Rekreační matematika – cvičení 2

Věčný kalendář (Ian Stewart, Kabinet matematických kuriozit)

V roce 1957 si John Singleton nechal patentovat stolní kalendář, na kterém bylo možné nastavit kterékoli datum od 01 do 31 pomocí dvou krychlí, v roce 1965 nechal však svůj patent propadnout. Na každé krychli je šest číslic, na každé stěně jedna. Jak musíme popsat stěny kostek, abychom mohli zobrazit všechna data v libovolném měsíci? Pořadí kostek lze měnit.

Řešení:

Na obou kostkách musí být 1 a 2 (11., 22.), na obou musí být také 0, aby bylo možné napsat jakékoli datum 01.-09. Nyní zůstává 6 volných míst pro 7 číslic. Vtip je v tom, že číslice 6 a 9 jsou zaměnitelné, stačí nám tedy jediná z nich.

Kolik máte vlasů?

V průměru mají na hlavě nejvíce vlasů světlovlasí lidé (okolo 140 000), nejméně zrzaví (asi 80 000) (zdroj: wikipedia). Existují v Brně dvě osoby se stejným počtem vlasů?

Řešení:

Jelikož má Brno více než 140 000 obyvatel, musí nutně (Dirichletův princip) existovat alespoň dva lidé se stejným počtem vlasů na hlavě. Dokonce musí existovat alespoň tři takoví lidé, protože Brno má více než 280 000 obyvatel.

Počítáme vlasy (Smullyan, Jak se jmenuje tahle knížka?)

V Lysé pod Plešivou se věci mají následovně:

Žádní dva obyvatelé nemají na hlavě přesně stejně vlasů.

Žádný obyvatel nemá na hlavě přesně 518 vlasů.

Lysá má víc obyvatel, než má kterýkoli obyvatel vlasů na hlavě.

Jaký je nejvyšší možný počet obyvatel Lysé pod Plešivou?

Řešení:

Odpověď je 518. Má-li Lysá více než 518 obyvatel (např. 520), potom by existovalo 520 nezáporných celých čísel menších než 520 a různých od 518. To ale není pravda, takových čísel je pouze 519. Navíc jeden obyvatel musí být holohlavý.

V**yhýbám se klokanům? (Ian Stewart, Truhlice matematických pokladů)**

- Jedinými zvířaty v tomto domě jsou kočky.
- Každé zvíře, které rádo upřeně pozoruje měsíc, je vhodné k chovu jako domácí mazlíček.
- Když některá zvířata nemám rád, vyhýbám se jim.
- Žádná zvířata nejsou masožravci, kromě těch, co loví v noci.
- Žádná kočka si nenechá ujít příležitost k zabití myši.
- Nikdy ke mně žádná zvířata nepřilnou, kromě zvířat žijících v tomto domě.
- Klokani nejsou vhodní k chovu jako domácí mazlíčci.
- Myši zabíjejí pouze masožravci.
- Nemám rád zvířata, která ke mně nepřilnou.
- Zvířata, která loví v noci, ráda upřeně pozorují měsíc.

Jsou-li všechna tato tvrzení správná, vyhýbám se klokanům?

Řešení:

Ano, vyhýbám se klokanům. V knize je uveden delší postup, ale stačí říci, že jedinými zvířaty v tomto domě jsou kočky, nikdy ke mně žádná zvířata nepřilnou, kromě zvířat žijících v tomto domě, nemám rád zvířata, která ke mně nepřilnou a když některá zvířata nemám rád, vyhýbám se jim.

Polykání slonů (Ian Stewart, Truhlice matematických pokladů)

- Sloni vždy nosí růžové spodky.
- Každý živočich, který jí med, umí hrát na dudy.
- Cokoli, co lze snadno spolknout, jí med.
- Žádný živočich, který nosí růžové spodky, neumí hrát na dudy.

Jsou-li všechna tato tvrzení správná, plyne z nich, že lze slony snadno spolknout

Řešení:

Tento výsledek z tvrzení neplyne. Víme, že žádný slon neumí hrát na dudy. Dále ale cokoli, co lze snadno spolknout, umí hrát na dudy.

