Základy elektrických obvodů

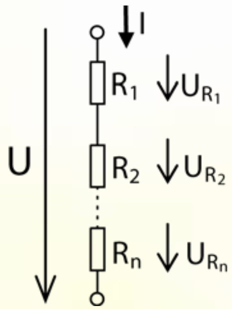
II

Základní zákony a teorémy

ZÁKLADNÍ ZÁKONY A TEORÉMY (KIRCHHOFFOVY ZÁKONY, THÉVENINŮV A NORTONŮV TEORÉM), PŘÍKLADY POUŽITÍ (EKVIVALENCE OBVODOVÝCH PRVKŮ, DĚLIČ NAPĚTÍ A DĚLIČ PROUDU, REÁLNÉ ZDROJE).

… neboli sériové a paralelní řazení prvků ☺

- **Rezistor**

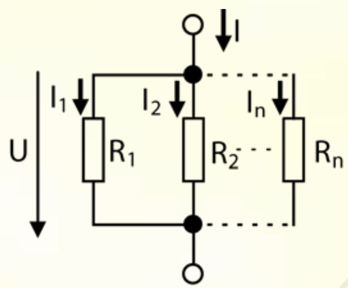


sériové řazení – společný proud

napětí na jednotlivých rezistorech se sčítá

$$U = R_1 I + R_2 I + \cdots + R_n I$$
$$= I(R_1 + R_2 + \cdots + R_n) = IR$$

$$\boxed{R = \sum_{i=1}^{n} R_i}$$



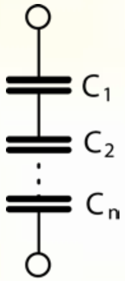
Paralelní řazení – společné napětí

proudy jednotlivými rezistory se sčítají

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \cdots + \frac{U}{R_n})$$
$$= U(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}) = UG$$

$$\boxed{G = \sum_{i=1}^{n} G_i}$$

$$\boxed{\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}$$



sériové řazení – společný proud

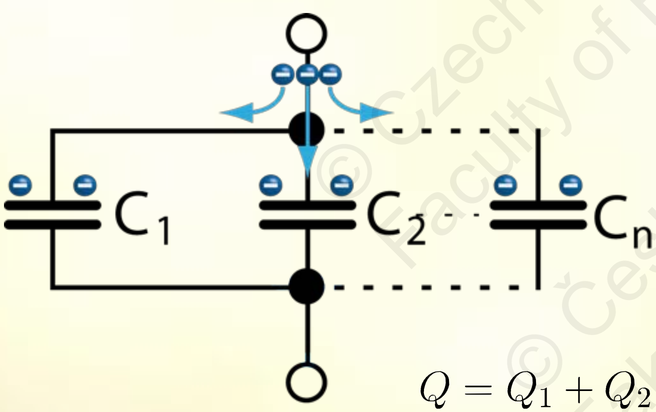
Elektrický proud tekoucí sériovou kombinací je stejný
$\Rightarrow$ náboje uložené ve všech kapacitorech jsou stejné

$$\boxed{\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}}$$

$$U = \frac{Q}{C} \qquad U = U_1 + U_2 + \cdots + U_n =$$
$$= \left(\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \cdots + \frac{Q_n}{C_n}\right) = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right) = Q\frac{1}{C}$$

mnemotechnická pomůcka: pro deskový kapacitor platí přibližně $C \approx \varepsilon\frac{S}{d}$ kde S je plocha elektrod a d vzdálenost elektrod; při sériovém spojení efektivní vzdálenost roste, výsledná kapacita je tedy menší

výhoda – reálný kondenzátor má omezené maximální povolené pracovní napětí; sériovým spojením se rozloží celkové napětí mezi jednotlivé kondenzátory, takže pokud např. zapojím tři stejné kondenzátory se stejným jmenovitým napětím 100V do série, mohu tuto sériovou kombinaci připojit na napětí 300V



paralelní řazení – společné napětí

Náboj se rozlévá mezi jednotlivé kapacitory
$\Rightarrow$ náboje uložené v jednotlivých kapacitorech se sčítají

$$\boxed{C = \sum_{i=1}^{n} C_i}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n = CU$$

