



**PEDAGOGICKÁ
FAKULTA**
Masarykova univerzita

Mechanika a molekulová fyzika

Tekutiny

Doc. RNDr. Petr Sládek, CSc.

Pedagogická fakulta
Masarykova Univerzita
Poříčí 7, 603 00 Brno



Pro potřeby přednášky zpracováno s využitím www.studopory.vsb.cz materialy html_files

Proudění ideální kapaliny

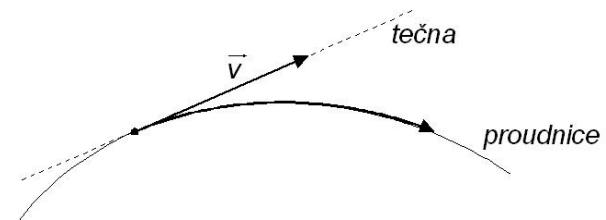
Uspořádaný makroskopický pohyb částic tekutiny označujeme jako proudění tekutiny.

Popis pomocí rychlosti a tlaku v každém místě proudění.

Proudění

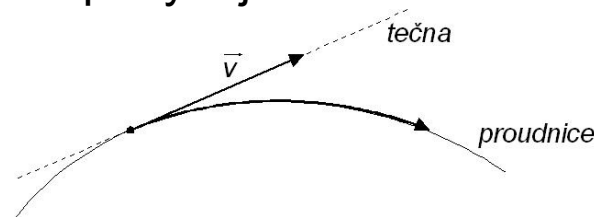
- **ustálené (stacionární)** v libovolném místě rychlost a tlak **nezávisí** na čase.
- **neustálené (nestacionární)** v libovolném místě rychlost a tlak **závisí** na čase.

Ke grafickému znázornění proudění tekutiny používáme *proudnic*.



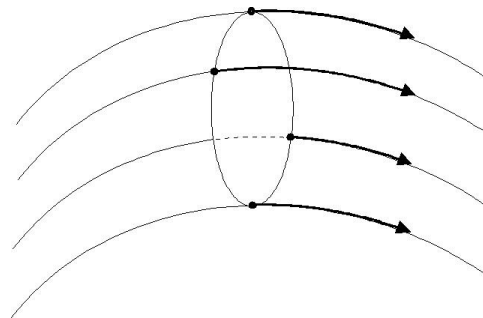
Proudění ideální kapaliny

Proudnice – trajektorie pohybující se částice tekutiny.



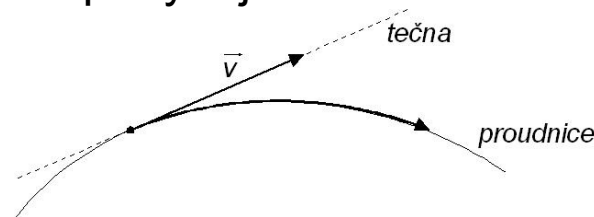
- Každým bodem oblasti proudící tekutiny prochází právě jedna proudnice.
- Proudnice se nemohou navzájem protínat.
- Rychlost pohybující se částice tekutiny má směr tečny k proudnici v libovolném v bodě.

- ***proudová trubice***
- ***proudové vlákno***



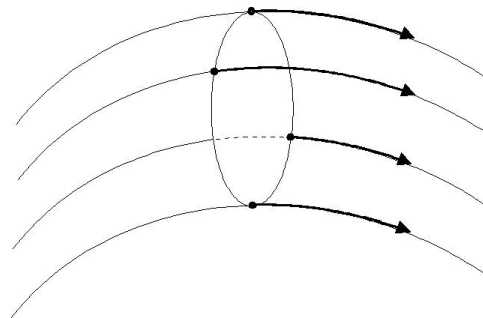
Proudění ideální kapaliny

Proudnice – trajektorie pohybující se částice tekutiny.

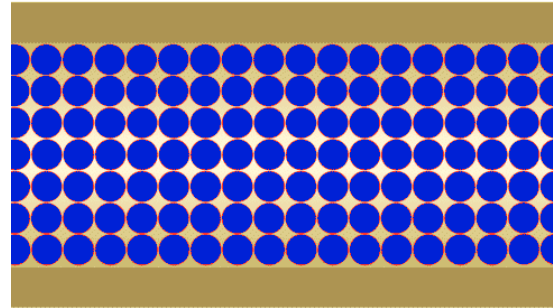


- Každým bodem oblasti proudící tekutiny prochází právě jedna proudnice.
- Proudnice se nemohou navzájem protínat.
- Rychlost pohybující se částice tekutiny má směr tečny k proudnici v libovolném v bodě.