Tvídový oblek (Ian Stewart, Kabinet matematických kuriozit)

- Žádný kocour v tvídovém obleku není nespolečenský.
- Žádný bezocasý kocour by si nehrál s gorilou.
- Kocouři s fousky nosí zásadně jedině tvídové obleky.
- Žádný společenský kocour nemůže mít tupé drápky.
- Žádný kocour nemá ocas, nemá-li zároveň fousky.

Je logicky správný závěr, že žádný kocour s tupými drápky by si nehrál s gorilou?

Řešení:

Závěr není správný. Představme si kocoura s tupými drápky, který si hraje s gorilou, nemá tvídový oblek, má ocas, nemá fousky a je nespolečenský. Pak je prvních pět výroků pravdivých, ale šestý není.

Rodinné setkání (Ian Stewart, Kabinet matematických kuriozit)

„To byl ale nádherný večírek," řekla Lucka své kamarádce Jindře.

„A kdo všechno tam byl?"

„No, tak byl tam jeden dědeček, jedna babička, dva otcové, dvě matky, čtyři děti, tři vnoučata, jeden bratr, dvě sestry, dva synové, dvě dcery, jeden tchán, jedna tchýně a jedna snacha."

„Páni! Třiadvacet lidí!"

„Ale kdepak, mnohem méně."

Jaký je nejmenší počet osob, který by vyhovoval Lucčině popisu společnosti na večírku?

Řešení:

Nejmenší možný počet osob je 7: dvě malé dívky a jeden chlapec, jejich otec a matka a rodiče jejich otce.

Pravopisné chyby (Ian Stewart, Kabinet matematických kuriozit)

„V teto větě je pěd chip."

Je tento výrok pravdivý, nebo není?

Řešení:

Výrok je pravdivý, protože obsahuje čtyři pravopisné chyby a jednu chybu numerickou ve tvrzení, tedy celkem pět. To by ale znamenalo, že jestliže věta platí, pak neplatí, a naopak. Máme tu paradox.

Papírky na čele (Novosecký, Křižanovič, Lečko, 777 matematických zábav a her)

Třem hráčům ukázali 5 papírků: tři bílé a dva černé. Potom všem třem zavázali oči, každému přilepili na čelo bílý papírek a černé papírky zničili. Potom jim sňali pásky z očí a oznámili jim, že vyhraje ten, kdo první určí barvu svého papírku. Nikdo ze soutěžících nemohl vědět, jaký papírek má na čele, ale každý viděl bílé papírky na čelech svých spoluhráčů. Po krátkém přemýšlení došli všichni tři současně k závěru, že každý má na čele bílý papírek. Jak na to přišli?

Řešení:

A usuzoval takto: B a C mají dva bílé papírky, já mohu mít bílý, nebo černý. Předpokládejme, že mám černý. Pak B může s určitostí prohlásit barvu svého papírku, protože může uvažovat takto: A má černý papírek a C bílý, pokud bych sám měl černý papírek, C ví jistě, že má bílý. Proto musím mít bílý papírek. B ale nic neřekl, takže je jisté, že má A bílý papírek. Takto usuzoval každý z hráčů.

Dvě věže (Dudeney, Matematické hlavolamy a hříčky)

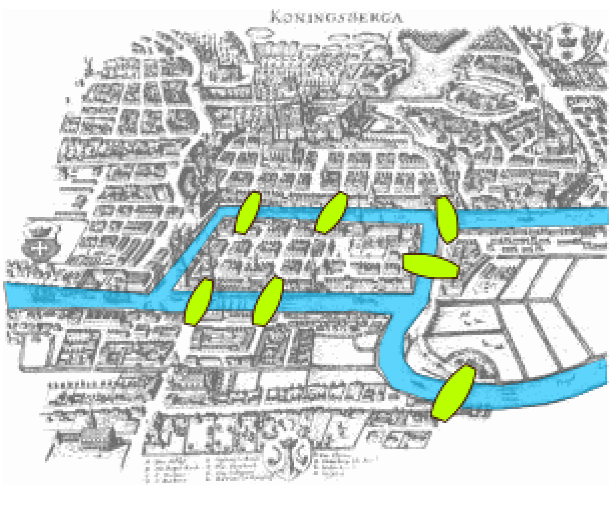
Toto je hra pro dva hráče. Každý má jednu věž. První hráč postaví svou věž na libovolné políčko šachovnice podle vlastní volby a druhý udělá totéž. Teď se střídají v tazích (věž postupuje pouze vodorovně nebo svisle) a účelem je zajmout soupeřovu věž. Při této hře ale nesmíte táhnout přes ohrožené pole, v tom případě jste také zajati.