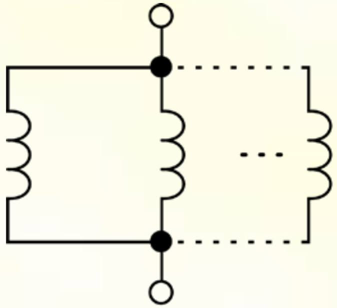
$$Q = UC_1 + UC_2 + \cdots + UC_n = U(C_1 + C_2 + \cdots + C_n) = UC$$

sériové řazení – společný proud

$\Rightarrow$ magnetický tok jednotlivých induktorů se sčítá

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_n = \\ &= L_1 I + L_2 I + \cdots + L_n I = I(L_1 + L_2 + \cdots + L_n) = IL\end{aligned}$$

$$\boxed{L = \sum_{i=1}^{n} L_i}$$



paralelní řazení – společné napětí

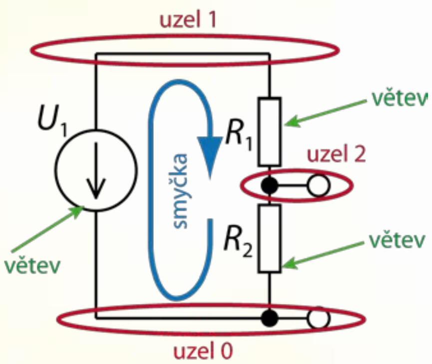
Protože platí $u = \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ a napětí u je stejné na všech induktorech, změna času Δt je také pro všechny induktory stejná, **mají všechny induktory stejný magnetický tok Φ**

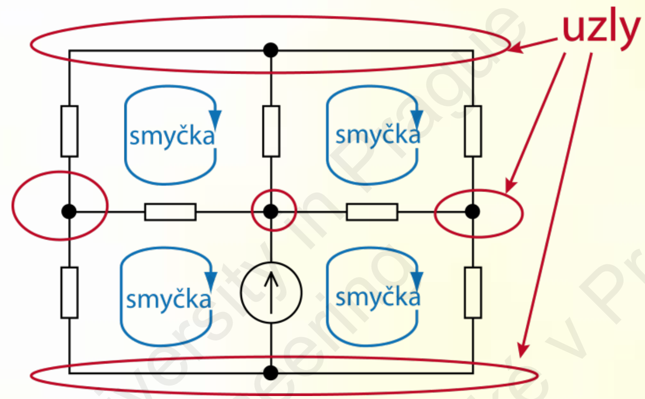
Přitékající elektrický proud se rozdělí mezi jednotlivé induktory, takže

$$I = \frac{\Phi}{L} = I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \frac{\Phi}{L_1} + \frac{\Phi}{L_2} + \cdots + \frac{\Phi}{L_n} = \Phi\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{L} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i}}$$

Základní pojmy

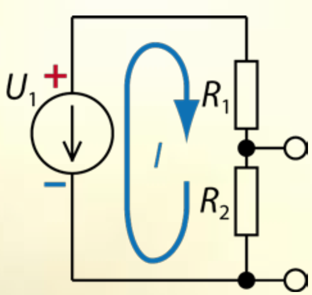




- **Uzel:** vodivé spojení dvou, nebo více obvodových prvků; může, ale nemusí být vyznačen tečkou (v případě právě dvou obvodových prvků bude nakreslen pouze propojovací vodič)
- **Smyčka:** uzavřená cesta ve schématu elektrického obvodu, nesmí protínat sama sebe
- **Větev:** prvek elektrického obvodu, který je zapojen mezi dvěma uzly

2. Kirchhoffův zákon (napěťový)

Jeho základní definici známe již z minulé přednášky; nyní si jeho význam zopakujeme pro konkrétní obvod: **součet napětí na všech obvodových prvcích v libovolné smyčce obvodu je roven 0**

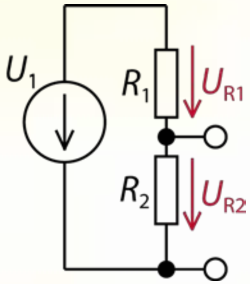


Konvence:

- Napětí na všech pasivních prvcích obvodu považujeme vždy za kladné
- Znaménko napětí u zdroje napětí je dáno jeho orientací – vstupuje-li smyčka do záporné svorky zdroje, bude i znaménko záporné, vstupuje-li do kladné svorky, bude kladné
- U zdroje proudu nemůžeme přímo vyčíslit velikost napětí na jeho svorkách

$$U_{R_1} + U_{R_2} - U_1 = 0 \quad \rightarrow \quad R_1 I + R_2 I - U_1 = 0$$

Dělič napětí



Z 2. Kirchhoffova zákona jsme vyjádřili proud, tekoucí smyčkou (*z* ***napěťového*** *Kirchhoffova zákona tedy* ***počítáme proud***), z Ohmova zákona snadno vyjádříme napětí na obou rezistorech:

