Domácí úkol 2

Upozornění: příklad byl náhodně vygenerován odpovědníkem „Domácí úkol 2“. Nabízené řešení bylo zpracováno Lukášem Másilkem.

Zadání: Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{4 \cdot (x-1)}{x^2}$$

a sestrojte její graf, na němž vyznačte veškeré význačné body (průsečíky s osou x, lokální extrémy, inflexní body) i přímky (asymptoty bez směrnice i se směrnicí), pokud existují.

Graf nakreslete rukou na papír (případně dotykovým perem na tabletu). Jinou barvou zvýrazněte křivku funkce, jinou barvou význačné body a jinou barvou asymptoty.

Vaše výpočty přehledně strukturujte a postupujte chronologicky, tj. od určení definičního oboru až po asymptoty. V případě bodů nás zajímají obě souřadnice, u inflexních bodů $[x_0, y_0]$ spočítejte také první derivaci $f'(x_0, y_0)$.

Řešení:

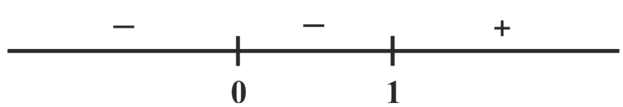
1. Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

2. Sudá, lichá funkce:

$$f(-x) = \frac{4 \cdot ((-x) - 1)}{(-x)^2} = -\frac{4 \cdot (x+1)}{x^2}$$

Funkce není ani sudá, ani lichá.

3. Charakteristika bodů nespojitosti: pro bod nespojitosti $x = 0$ stanovíme obě jednostranné limity, přičemž si pomůžeme stanovením znamének funkce. Nulové body funkce jsou $0, 1$.



V okolí bodu nespojitosti $x = 0$ je funkce na obou stranách záporná, tudíž:

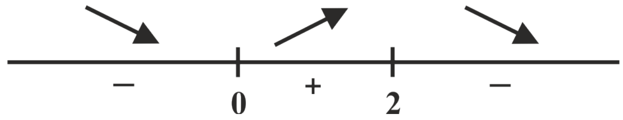
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

4. Znaménka funkce: z předchozího obrázku je patrné, že funkce je pod osou x pro $x \in (-\infty, 1)$ a nad osou x pro $x \in (1, \infty)$. Bod $[1; 0]$ je průsečíkem s osou x.

5. Monotonie, lokální extrémy: spočítejme nejprve 1. derivaci funkce $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[4 \cdot (x-1)]' \cdot x^2 - 4 \cdot (x-1) \cdot [x^2]'}{(x^2)^2} = \frac{4x^2 - 4 \cdot (x-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{4x^2 - 8x^2 + 8x}{x^4} \\ &= \frac{-4x \cdot (x-2)}{x^4} = (-4) \cdot \frac{x-2}{x^3} \end{aligned}$$

Dva nulové body $0, 2$ opět naneseme na číselnou osu a zjistíme znaménka 1. derivace.

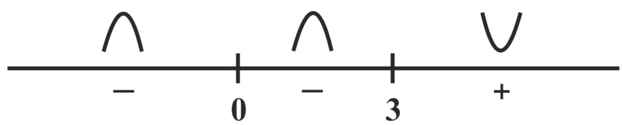


Funkce $f(x)$ je klesající pro $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ a rostoucí pro $x \in (0, 2)$. Bod $x = 0$, v němž se mění znaménko 1. derivace, nemůže být lokálním extrémem (funkce v něm není definovaná). Bod $A[2; f(2)] = A[2; 1]$ je lokálním maximem.

6. Konvexnost/konkávnost, inflexní body: spočítejme nejprve 2. derivaci funkce $f(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[(-4) \cdot \frac{x-2}{x^3}\right]' = (-4) \cdot \left[\frac{x-2}{x^3}\right]' = (-4) \cdot \frac{(x-2)' \cdot x^3 - (x-2) \cdot (x^3)'}{(x^3)^2} \\ &= (-4) \cdot \frac{x^3 - (x-2) \cdot 3x^2}{x^6} = (-4) \cdot \frac{x^2 \cdot [x - 3 \cdot (x-2)]}{x^6} = (-4) \cdot \frac{-2x+6}{x^4} \\ &= 4 \cdot \frac{2 \cdot (x-3)}{x^4} = \frac{8 \cdot (x-3)}{x^4} \end{aligned}$$

Dva nulové body $0, 3$ opět naneseme na číselnou osu a zjistíme znaménka 2. derivace.



Funkce $f(x)$ je konkávní pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3)$ a konvexní pro $x \in (3, \infty)$. Bod $B[3; f(3)] = B[2; \frac{8}{9}]$ je inflexním bodem. Tečna v bodě B má směrnici $f'(3) = -\frac{4}{27}$, takže v něm pomalu klesá a graf funkce mění tvar jen velmi pozvolně.

7. Asymptoty: asymptotou bez směrnice je přímka $x = 0$. Graf funkce v jejím okolí jsme již řešili v bodu 3. Najdeme asymptotu se směrnicí $y = kx + q$.

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{4 \cdot (x-1)}{x^2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4 \cdot (x-1)}{x^3} = 0 \\ q &= \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - kx = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4 \cdot (x-1)}{x^2} - 0 \cdot x = 0 \end{aligned}$$

Asymptotou se směrnicí je pro $x \to \pm\infty$ přímka $y = 0$.

8. Graf