= 2 - 0{,}000\,000\,000\,022\,22\ldots =$$
$$= 1{,}999\,999\,999\,977\ldots,$$

což je týž výsledek jako předcházející, ovšem velmi jednoduše vypočtený.

5.21

a) Na první pohled je zřejmé, že jde o třetí mocninu a že poslední číslice mocněnce je 3, čtyři sedmičky na konci prozrazují, že druhou číslicí mocněnce je 5. Z toho vyplývá výsledek

$$753^3 = 426\,957\,777.$$

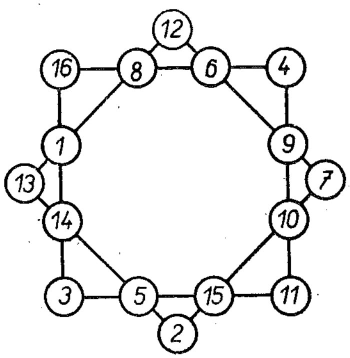
b) Protože umocněním trojciferného čísla máme dostat číslo devítimístné, jde o třetí mocninu. Třetí mocnina čísla má končit číslicí 7; to je možné jen tak, že poslední číslicí mocněnce je číslice 3. ($3^3 = 27$.) Napišme tedy hledané číslo ve tvaru $(100a + 10b + 3)$; po umocnění třemi a porovnání desítek zjistíme, že $b = 5$. Pak umocňujeme $(100a + 53)^3$ a zjistíme a.

5.22

Viz obr. 98.

5.23

Vidíme, že z čísel A, B, C je nejmenší A, neboť $ABC . A$ je trojciferné číslo, zatímco zbývající částečné součiny jsou čtyřciferná čísla. A může být jen 1, 2 nebo 3,



Obr. 98

neboť větší číslo než 3 na místě stovek násobené čtyřmi dává již čtyřciferné číslo.
A nemůže být 1, neboť z $ABC . A$ by plynulo $CA = A$. Kdyby se A rovnalo 3, bylo by $C . A = 3$, tedy $C = 1$, ale C musí být větší než A; tedy $A = 2$. Pak má $2 . C$ končit opět číslicí 2; je tedy $C = 6$.

$$\begin{array}{r} 2B6\,.\,B26 \\ \hline \_\,\_\,\_\,6 \\ \_\,\_\,2 \\ \_\,\_\,\_B \\ \hline 6 \end{array}$$

Z třetího řádku vidíme, že $6 . B$ je číslo, jež končí na B, což je možno napsat takto: $6B = 10x + B \Rightarrow B = 2x$. B je tedy sudé číslo a tak B jsou buď 4, nebo 8. Kdyby $B = 4$, potom násobené číslo by bylo 246. B-násobek tohoto čísla (čtyřnásobek) by bylo trojciferné číslo. My potřebujeme čtyřciferné, proto $B = 8$. Výsledek:

$$\begin{array}{r} 286\,.\,826 \\ \hline 1716 \\ 572 \\ 2288 \\ \hline 236236 \end{array}$$

5.24

Protože máme použít všech deset cifer, bude číslo desetimístné a bude mít ciferný součet

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Dále má být číslo dělitelné jedenácti. Číslo je dělitelné 11, jestliže rozdíl mezi součtem číslic stojících na sudých místech a součtem číslic stojících na lichých místech se rovná nule nebo je násobkem 11. Tyto poznatky zapíšeme rovnicemi.

Součet číslic stojících na sudých místech nechť je x, součet číslic stojících na lichých místech y. Má platit $x + y = 45$, $x - y = 11k$, kde $k = 0, \pm 1, \pm 2$ atd. Hledáme kladná celá čísla x a y, vyhovující těmto rovnicím. Zjistíme:

$$x = (45 + 11k) : 2,$$
$$y = (45 - 11k) : 2.$$

Z toho nejdříve vyplývá, že k je liché. Dále, že absolutní hodnota čísla k je menší než 5, protože jinak by vyšlo x nebo y záporné, a to nemá smysl. V úvahu přicházejí jen hodnoty $k = \pm 1$ nebo $k = \pm 3$.

Jestliže $k = \pm 1$, vychází $x = 28$, $y = 17$ nebo $x = 17$, $y = 28$.

Jestliže $k = \pm 3$, vychází $x = 39$, $y = 6$ nebo $x = 6$, $y = 39$.

Druhý případ nemá smysl, protože 5 různých cifer dává součet vždy větší než 6. Máme tedy dělit cifry od 0 do 9 na dvě skupiny po pěti, aby jedna skupina měla ciferný součet 28 a druhá 17. Hledané číslo potom dostaneme, když cifry těchto skupin, klesající zleva, seřadíme za sebou. Skupiny jsou:

$$9\ 7\ 5\ 4\ 3,$$
$$8\ 6\ 2\ 1\ 0.$$

Z toho seřazením je hledané číslo 9 876 524 130.