$$I = \frac{U_1}{R_1 + R_2} \qquad U_2 = R_2 I = R_2 \frac{U_1}{R_1 + R_2}$$

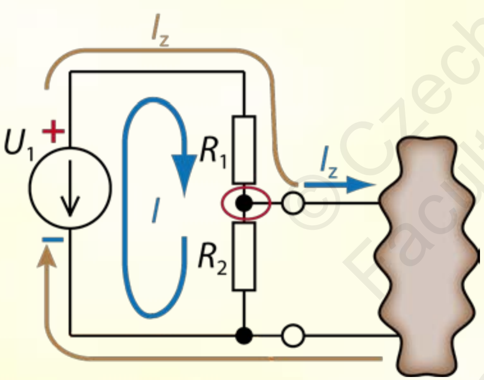
$$\boxed{U_2 = U_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

Zobecnění pro N rezistorů:

$$U_j = U_1 \frac{R_j}{\sum\limits_{i=1}^{N} R_i}$$

1. Kirchhoffův zákon (proudový)

Jeho základní definici opět známe již z minulé přednášky; **součet proudů v libovolném uzlu obvodu je roven 0**



Ve vyznačeném uzlu podle 1. Kirchhoffova zákona platí:

$$-I_{R_1} + I_z + I_{R_2} = 0 \quad \rightarrow \quad I_{R_1} = I_{R_2} + I_z = I + I_z$$

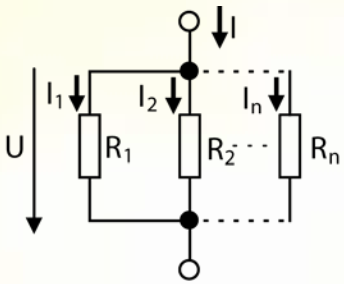
Nyní opět použijeme 2. Kirchhoffův zákon:

$$U_{R_1} + U_{R_2} - U_1 = 0 \quad \rightarrow \quad R_1(I + I_z) + R_2 I - U_1 = 0$$

A odtud pro **zatížený dělič napětí**:

$$U_2 = R_2 I = R_2 \frac{U_1 - R_1 I_z}{R_1 + R_2}$$

Dělič proudu



Často se pro zjednodušení výpočtů používá rovněž vzorec pro **dělič proudu**:

Uvažujme nejprve dva rezistory zapojené paralelně.

- Společnou obvodovou veličinou je napětí

$$U = RI = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I$$

- Z Ohmova zákona

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{R_2}$$

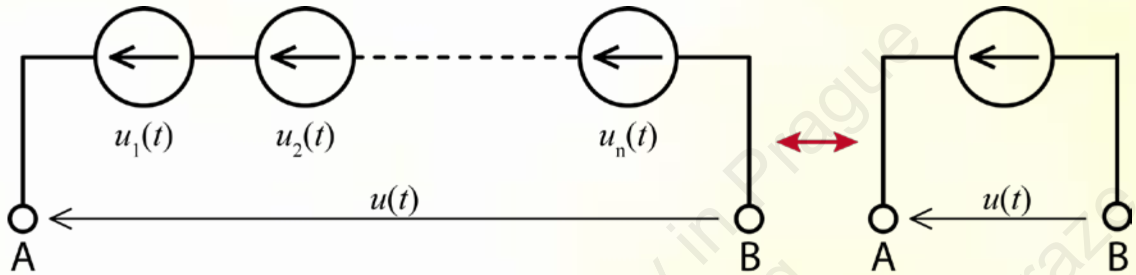
$$\boxed{I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

- Pro 3 rezistory je již výpočet komplikovanější:

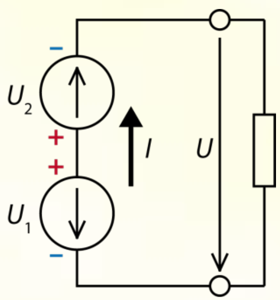
$$R = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$I_j = I \frac{G_j}{\sum_{i=1}^{N} G_i}$$

Ekvivalence zdrojů napětí



Sériové spojení zdrojů napětí $u(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t)$



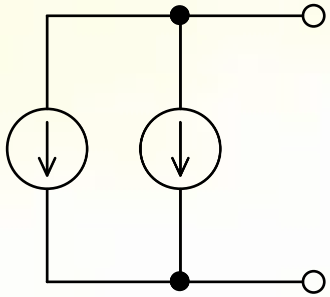
$U = U_1 - U_2$

V případě reálných zdrojů může toto spojení přinášet problém:

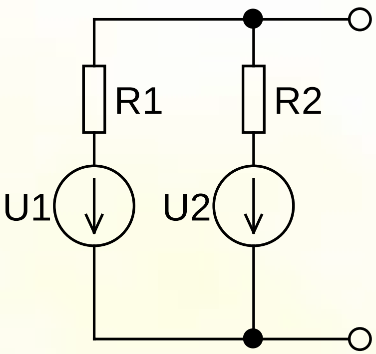
Jaké jsou výkonové poměry v tomto obvodu?