Řešení:

Druhý hráč si může zajistit vítězství tím, že umístí svou věž na začátku i po každém tahu na stejnou úhlopříčku, na níž je soupeřova věž. Toho pak přinutí ustoupit do rohu a vyhrává.

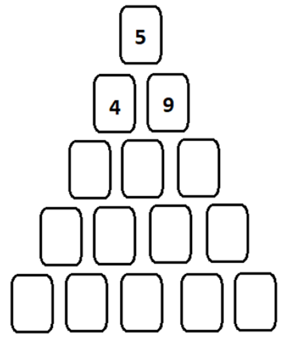
Královecké mosty (Ian Stewart, Kabinet matematických kuriozit, upraveno)

Tato jednoduchá úloha v rukou Leonharda Eulera v roce 1735 položila základy celé teorie grafů. Královec se rozkládal na březích řeky Pregel. Řeka vytvořila dva ostrovy, které byly propojeny mezi sebou a s břehy pomocí celkem sedmi mostů. Úloha zněla: existuje trasa procházky městem, která by vedla přes každý ze sedmi mostů právě jednou?

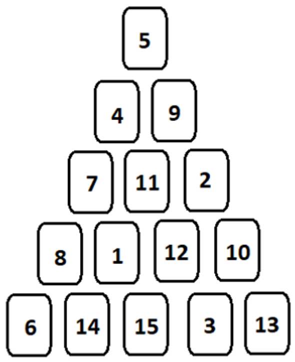


Trojúhelník z karet (Ian Stewart, Kabinet matematických kuriozit, upraveno)

Máme patnáct karet označených postupně čísly 1 až 15. Naším úkolem je sestavit je do trojúhelníka podle obrázku tak, aby číslo na každé kartě odpovídalo rozdílu čísel a obou kartách pod ní (vlevo a vpravo).



Řešení:

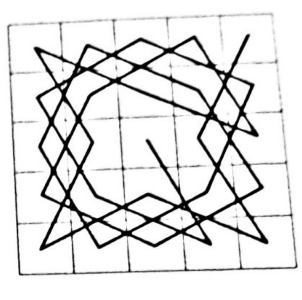


Jezdecký výlet (Ian Stewart, Kabinet matematických kuriozit, upraveno)

Jezdec má v šachu neobvyklý krok – posunuje se vždy o dvě políčka libovolným směrem a pak ještě o jedno políčko v pravém úhlu k původnímu směru pohybu. Pokud se mu do cesty připletou nějaké figurky, prostě je přeskočí. Procestujte jezdcem všechna políčka na šachovnici 5x5 tak, že každé navštívíte právě jednou. Zkuste tímto způsobem procestovat šachovnici 4x4.

Řešení:

Šachovnici 5x5 lze procestovat například následujícím způsobem:



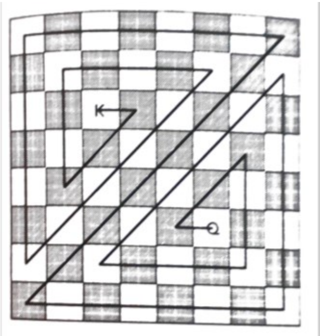
Šachovnici 4x4 tímto způsobem nemůžeme procestovat, problém je v rohových políčkách. Rohová políčka ležící na jedné úhlopříčce mají totiž pouze dvě políčka, na jaké se z nich (či do nich) lze dostat, tyto políčka jsou pro oba rohy stejná. Dojdeme tedy k závěru, že má-li být každé políčko využito právě jednou, museli bychom v jednom rohovém políčku začínat a v úhlopříčném rohovém políčku končit. Co ale zbylá dvě rohová políčka, pro která platí stejná podmínka?