- ***proudová trubice***
- ***proudové vlákno***



Při proudění ideální tekutiny je ve všech bodech průřezu proudové trubice, kolmého k její ose, rychlost stejná.



Proudění ideální kapaliny

Průřezem S vybrané proudové trubice při velikosti rychlosti proudící kapaliny v proteče za 1 sekundu objem kapaliny $S \cdot v$. Tato veličina se nazývá **objemový průtok** Q_v .

$$Q_v = S \cdot v$$

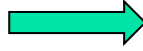
Je-li hustota kapaliny ρ v místě průřezu S stejná, je **hmotnostní průtok** Q_m , což je hmotnost kapaliny proteklé průřezem S proudové trubice za 1 sekundu, dán vztahem

$$Q_m = S \cdot v \cdot \rho$$

Jednotkou je $1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

Popis pomocí rychlosti a tlaku v každém místě proudění.

Proudění ideální kapaliny

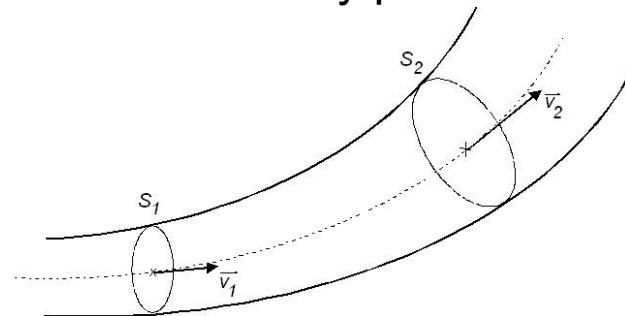
Kapalina nemůže stěnami trubice ani vytéci, ani přitéci  musí být hmotnostní průtok pro libovolný průřez proudové trubice stálý:

$$Q_m = S \cdot v \cdot \rho = \text{konst}$$

Tato rovnice se nazývá **rovnice spojitosti** neboli **kontinuity** a je vyjádřením **zákona zachování hmotnosti** pro ustálené proudění kapaliny.

V případě ideální kapaliny, která je dokonale nestlačitelná, je při stálé teplotě $\rho = \text{konst}$ pak pro **ideální kapalinu** můžeme rovnici kontinuity psát ve tvaru

$$S \cdot v = \text{konst} \quad \text{nebo} \quad S_1 v_1 = S_2 v_2$$



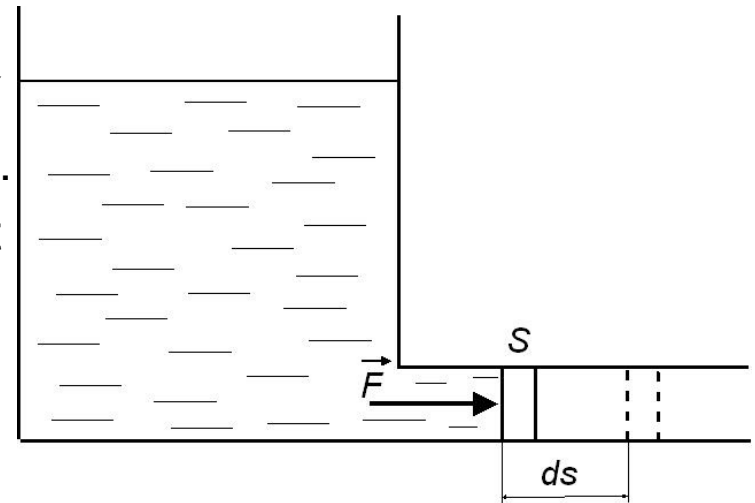
Proudění ideální kapaliny

Kapalina pod tlakem může konat práci. Má tedy **potenciální energii tlaková**.

Velká nádoba s kapalinou, ze které vychází tenká trubice s pístem o plošném obsahu S . Tlak kapaliny lze v místech pístu považovat **za stejný**.

Při posunutí ds vykoná síla $F = p \cdot S$ práci

$$dA = Fds = pSds = pdV$$



Tato práce je číselně rovna úbytku **potenciální energie tlakové** dW_{tl} .