- Podle vyznačené orientace toku proudu je $U_1 > U_2$
- Proud I vytéká z kladné svorky zdroje $U_1 \Rightarrow$ tento zdroj dodává obvodu výkon $P_1 = U_1 I$
- Proud I **vtéká do kladné svorky zd**roje $U_2 \Rightarrow$ tento zdroj odebírá z obvodu výkon $P_2 = -U_2 I$, **je záporný** a **chová se proto jako spotřebič**
- Sekundární chemický článek (akumulátor) by byl takto dobíjen, alternátor mechanicky zatěžován, primární chemický článek by mohl být zničen (u některých typů, např. Li-$SOCl_2$ dokonce velmi destruktivně)

Ilustrační foto, zdroj: Sandia National Labs



Paralelní spojení ideálních zdrojů napětí není možné, s výjimkou naprosto identické velikosti napětí; zdroj s vyšším napětím by do druhého zdroje dodával nekonečný výkon

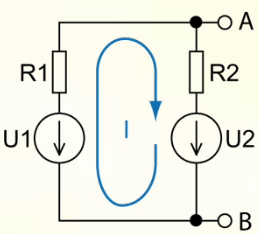


Paralelní spojení neideálních (skutečných) zdrojů napětí samozřejmě možné je, (a také se často využívá), oba zdroje **musí mít ale stejné napětí** *(jinak se zdroj s menším napětím chová jako spotřebič)*

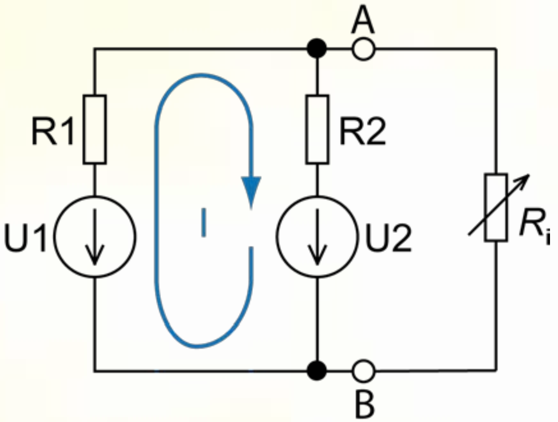
K popisu obvodu můžeme použít druhý (napěťový) Kirchhoffův zákon:

$$-U_1 + R_1 I + R_2 I + U_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U_1 - U_2}{R_1 + R_2}$$

$$U_{AB} = U_2 + R_2 I \quad \text{nebo} \quad U_{AB} = U_1 - R_1 I$$



… což je maximální napětí, jaké může být na svorkách tohoto obvodu

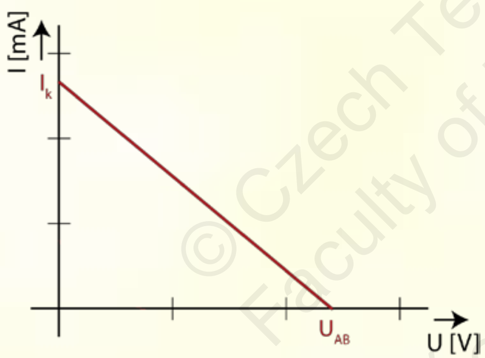


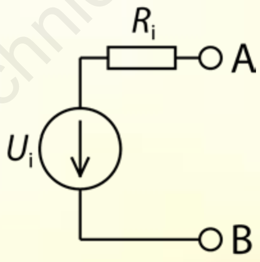
Maximální proud, který můžeme z obvodu odebrat: pokud budeme postupně snižovat odpor, zapojený mezi svorky A, B, bude se odebíraný proud zvětšovat – dokud nebude tento odpor roven 0 = zkrat – tento proud nazveme **proudem nakrátko**

