Domácí úkol 3

Upozornění: příklady byly náhodně vygenerovány odpovědníkem „Domácí úkol 3“. Nabízené řešení bylo zpracováno Lukášem Másilkem.

Příklad 1 (definiční obor): Znázorněte graficky definiční obor zadané funkce dvou proměnných:

$$z = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{y^2 - 1}}$$

Řešení: nejdříve stanovíme podmínky. Výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven 0 a zároveň nelze dělit nulou:

$$\frac{x^2-4}{y^2-1} \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(x^2 - 4 \geq 0 \wedge y^2 - 1 \geq 0\right) \vee \left(x^2 - 4 \leq 0 \wedge y^2 - 1 \leq 0\right)$$

$$y^2 - 1 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad y \neq \pm 1$$

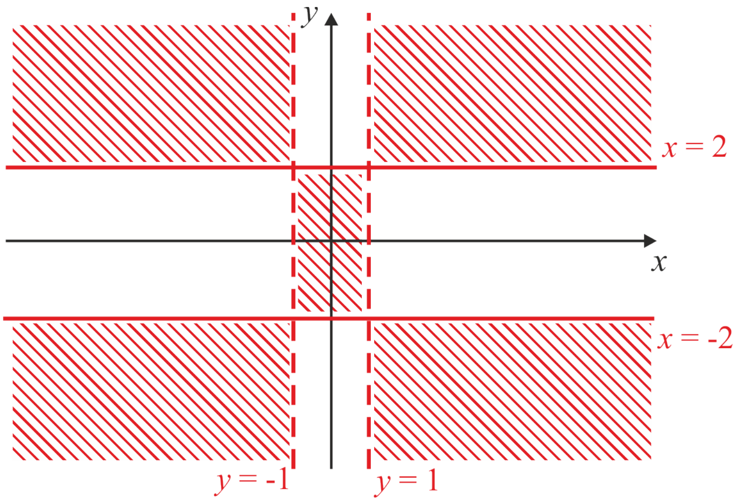
Obě podmínky lze upravit do jedné takto:

$$\begin{aligned} \left(x^2 - 4 \geq 0 \wedge y^2 - 1 > 0\right) \quad &\vee \quad \left(x^2 - 4 \leq 0 \wedge y^2 - 1 < 0\right) \\ \left(x^2 \geq 4 \wedge y^2 > 1\right) \quad &\vee \quad \left(x^2 \leq 4 \wedge y^2 < 1\right) \\ (|x| \geq 2 \wedge |y| > 1) \quad &\vee \quad (|x| \leq 2 \wedge |y| < 1) \end{aligned}$$

Z poslední úpravy už lze symbolicky zapsat definiční obor funkce:

$$D(z) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2,\ (|x| \geq 2 \wedge |y| > 1) \vee (|x| \leq 2 \wedge |y| < 1)\}.$$

Co se týče grafického znázornění, tak si nejprve narýsujeme přímky $x = 2, x = -2$ (plnou čarou) a $y = 1, y = -1$ (čárkovaně). Poté už „vyšrafujeme“ oblasti příslušející oběma podmínkám.



Příklad 2 (výpočet limity): Vypočítejte následující limitu:

$$\lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{xy + 2x + y + 2}{xy^2 + y^2 + x + 1}$$

Řešení: tuto limitu lze spočítat úpravami, a to částečným vytýkáním:

$$\begin{aligned}\lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{xy+2x+y+2}{xy^2+y^2+x+1} &= \lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{x\cdot(y+2)+(y+2)}{y^2\cdot(x+1)+(x+1)} \\ &= \lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{(y+2)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(y^2+1)} \\ &= \lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{y+2}{y^2+1} = 2\end{aligned}$$

Příklad 3 (metoda postupných limit): Zjistěte, zda

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2}{y}$$

existuje, přičemž použijte metodu postupných limit. Potvrzují výsledky Vašich výpočtů neexistenci limity? Zdůvodněte Vaši odpověď.

Řešení: spočítáme obě postupné limity:

$$\begin{aligned}L_1 &= \lim_{y\to0}\left[\lim_{x\to0}\frac{x^2}{y}\right] = \lim_{y\to0}\frac{0}{y} = 0 \\ L_2 &= \lim_{x\to0}\left[\lim_{y\to0}\frac{x^2}{y}\right] \quad \text{neexistuje,}\end{aligned}$$

protože přibližováním se $y \to 0$ zleva a zprava dostáváme jiné výsledky limity. Protože tedy $L_1 \neq L_2$, plyne z metody postupných limit neexistence limity.

Příklad 4 (přibližování po přímkách): Zjistěte, zda

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2+x}{xy+y}$$

existuje, přičemž použijte metodu přibližování se k limitnímu bodu po přímkách. Potvrzují výsledky Vašich výpočtů neexistenci limity? Zdůvodněte Vaši odpověď.

Řešení: nejprve si limitní výraz zjednodušíme pomocí vytýkání v čitateli i jmenovateli:

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2+x}{xy+y} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x\cdot(x+1)}{y\cdot(x+1)} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x}{y}$$

Vzhledem k limitnímu bodu $[x_0, y_0] = [0, 0]$ volíme substituci
$y = k\cdot(x - x_0) + y_0 = kx$, tedy:

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x}{y} = \lim_{x\to0}\frac{x}{kx} = \lim_{x\to0}\frac{1}{k} = \frac{1}{k}$$

Protože výsledek limity zcela závisí pouze na parametru k, je tím potvrzena neexistence limity.