Cesta dalekáť (Ian Stewart, Kabinet matematických kuriozit)

Šachová dáma může táhnout o libovolný počet políček v kterémkoli vodorovném, svislém či diagonálním směru. Dáma stojící na políčku F3 by ráda navštívila krále stojícího na políčku C6. Navíc by cestou ráda zkontrolovala všechny své poddané, kteří žijí na zbývajících 62 políčkách šachovnice. Stačí projet kolem, nemusí se hned všude nutně zastavit, i když to tu a tam bude nezbytné. Jak má udělat, aby procestovala všechna políčka a skončila svou pouť u krále, aniž by některé políčko navštívila dvakrát, při nejmenším možném počtu tahů?

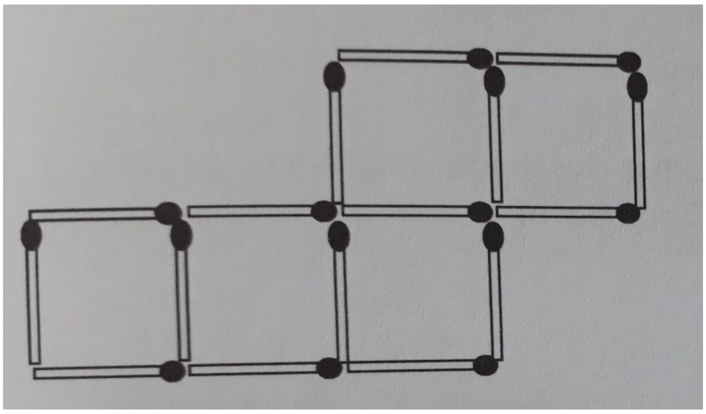
Řešení:

Nejmenší možný počet tahů je 15, cesta navíc nesmí sama sebe protínat (některé políčko by bylo navštíveno dvakrát). Cestě s 15 tahy odpovídá cesta po úhlopříčkách.

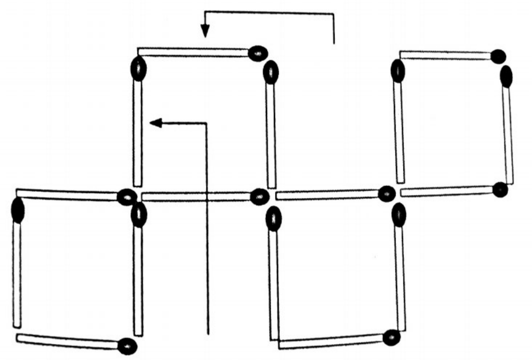


Šestnáct zápalek (Ian Stewart Truhlice matematických pokladů)

Šestnáct zápalek je poskládáno ta, že tvoří pět shodných čtverců. Přesuňte dvě zápalky tak, aby se počet čtverců snížil na čtyři.



Řešení:



Šest čtverců (Lečko a spol., 777 matematických zábav a her)

Sestavte z devíti zápalek šest čtverců.

Řešení:

Dva čtverce na sebe navazující jednou stranou, jeden z nich dvě zápalky dělí na 4 malé čtverce.

Přeskakování zápalkového souseda

Položme si 10 zápalek vedle sebe. Naším cílem je překřížit všechny zápalky po dvou tak, že vždy přeskočíme zápalkou dvě zápalky a na třetí ji položíme.

Řešení:

Očíslujme si zápalky 1 až 10. Můžeme postupovat například: 4->1; 6->9; 8->3; 5->2; 7->10.

Kavárna (777 matematických her a zábav)

V kavárně bylo 12 lidí, kteří se posadili ve skupinkách ke stolům. Každý z nich při odchodu podal ruku všem osobám, které seděly u jeho stolku. Celkem si vyměnili 19 podání ruky. U kolika stolů hosté seděli a kolik jich sedělo u každého ze stolů?

Řešení:

Spočítejme si, kolik podání ruky proběhne u stolu, kde sedí 2, 3, 4, nebo více osob. Pokud jsou u stolu dvě osoby, proběhne pouze jedno podání rukou. Pokud jsou 3 osoby, proběhne 2+1 podání rukou – když odchází první host, podá ruku dvěma osobám, dál je situace stejná jako u stolu s dvěma osobami.