Proudění ideální kapaliny

Kinetická energie proudící kapaliny objemu dV s hustotou ρ :

$$dW_k = \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} v^2 \rho dV$$

Potenciální energie tíhová proudící kapaliny objemu dV s hustotou ρ

$$dW_p = g h dm = h g \rho dV \quad (\text{pozor na volbu nulové hodnoty } dW_p)$$

Navíc je zde **potenciální energie tlaková**

$$dW_{tl} = p dV$$

Celková mechanická energie proudící kapaliny je pak:

$$dW = dW_k + dW_p + dW_{tl}$$

Proudění ideální kapaliny

Hustota energie je energie připadající na jednotkový objem kapaliny, tedy:

$$dw_k = \frac{1}{2} v^2 \rho \quad dw_p = h g \rho \quad dw_{tl} = p$$

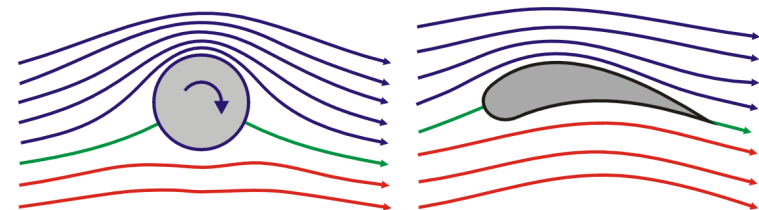
Protože v ideální kapalině se nemůže mechanická energie proudící kapaliny měnit v jiné formy energie, bude hustota celkové mechanické energie (tj. celková mechanická energie jednotkového objemu) proudící ideální kapaliny stálá:

$$dw = dw_p + dw_{tl} + dw_k = konst$$

tj.:

$$p + h g \rho + \frac{1}{2} \rho v^2 = konst$$

Označovaná jako **Bernoulliova rovnice**.



rotující válec

křídlo

Proudění ideální kapaliny

Event. $p_1 + h_1 g \rho + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + h_2 g \rho + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = konst$

Pro vodorovnou trubici ($h_1 = h_2$) pak

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = konst$$

nergie připadající na jednotkový objem kapaliny, tedy:

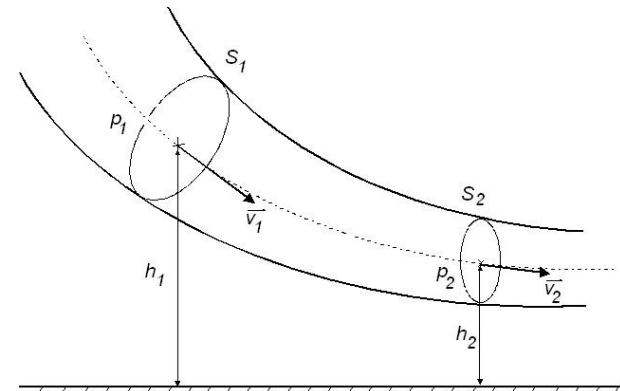
$$dw_k = \frac{1}{2} v^2 \rho \quad dw_p = h g \rho \quad dw_{tl} = p$$

Zúžení trubice, kterou proudí kapalina, vyvolá zmenšení tlaku kapaliny, byl nazván *hydrodynamický paradox*.

Pro reálné kapaliny lze Bernoulliovu rovnici použít jen přibližně.

Pro plyny, kde se změnou tlaku se mění i jejich hustota, jsou rovnice proudění plynu složitější.

Všeobecně však i pro proudící plyny ve vodorovné trubici platí, že v užších průřezech trubice vzrůstá jejich rychlost a klesá tlak.

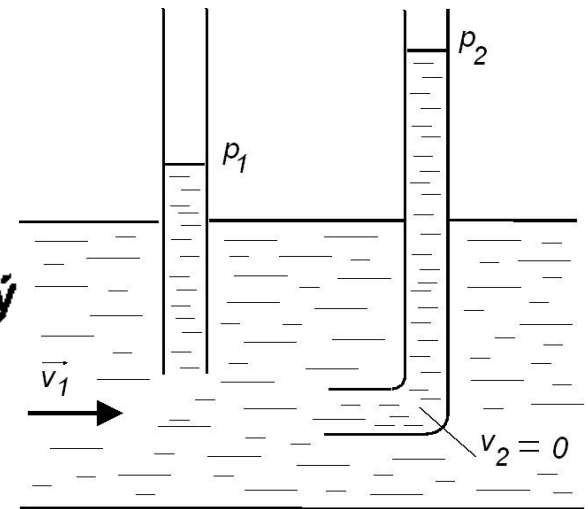


Proudění ideální kapaliny

Pomocí Bernoulliovy rovnice lze navrhnout měření rychlosti proudící ideální kapaliny. Ve vodorovné trubici, ve které proudí kapalina rychlostí v_1 jsou dvě manometrické trubice – jedna přímá, jedna zahnutá. První manometrická trubice registruje hodnotu tlaku p_1 v proudící kapalině. V druhé manometrické trubici, která má otvor obrácený proti proudu kapaliny, klesne rychlost proudění v_2 na nulu, a proto měřený tlak p_2 určuje celkovou mechanickou energii jednotkového objemu kapaliny. Je tedy $p_2 > p_1$.