$$I_k = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}$$

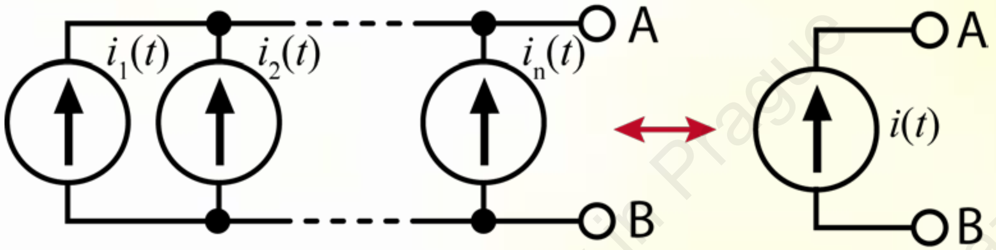
Napětí U_{AB} nazveme **napětí naprázdno** a označíme U_p (U_i)
Voltampérová charakteristika na obrázku je VA charakteristika zdroje napětí s **vnitřním odporem**

$$R_i = \frac{U_p}{I_k}$$

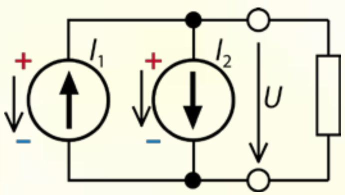




Ekvivalence zdrojů proudu



Paralelní spojení zdrojů proudu $$i(t) = \sum_{k=1}^{n} i_k(t)$$

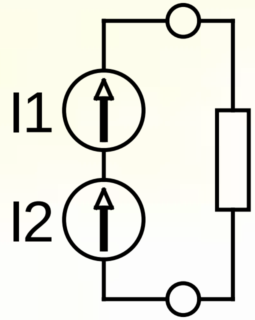


$$I = I_1 - I_2$$

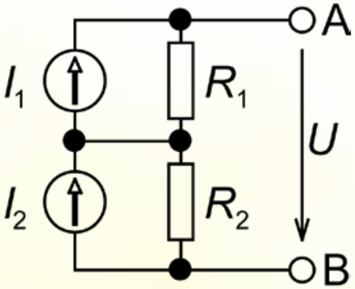
- Po omezenou dobu se jako proudový zdroj chová induktor
- Pokud má proudový zdroj pracovat trvale, musí být realizován elektronicky

Jaké jsou výkonové poměry v tomto obvodu?

- Podle vyznačené orientace napětí na svorkách zdrojů musí být $I_1 > I_2$, protože první zdroj vnutil obvodu svojí orientaci napětí
- Na svorkách zdroje I_1 je zdrojová orientace napětí $\Rightarrow$ tento zdroj dodává obvodu výkon $P_1 = I_1 U$
- **Na svorce** zdroje I_2, **ze které vytéká proud je záporné napětí** $\Rightarrow$ tento zdroj odebírá z obvodu výkon $P_2 = -I_2 U$, tento výkon **je záporný** a zdroj proudu **se proto chová jako spotřebič**



Sériové spojení ideálních zdrojů proudu není možné, s výjimkou naprosto identické velikosti proudu



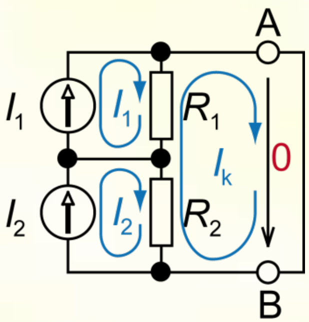
Sériové spojení neideálních (skutečných) zdrojů proudu samozřejmě možné je

Napětí naprázdno:

Proud I_1 může protékat pouze rezistorem R_1 (R_2 není v uzavřené smyčce a zdroj proudu I_2 si udržuje svůj vlastní proud, proto je na rezistoru R_1 napětí $U_1 = R_1 I_1$

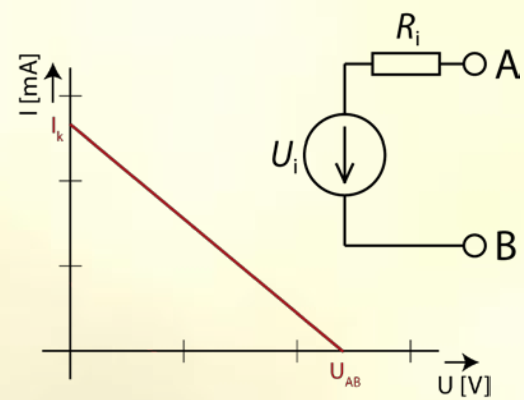
Obdobně proud I_2 může protékat pouze rezistorem R_2 (R_1 není v uzavřené smyčce kromě zdroje proudu I_1, ten si ale udržuje svůj vlastní proud; proto je na rezistoru R_2 napětí $U_2 = R_2 I_2$

Celkově tedy $U_{AB} = R_1 I_1 + R_2 I_2$



Proud nakrátko:

Vyjdeme z Kirchhoffových zákonů
podle prvního (proudového) platí v horním uzlu $-I_1 + I_z - I_{R1} = 0$
Ve spodním uzlu platí obdobně $I_2 - I_z + I_{R2} = 0$
A podle druhého (napěťového) platí $R_1 I_{R1} + R_2 I_{R2} = 0$
Sloučením rovnic dostaneme:



$$R_1(I_k - I_1) + R_2(I_k - I_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad I_k = \frac{R_1 I_1 + R_2 I_2}{R_1 + R_2} \qquad R_i = \frac{U_p}{I_k} = R_1 + R_2$$

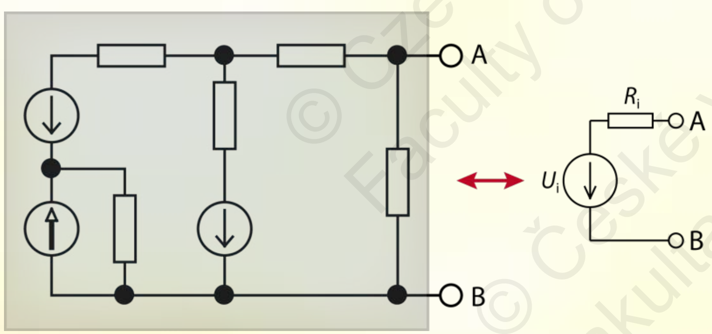
Théveninův a Nortonův teorém

V předchozích příkladech jsme viděli, že v obvodu, ve kterém byly zapojeny dva zdroje (napětí / proudu) a dva rezistory, bylo možné vypočítat maximální napětí, které se může mezi svorkami objevit – napětí naprázdno, a maximální proud, který je teoreticky možné z takového obvodu odebrat, proud nakrátko.

Voltampérová charakteristika studovaných obvodů byla ale shodná s VA charakteristikou jediného zdroje napětí s jediným v sérii zapojeným rezistorem.

Léon Charles Thévenin publikoval v roce 1883 tento princip a podle něj se tento postup zjednodušení analýzy elektrických obvodů jmenuje **Théveninův teorém**

Podle něj se můžeme na obvod, ve kterém je zapojen libovolný počet zdrojů napětí i proudu a rezistorů *(bude rozšířen i na kapacitory a induktory)*, dívat jako na „černou skřínku“ se dvěma svorkami, u které můžeme změřit právě jen napětí na prázdno a vnitřní odpor a která se tak chová jako jediný zdroj napětí s jediným v sérii zapojeným rezistorem



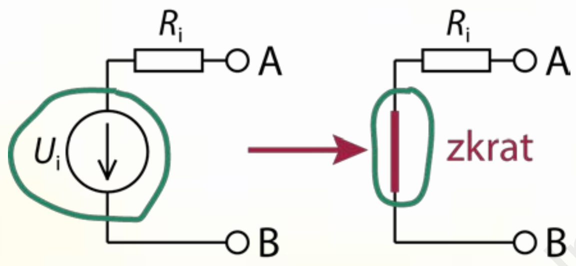
Omezení:
- Pouze lineární obvody
- Celkový výkon dodaný zdroji původního obvodu a Théveninův náhradní zdroj U_i obecně nejsou stejné (resp., výkon spotřebovaný R_i není stejný jako výkon, spotřebovaný rezistory původního obvodu)
- **Náhrada je platná pouze z pohledu svorek A, B!!!**

Pravidla o vyjmutí zdrojů

Jaký je vnitřní odpor ideálního zdroje napětí?

☞ **Ideálním zdrojem napětí** může protékat libovolně velký proud při konstantním napětí – **jeho vnitřní odpor musí být proto nulový**

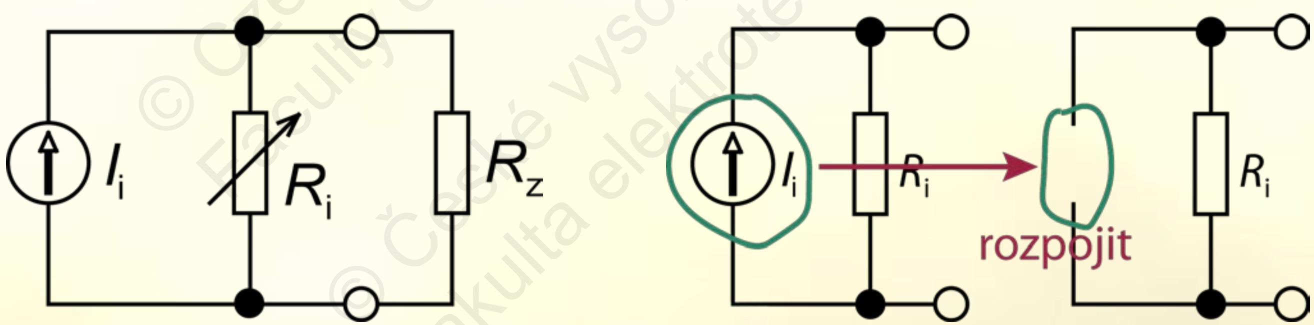
- **Ideální zdroj napětí při vyjmutí z obvodu nahradíme zkratem**