2 osoby	1
3 osoby	2+1=3
4 osoby	3+2+1=6
5 osob	4+3+2+1=10
6 osob	5+4+3+2+1=15
7 osob	6+5+4+3+2+1=21

Nyní už jen potřebujeme určit správnou kombinaci počtu osob u stolů, aby proběhlo 19 podání ruky. Správné rozmístění hostů je jeden stůl pro 3, jeden stůl pro 4 a jeden stůl pro 5 osob.

Narozeninový paradox

Určete minimální velikost skupiny, ve které je pravděpodobnost nalezení alespoň jedné dvojice se stejným datem narození (den a měsíc) alespoň 50 %.

Řešení:

Spočítejme si pravděpodobnost, že bude mít každý se skupiny osob narozeniny jiný den. Pravděpodobnost, že budou mít alespoň dvě osoby narozeniny ve stejný den, spočítáme jako doplněk do 100 %.

Uvažujme libovolnou osobu. Pokud k ní přidáme osobu druhou, má tato druhá osoba narozeniny v jiný des s pravděpodobností $p = {}^{364}/_{365}$, jeden den z roku už je totiž „zabraný“ první osobou. Teď jsou již zabrané dny dva, pokračujeme stejnými úvahami např. pro 5 osob dostáváme:

$$p = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \frac{361}{365} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot 361}{365^5} = \frac{365!}{365^5 \cdot (365-5)!} \sim 97\ \%$$

Obecně můžeme zapsat $p = \frac{365!}{365^n \cdot (365-n)!}$. Hodnota tohoto výrazu poměrně rychle klesá (a tím stoupá pravděpodobnost narozenin ve stejný den), například pro $n = 10 \rightarrow p = 88\ \%$, pravděpodobnost stejných narozenin je 12 %. Poprvé stoupne pravděpodobnost narozenin ve stejný den nad 50 % pro 23 osob (50,7 %). Pro vyšší počet osob pravděpodobnost dál rychle roste, např. pro 50 osob už je tato pravděpodobnost 97 %.

Hypochondrův problém

Ondřej Hypoch dostal od lékaře balení 48 prášků. Celé balení musí vypotřebovat za 30 dní, přičemž každý den si musí vzít alespoň jeden prášek. V příbalovém letáku se ovšem vyskytovala dvě zneklidňující upozornění. Pokud v některých po sobě jdoucích dnech pacient užije právě 18 prášků (každý den polyká pacient všechny prášky najednou), vypadají mu všechny zuby. Navíc pokud pacient užije v některých po sobě jdoucích dnech právě 11 prášků, upadnou mu palce u rukou. Otázka zní, zda se bude moci Ondřej po skončení léčby kousnout do palce. Předpokládejme, že Ondřej udělá vše pro to, aby mu zůstaly palce i zuby.

Řešení:

Zuby může vyřešit například tak, že si prvních 15 dnů bude brát po jednom prášku, 16. den si vezme 19 prášků a dalších 14 si vezme opět vždy po jednom prášku.

S palci je to horší. Označme p_1 počet prášků, které Ondřej spolykal za první den, p_2 počet prášků spolykaných za první dva dny a tak dále. Platí: $0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{30} = 48$. Přičteme-li ke každé hodnotě číslo 11 následovně: $11 < p_1 + 11 < p_2 + 11 < \cdots < p_{30} + 11 = 59$, nerovnosti zřejmě zůstanou zachovány. Pokud by Ondřej spolykal v některých 11 po sobě jdoucích dnech právě 11 prášků, muselo by se některé číslo p_i rovnat některému číslu $p_j + 11$. To se ovšem nutně stane, protože zeleně označených hodnot je právě 60, všechny jsou celočíselné kladné a nejvyšší z nich je hodnota 59. Proto musí být alespoň jedna hodnota z první řady rovna alespoň jedné hodnotě z druhé řady a Ondřej přijde o palce u rukou.

Odpověď tedy zní kladně, avšak bude se moci kousnout pouze do palce u nohy.