Bernoulliova rovnice pak má tvar $p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2$

Pro rychlost proudění pak $v_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}}$



Pitotova trubice

Proudění ideální kapaliny

Výtok malým otvorem ve stěně nádoby

Otvor je ve stálé hloubce h pod volným povrchem kapaliny (hladinu kapaliny v nádobě udržujeme ve stálé výšce h_1), kde $h = h_2 - h_1$.

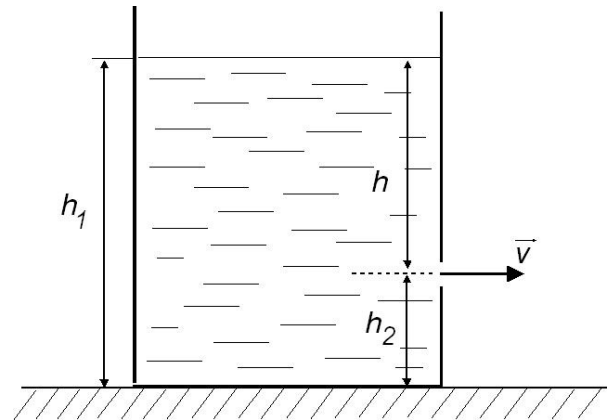
Atmosférický tlak je p_a . Porovnáme celkové mechanické energie jednotkových objemů kapaliny na volné hladině (ve výšce h_1) a v hloubce h pod hladinou (ve výšce h_2 nad povrchem Země):

$$p_a + h_1 g \rho = p_a + h_2 g \rho + \frac{1}{2} \rho v^2$$

Pro velikost výtokové rychlosti pak

$$v = \sqrt{2gh}$$

(stejně jako u volného pádu, trajektorií je parabola jako u vodorovného vrhu)

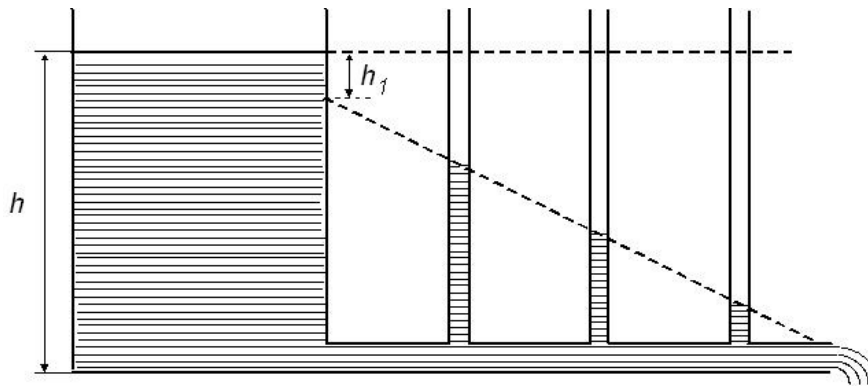


Vnitřní tření

Při proudění **reálné** (skutečné) kapaliny se objevují v kapalině síly brzdící její pohyb, které mají původ ve vzájemném silovém působení částic kapaliny.

Tyto síly nazýváme **síly vnitřního tření**.

Při uzavřeném ventilu bude výška ve všech trubicích stejná = spojené nádoby.

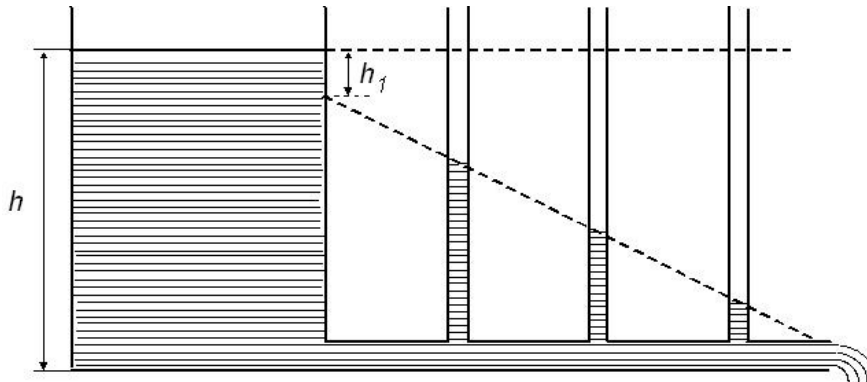


V ideální kapalině, pak při otevření výtokového otvoru by vytékala

rychlostí o velikosti $v = \sqrt{2gh}$ (platí Bernoulliova rovnice) a v manometrických trubicích by voda nevstoupila vůbec. (veškerá tlaková energie by se přeměnila