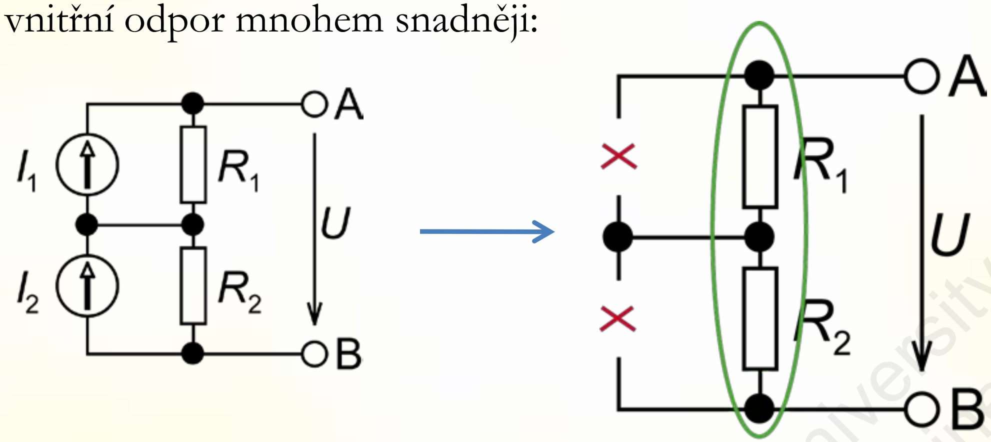
Jaký je vnitřní odpor ideálního zdroje proudu?

☞ Ideální zdroj proudu musí dodat veškerý proud do zátěže; sledujme obrázek, na kterém je zobrazen neideální zdroj proudu – část proudu teče do zátěže, část do vnitřního odporu R_i, který reprezentuje ztráty ve zdroji; čím větší bude odpor R_i, tím více proudu poteče do zátěže; **pokud bude R_i nekonečný, pak je zdroj proudu ideální**

- **Ideální zdroj proudu při vyjmutí z obvodu nahradíme rozpojenými svorkami**

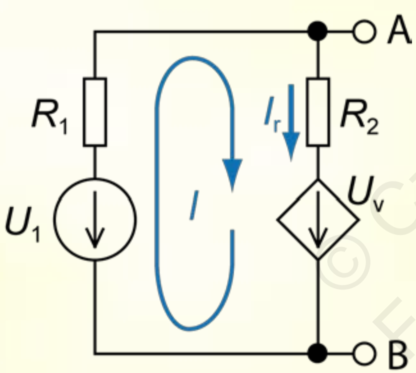


Zpět k příkladu sériového řazení neideálních zdrojů proudu; aplikací pravidla o vyjmutí zdrojů vypočítáme vnitřní odpor mnohem snadněji:



$$R_i = R_1 + R_2$$

ALE – obecně není možné vyjmout řízené zdroje, protože řízená veličina může ovlivňovat řídící veličinu, a tím zpětně sama sebe (zpětná vazba)



Vyjmutím zdrojů bychom dostali vnitřní odpor $R_i = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

Ale – s použitím proudového Kirchhoffova zákona

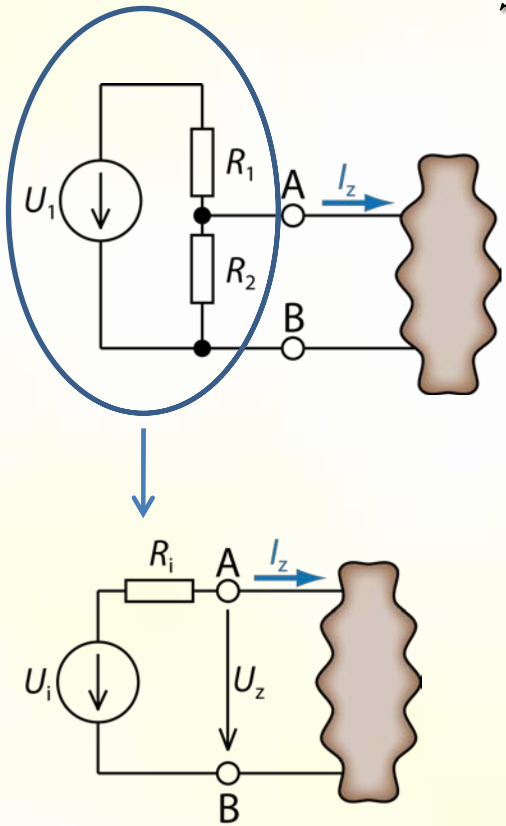
$$-U_1 + R_1 I + R_2 I + R I_r = 0, \quad I_r = I$$