5.25

$$\begin{array}{rcrcr}
29 & \times & 29 & = & 841 \\
890 & : & 10 & = & 89 \\
7 & + & 22 & = & 9 \\
69 & - & 8 & = & 61 \\
\hline
995 & & 49 & & 1\,000
\end{array}$$

5.26

Z posledního řádku vyplývá $E = 1$, $D = 0$. Další úvahou dostaneme 3 řešení:

$$\text{I.}\quad \begin{array}{rcrcr}
3 & \times & 40 & = & 120 \\
\times & & : & & \times \\
12 & : & 4 & = & 3 \\
\hline
36 & \times & 10 & = & 360
\end{array}
\qquad
\text{II.}\quad \begin{array}{rcrcr}
2 & \times & 70 & = & 140 \\
\times & & : & & \times \\
14 & : & 7 & = & 2 \\
\hline
28 & \times & 10 & = & 280
\end{array}$$

$$\text{III.}\quad \begin{array}{rcrcr}
4 & \times & 30 & = & 120 \\
\times & & : & & \times \\
12 & : & 3 & = & 4 \\
\hline
48 & \times & 10 & = & 480
\end{array}$$

5.27

$$\begin{array}{l}
52\,650 : 325 = 162 \\
20\,15 \\
\quad 650 \\
\quad\ \ 0
\end{array}$$

5.28

Označme hledané číslo písmenem x. Potom platí x^{31} je 35místné přirozené číslo čili x je $\sqrt[31]{35\text{místné číslo}}$.
$\log x = \frac{1}{31} \log$ 35místného přirozeného čísla, tj. log čísla $= \frac{34,\ldots}{31}$. Hledaný logaritmus může tedy být jen v mezích $\frac{34}{31}$ a $\frac{34,99}{31}$, tj. 1,09 a 1,13.

V tomto intervalu je logaritmus jediného přirozeného čísla, a to čísla 13; ($\log 13 = 1,11\ldots$).
Hledané číslo je 13.

5.29

$$(a \cdot 100 + b)^2 = a^2 \cdot 10\,000 + 2 \cdot 100 \cdot ab + b^2 =$$
$$= a^2 \cdot 10\,000 + 2ab \cdot 100 + b^2.$$

(a je číslice stovek, b je číslice jednotek.)

5.30

Rozložíme číslo 123 456 na prvočinitele:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 643.$$

Z toho 643 je prvočíslo a ze zbývajících cifer můžeme vytvořit jen jedno trojciferné číslo. Výsledek je tudíž $192 \cdot 643 = 123\,456$.

5.31

První číslice musí být 3, protože jeho mocnina je jednociferná a vyjde nám odhadem z prvního dvojčíslí. Druhým číslem může být jen 1, protože $62 \cdot 2$ dá trojciferné číslo ve čtvrtém řádku. Protože pátý řádek začíná číslicí 4, výsledek musí končit sedmičkou. Výsledek je tudíž

$$\sqrt{100\,489} = 317.$$

5.32

$444,\ 44^4,\ 4^{44},\ 4^{4^4}$.
$4^{256} > 4^{44}$, tedy $4^{44} < 4^{4^4}$.

Protože 4^{44} je možno napsat jako $(4^4)^{11} = 256^{11}$, je možno z toho usoudit, že $44^4 < 4^{44}$, neboť

$$44^4 < 256^{11};$$

o základech totiž platí $44 < 256$, a o exponentech $4 < 11$.
Celkové uspořádání bude toto:

$$444 < 44^4 < 4^{44} < 4^{4^4}.$$

Největší číslo je 4^{4^4}.

5.33

Levá strana rovnice je násobkem devíti, to znamená, že i pravá strana bude dělitelná devíti. Součet číslic na pravé straně musí být tedy též dělitelný devíti. Jestliže součet číslic bez jedné nahrazené písmenem a je 19, číslice nahrazená písmenem a musí být 8.
Druhá odmocnina čísla 492 804 je 702:

$$3(230 + t) = 702 \text{ a z toho } t = 4.$$

5.34

$$\begin{array}{ccccc}
(171\times 5) & - & (3^2\times 5^2) & = & (63\times 3^2) \\
: & & - & & - \\
19 & \times & 13 & = & 247 \\
= & & = & & = \\
(3^2\times 5) & + & (5^2\times 11) & = & (5\times 2^6)
\end{array}$$

V prvním sloupci $(ABA \times C) : AG = (D^E \times C)$ nebo $ABA : AG = D^E$. Určíme dolní a horní mez tohoto podílu. Nejmenší hodnota D^E je pro $ABA = 121$ a $AG = 19$; $D^E = 121 : 19 > 6$; největší pro $ABA = 191$ a $AG = 12$; $(191 : 12 < 16)$.