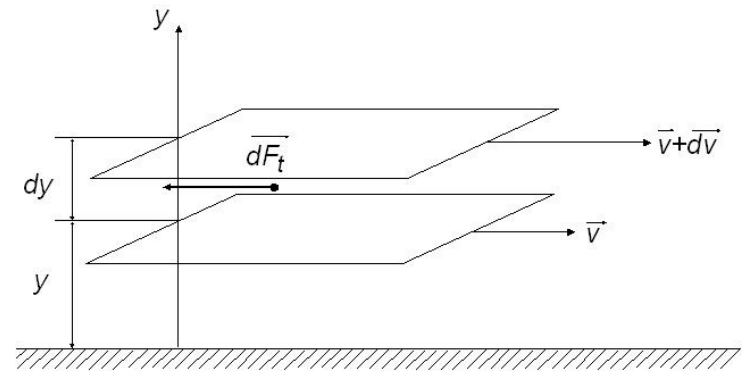
Vnitřní tření

Ve skutečnosti při otevření výtokového otvoru poklesne výška sloupců v manometrických trubicích a ustálí se, jak je znázorněno na Obr.



Protože trubice má stálý průřez, je podle rovnice kontinuity velikost střední rychlosti proudící vody po celé délce trubice stejná. Je ale menší než rychlost, kterou by vytékala voda přímo z otvoru ve stěně. Podél trubice dochází k rovnoměrnému poklesu tlaku. Tlak vody u výtokového otvoru z trubice roven nule. Spojnice středů volných hladin v manometrických trubicích protne stěnu nádoby v hloubce h_1 pod volnou hladinou v nádobě. Tato hloubka určuje část tlakové energie, která se změnila v kinetickou energii vytékající vody. Zbývající tlaková energie se mění postupně podél celé trubice ve vnitřní energii kapaliny (zvýší se teplota vytékající kapaliny). Část tlakové energie, která se změní na vnitřní energii proudící kapaliny, je rovna práci vykonané silami vnitřního tření v proudící kapalině.

Vnitřní tření



- Při proudění reálné kapaliny v jednotlivých bodech určitého průřezu nejsou rychlosti stejné.
- Kapalina přilne ke stěnám trubice a vytvoří se **mezní vrstva kapaliny**, která je vůči stěnám trubice v klidu.
- Směrem od stěny k ose trubice rychlost proudění roste a nabývá maximální velikosti v ose trubice.

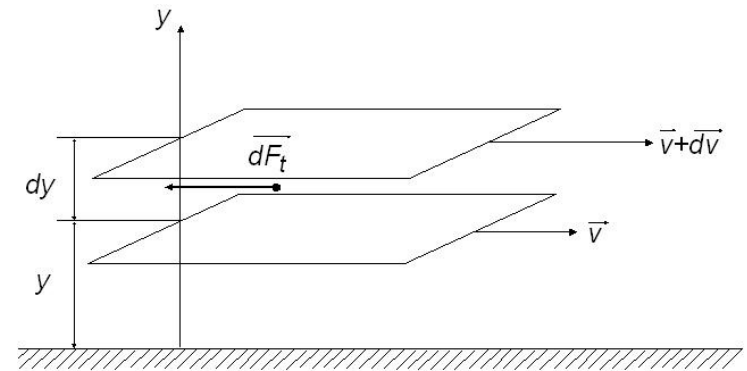
Proudící kapalinu si představujeme rozdělenou na vrstvy. Mezi sousedními vrstvami kapaliny, které mají různé rychlosti, vznikají **tečná napětí** $\sigma_t = \frac{dF_t}{dS}$.

Jev spočívající ve vzniku tečného napětí mezi vrstvami pohybujícími s různými rychlostmi nazýváme **vnitřní tření kapaliny**.

Rychlostní spád $\frac{\Delta v}{\Delta y}$ a tečné napětí σ_t jsou přímo úměrné.

Takovéto kapaliny jsou označovány jako **Newtonovské**.

$$\sigma_t = \eta \frac{dv}{dy} \quad \text{kde konstanta úměrnosti } \eta \text{ je veličina } \mathbf{dynamická viskozita}.$$



Vnitřní tření

- $\sigma_t = \eta \frac{dv}{dy}$ kde konstanta úměrnosti η je veličina **dynamická viskozita**.

Jednotkou je 1 Pa.s.

Kinematická viskozita $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ (1 m².s⁻¹)

- Viskozita kapalin závisí na teplotě a tlaku. S rostoucí teplotou viskozita kapalin klesá, s rostoucím tlakem naopak vzrůstá.
- Vliv tlaku na viskozitu je však zanedbatelný, s výjimkou zvlášť vysokých tlaků.