Příklad 5 (přibližování po parabolách): Zjistěte, zda

$$\lim_{[x,y]\to[1,4]} \frac{x^2-1}{y-4}$$

existuje, přičemž použijte metodu přibližování se k limitnímu bodu po parabolách. Potvrzují výsledky Vašich výpočtů neexistenci limity? Zdůvodněte Vaši odpověď.

Řešení: vzhledem k limitnímu bodu $[x_0, y_0] = [1, 4]$ volíme substituci
$y = k \cdot (x - x_0) + y_0 = k \cdot (x-1)^2 + 4$, tedy:

$$\lim_{[x,y]\to[1,4]} \frac{x^2-1}{y-4} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{k(x-1)^2+4-4} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{k\cdot(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{k\cdot(x-1)}$$

Dosadit limitní bod $x = 1$ nelze (dělení nulou). Protože výsledek limity je závislý na parametru k i proměnné x, nelze o neexistenci limity rozhodnout.

Příklad 6 (transformace do polárních souřadnic): Zjistěte, zda

$$\lim_{[x,y]\to[6,8]} \frac{y-8}{x+y-14}$$

existuje a případně uveďte výsledek limity, přičemž použijte metodu transformace do polárních souřadnic. Potvrzují výsledky Vašich výpočtů existenci či neexistenci limity? Zdůvodněte Vaši odpověď.

Řešení: vzhledem k limitnímu bodu $[x_0, y_0] = [6, 8]$ volíme substituci

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \varrho \cdot \cos\varphi = 6 + \varrho \cdot \cos\varphi, \\ y &= y_0 + \varrho \cdot \cos\varphi = 8 + \varrho \cdot \sin\varphi. \end{aligned}$$

Polarní souřadnice nyní použijeme při výpočtu limity:

$$\begin{aligned} \lim_{[x,y]\to[6,8]} \frac{y-8}{x+y-14} &= \lim_{\varrho\to 0} \frac{8+\varrho\cdot\sin\varphi-8}{6+\varrho\cdot\cos\varphi+8+\varrho\cdot\sin\varphi-14} \\ &= \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho\cdot\sin\varphi}{\varrho\cdot\cos\varphi+\varrho\cdot\sin\varphi} = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho\cdot\sin\varphi}{\varrho\cdot(\cos\varphi+\sin\varphi)} \\ &= \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi} \end{aligned}$$

Protože výsledek limity zcela závisí pouze na úhlu φ, je tím potvrzena neexistence limity.

Příklad 7 (bonusový): Zjistěte, zda

$$\lim_{[x,y]\to[0,1]} \frac{x^2+y\cdot(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$$

existuje a případně uveďte výsledek limity, přičemž použijte metodu transformace do polárních souřadnic. Potvrzují výsledky Vašich výpočtů existenci či neexistenci limity? Zdůvodněte Vaši odpověď.

Řešení: vzhledem k limitnímu bodu $[x_0, y_0] = [1, 4]$ volíme substituci

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \varrho \cdot \cos\varphi = \varrho \cdot \cos\varphi, \\ y &= y_0 + \varrho \cdot \cos\varphi = 1 + \varrho \cdot \sin\varphi. \end{aligned}$$

Polarní souřadnice nyní použijeme při výpočtu limity:

$$\begin{aligned} \lim_{[x,y]\to[0,1]} \frac{x^2 + y \cdot (y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2} &= \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^2 \cdot \cos^2\varphi + (1 + \varrho \cdot \sin\varphi) \cdot (1 + \varrho \cdot \sin\varphi - 1)^2}{\varrho^2 \cdot \cos^2\varphi + (1 + \varrho \cdot \sin\varphi - 1)^2} \\ &= \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^2 \cdot \cos^2\varphi + (1 + \varrho \cdot \sin\varphi) \cdot \varrho^2 \cdot \sin^2\varphi}{\varrho^2 \cdot \cos^2\varphi + \varrho^2 \cdot \sin^2\varphi} \\ &= \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^2 \cdot [\cos^2\varphi + (1 + \varrho \cdot \sin\varphi) \cdot \sin^2\varphi]}{\varrho^2 \cdot (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} \\ &= \lim_{\varrho\to 0} [\cos^2\varphi + (1 + \varrho \cdot \sin\varphi) \cdot \sin^2\varphi] \\ &= \lim_{\varrho\to 0} [\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + \varrho \cdot \sin^3\varphi] \\ &= \lim_{\varrho\to 0} [1 + \varrho \cdot \sin^3\varphi] = 1 + \lim_{\varrho\to 0} [g(\varrho) \cdot h(\varrho, \varphi)] = 1, \end{aligned}$$

jelikož

1. $\lim_{\varrho\to 0} g(\varrho) = \lim_{\varrho\to 0} \varrho = 0$ a
2. $h(\varrho, \varphi) = \sin^3\varphi$ je funkce ohraničená zdola -1 a shora 1.