Pro D^E tedy platí $6 < D^E < 16$. Nemůže být $E = 0$, protože by $D^E = 1$. Při $E = 1$ by dole z druhého sloupce vycházelo záporné číslo.

Při $E = 3$ je nutně $D = 2$, $D^E = 8$ a číslo ABA je dělitelné 8. A, B jsou čísla sudá, různá od D, a dále docházíme k množství nesrovnalostí.

Při $A = 6$ nebo 8 vychází v druhé řádce součin větší než 400, což nesouhlasí.

Při $E > 3$ je nemožné najít D, aby D^E bylo mezi 7 a 15.

Při $E = 2$ dostaneme $D = 3$, $D^E = 9$.
Číslo ABA je dělitelné 9 a $AG \times AD = EHB = 2HB < 300$. Vyhovuje tedy jedině $ABA = 171$ a další čísla nám již lehce vyjdou.

5.35

Podmínka $E^2 = H$ může platit jen tehdy, když $H = 9$ a $E = 3$ nebo $H = 4$ a $E = 2$. Předpokládejme, že $H = 9$. Ve sloupci tisíců je $D + S > 10$, neboť jinak by nemohla být N a C ve sloupci desetitisíců různá čísla. Podle toho by potom $D + S = 19$, což je nemožné, neboť kdyby i zůstal zbytek 2 ve sloupci stovek, $D + S$ může být nejvíce $7 + 8 = 15$ se zbytkem 17. Potom na místě pro H bychom dostali 7 a o H jsme předpokládali, že je 9. Tedy H může být jen 4 a E zase 2.

$$\begin{array}{r} D\,P\,J \\ N\,D\,R\,2\,2 \\ S\,2\,N\,D \\ \hline C\,4\,2\,2\,R \end{array}$$

$D + S +$ zbytek $= 14$, tedy $D + S = 13 \Rightarrow$

$D = 8$ a $S = 5$, nebo $D = 7$, $S = 6$,
$D = 5$, $S = 8$, $D = 6$, $S = 7$.

Součet $4 + 9$ nemůže přijít v úvahu, neboť 4 je H. Je-li $D = 8$, ze sloupce jednotek vyplývá, že $J = R$, což je nemožné. Je-li $D = 5$, vypadal by sloupec stovek $5 + R + 2 +$ zbytek $= 12$ nebo 22. Ani v sloupci stovek, ani v sloupci desítek nemůže být zbytek 2, neboť ze tří cifer jedna je 2 a druhé dvě mohou být nejvíce $9 + 8 = 17$. Zbytek je podle toho 1, čili $5 + R + 2 + 1 = 12 \Rightarrow R = 4$, a to je obsazené písmenem H.
Kdyby $D = 7$, potom $7 + R + 2 + 1$ (zbytek) $= 12 \Rightarrow R = 2$, což není možné, neboť $E = 2$.
Tedy $D = 6$ a $S = 7$.

$$\begin{array}{r} 6\,P\,J \\ N\,6\,R\,2\,2 \\ 7\,2\,N\,6 \\ \hline C\,4\,2\,2\,R \end{array}$$

Ze sloupce stovek vyplývá, že $6 + R + 2 + 1$ (zbytek) $= 12 \Rightarrow R = 3$.

$$\begin{array}{r} 6\,P\,J \\ N\,6\,3\,2\,2 \\ 7\,2\,N\,6 \\ \hline C\,4\,2\,2\,3 \end{array}$$

Ze sloupce jednotek je vidět, že $J + 2 + 6 = 13 \Rightarrow J = 5$.

$$\begin{array}{r} 6\,P\,5 \\ N\,6\,3\,2\,2 \\ 7\,2\,N\,6 \\ \hline C\,4\,2\,2\,3 \end{array}$$

Ze sloupce jednotek je vidět, že $5 + 2 + 6 = 13$, zbytek je 1. Při desítkách zase $P + 2 + N + 1$ (zbytek) $= 12$, čili $P + N = 9$, což může být jen v těchto případech: $P = 1$ a $N = 8$ nebo $P = 8$ a $N = 1$.
N nemůže být 1, neboť potom by C, které je o 1 větší, bylo 2, což nemůže být. Takto zůstane jen možnost: $P = 1$, $N = 8$, $C = 9$.
Výsledek:

$$\begin{array}{r} 615 \\ 86322 \\ 7286 \\ \hline 94223 \end{array}$$