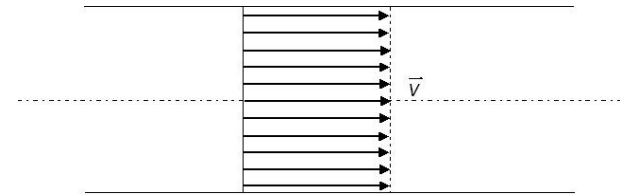
Dynamická viskozita většiny kapalin je řádově 10⁻³ Pa.s. Např. voda za normálního tlaku při 20°C má dynamickou viskozitu 1,002.10⁻³ Pa.s, při 0 °C 1,787.10⁻³ Pa.s a při 100 °C 0,283.10⁻³Pa.s. Větší dynamickou viskozitu mají kapaliny jako oleje nebo glycerin. Glycerin při 20 °C má dynamickou viskozitu 1.48 Pa.s. při 0 °C 12.1 Pa.s a při 100 °C 0.012 Pa.s.

Laminární a turbulentní proudění

Proudění ideální kapaliny (bez vnitřního tření) je *nevírové* (potenciálové).

Platí při něm zákon zachování mechanické energie. Částice kapaliny při tomto proudění konají jen postupný pohyb.

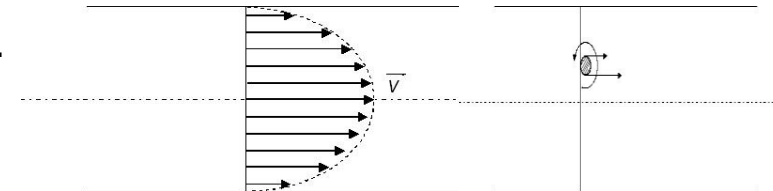
Otáčivý pohyb není možný. Rychlost proudění je ve všech bodech průřezu trubice stejná.



Proudění reálné kapaliny není potenciálové, je vždy *vírové*. Částice kapaliny kromě posuvného pohybu konají i otáčivý pohyb.

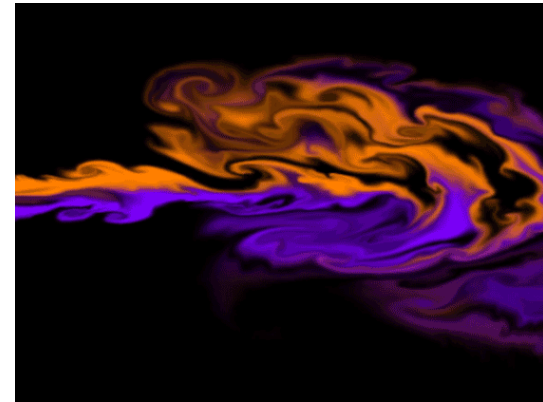
Pro malé rychlosti proudění je proudění reálné kapaliny *laminární*. Je charakterizováno tím,

že ve vybraném kruhovém průřezu trubice rozložení rychlostí je v osovém řezu parabolické. Jednotlivé vrstvy (proudové trubice) se nepromíchávají.



Objemový průtok Q_V je dán **Poiseuillovým zákonem**:

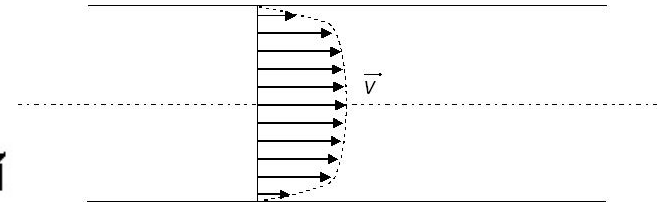
$$Q_V = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{\Delta l}$$



Laminární a turbulentní proudění

Zvyšujeme-li rychlost proudění, začne převládat rušivý vliv vírů. Proudová vlákna se nepravidelně proplétají, proudění přechází v **turbulentní proudění**. Při turbulentním proudění dochází k promíchávání kapaliny.

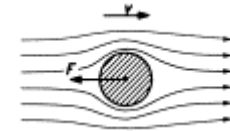
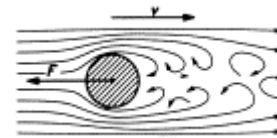
Rychlost je v téměř celé vnitřní části trubice přibližně stejná až na tenkou vrstvu při stěně, kdy prudce roste přibližně úměrně se vzdáleností od stěny. Střední rychlost v průřezu trubice je mnohem bližší maximální rychlosti než při laminárním proudění.




Pro posouzení charakteru proudění reálné kapaliny používáme bezrozměrnou veličinu, tzv. **Reynoldsovo číslo Re** .

$$Re = \frac{vd}{\nu}$$

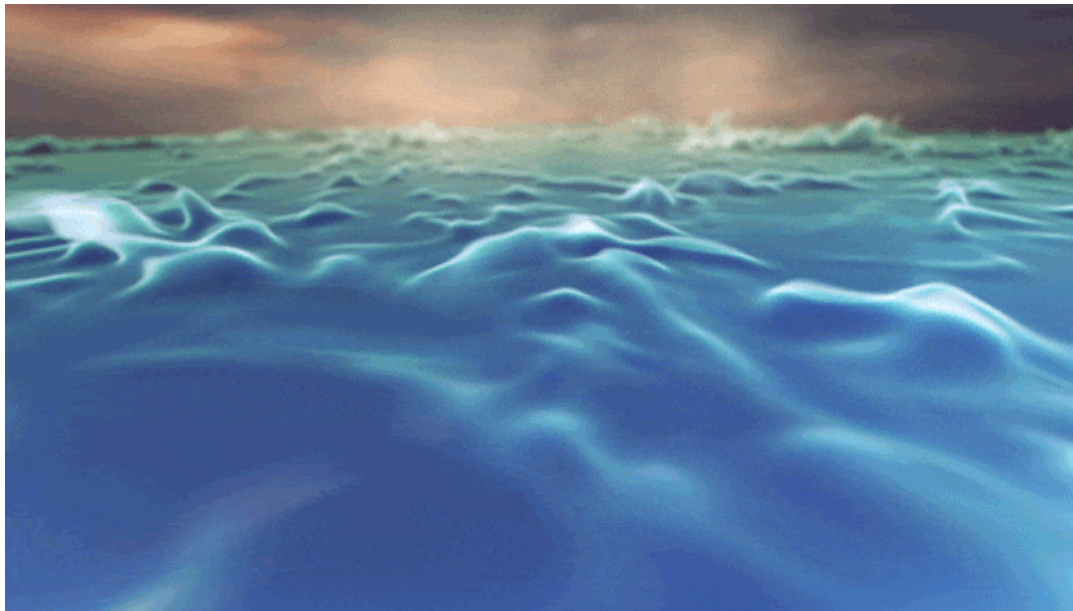
kde \bar{v} je velikost střední rychlosti částic kapaliny v trubici o průměru d a ν je kinematická viskozita kapaliny



Laminární a turbulentní proudění

Kritické Reynoldsovo číslo $Re_k \sim 2000$  laminární proudění přestává být stabilní a může se změnit na turbulentní.

Podobné závěry platí i pro proudění reálných plynů.



Odpor prostředí při proudění

Při vzájemném pohybu tělesa a tekutiny dochází k přemísťování částic tekutiny a uplatňují se třecí síly. Tento jev se nazývá **odpor prostředí**. Sílu, která vzniká při vzájemném pohybu tělesa a tekutiny, nazýváme **odporová hydrodynamická resp. aerodynamická síla**, působí proti pohybu.

- Pro malé rychlosti (proudění laminární) je odpor prostředí způsoben vnitřním třením.
- Velikost odporové síly je přímo úměrná velikosti rychlosti tělesa vzhledem k prostředí.
- Závislost na tvaru se uplatňuje méně.

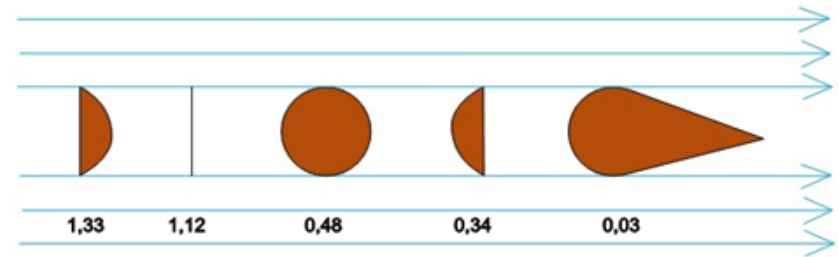
Pro velikost odporové síly a těleso tvaru koule o poloměru platí **Stokesův vztah**:

$$F_o = 6\pi\eta Rv,$$

kde η je dynamická viskozita a v relativní rychlost pohybu tělesa vzhledem k tekutině

Měření viskozity - Na kuličku při pohybu působí tři síly tíhová síla, hydrostatická vztlaková síla a hydrodynamická odporová síla - při ustálené rychlosti – rovnováha sil.

Odpor prostředí při proudění



Pro vyšší rychlosti (při turbulentním proudění), kdy za tělesem se vytváří zřetelné víry, odporová síla vzrůstá. Newton odvodil pro velikost odporové síly vztah nazývaný **Newtonův vzorec**:

$$F_o = C \frac{1}{2} \rho S v^2,$$

kde C je *součinitel odporu*, S *obsah plochy příčného řezu tělesa*, ρ *hustota tekutiny* a v *relativní rychlost* pohybu tělesa vzhledem k tekutině.

Součinitel odporu C závisí na tvaru tělesa.

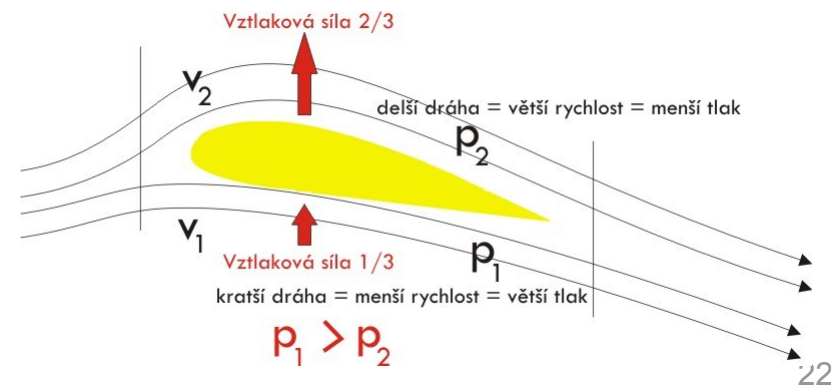
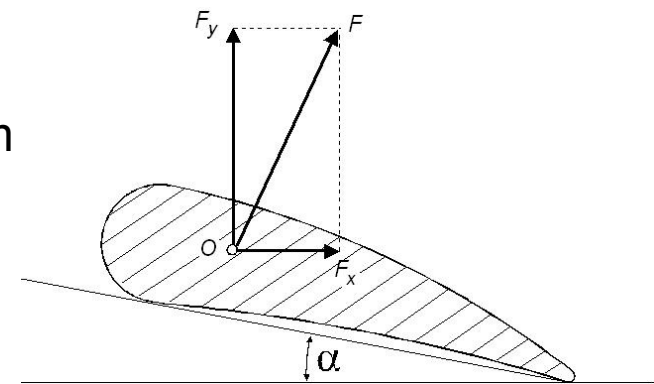
Těleso	Činitel C_x
aerodynamický tvar	0,037
vypuklá polokoule	0,33
koule	0,50
rovná tenká deska	1,2
dutá polokoule	1,3

Odpor prostředí při proudění

Při pohybu nesouměrného tělesa vzhledem k pohybu v prostředí (např. křídlo letadla) vzniká síla, která na těleso působí ve směru odchýleném od směru pohybu.

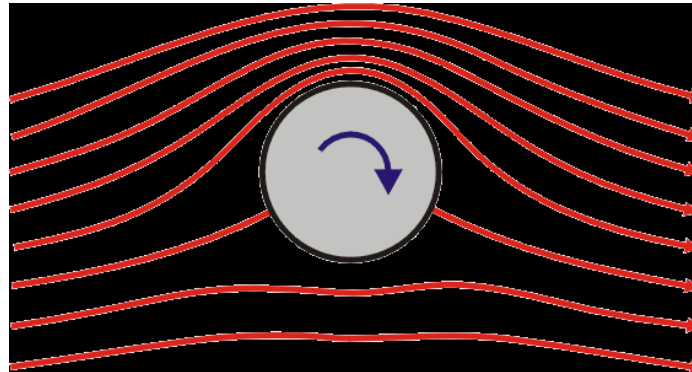
Její složka ve směru pohybu orientovaná proti pohybu je *odporová hydrodynamická* resp. *aerodynamická síla*.

Síla k ní kolmá – *vztlaková hydrodynamická* resp. *aerodynamická síla* směřuje nad těleso a nadzvedává jej.



Odpor prostředí při proudění

Magnusův jev – golfový, tenisový míček – let s rotací.



Je-li rychlost tělesa vzhledem k tekutině větší než rychlost šíření zvuku v dané tekutině, jsou zákonitosti proudění značně odlišné od zákonitostí proudění s rychlostmi menšími. Velikost odporové síly je přibližně úměrná třetí odmocnině velikosti rychlosti pohybu tělesa vzhledem k tekutině. Vytváří se tzv. rázová vlna. Ta je např. příčinou silných zvukových třesků u nízko letících nadzvukových letadel.

Zdroje:

- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0a/Flusso_laminare_blu.gif
- http://33.media.tumblr.com/dfca988463b4bd7a8f3d05e50c41e53d/tumblr_nqkaza0Uwu1r3c0qwo1_540.gif
- <https://eluc.kr-olomoucky.cz/verejne/lekce/1688>
- https://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz_fyziky_pro_DS/display.php/kontinuum/obrazky/image084.gif