$$I = \frac{U_1}{R_1 + R_2 + R}, \quad U_p = U_v + R_2 I = (R + R_2) I = \frac{U_1 \cdot (R + R_2)}{R_1 + R_2 + R}$$

$$I_k = \frac{U_1}{R_1} \quad \Rightarrow \quad R_i = \frac{U_p}{I_k} = \frac{R_1 \cdot (R + R_2)}{R_1 + R_2 + R}$$

V případě řízených zdrojů musíme tedy použít tento postup

Théveninův náhradní obvod – příklad použití



U tohoto obvodu jsme si již demonstrovali použití Kirchhoffových zákonů

Další možností je k analýze použít Théveninův teorém:

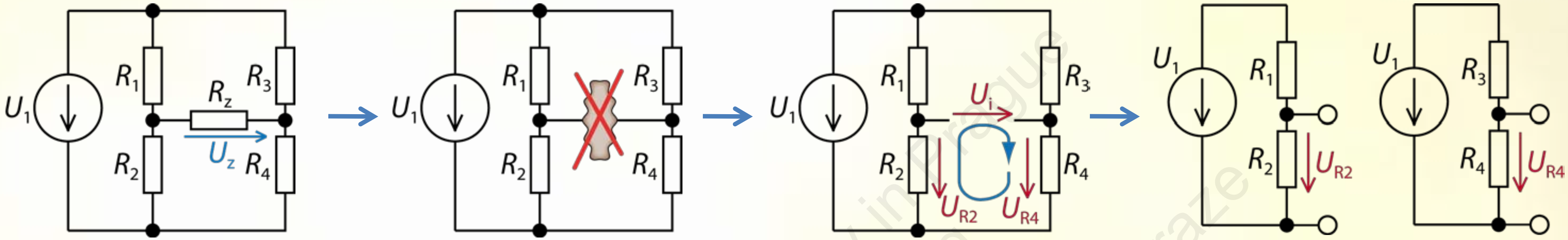
$$U_i = U_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Pokud zátěž odebírá z obvodu proud I_z, pak tento proud protéká náhradním Théveninovým rezistorem R_i a vyvolá na něm úbytek napětí:

$$U_{R_i} = R_i I_z$$

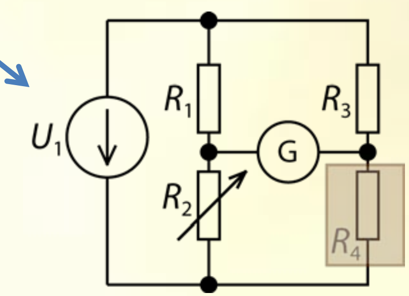
$$U_z = U_i - U_{R_i} = U_i - R_i I_z$$

Théveninův náhradní obvod – příklad použití 2



Úkolem je vypočítat napětí na diagonále Wheatstoneova můstku (*používá se pro kompenzační měření kapacity, indukčnosti, ale také např. v silničních vahách pro kontrolu přetížení nákladních vozů*)

První možností, jak vyřešit tento problém, je použití Théveninova náhradního obvodu

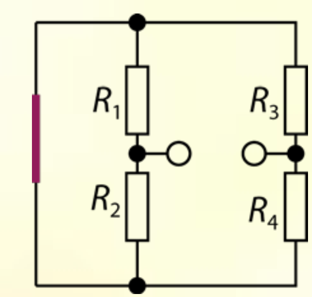


- Nejprve vyjmeme rezistor R_z – výpočet napětí Théveninova náhradního zdroje **z pohledu svorek rezistoru R_z** se zjednoduší na řešení dvou děličů napětí

$$U_{R_2} = U\frac{R_2}{R_1+R_2} \qquad U_{R_4} = U\frac{R_4}{R_3+R_4}$$

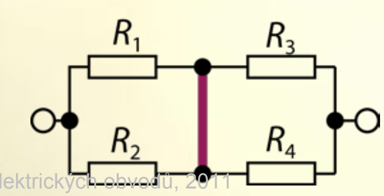
- A samozřejmě použití 2. Kirchhoffova zákona:

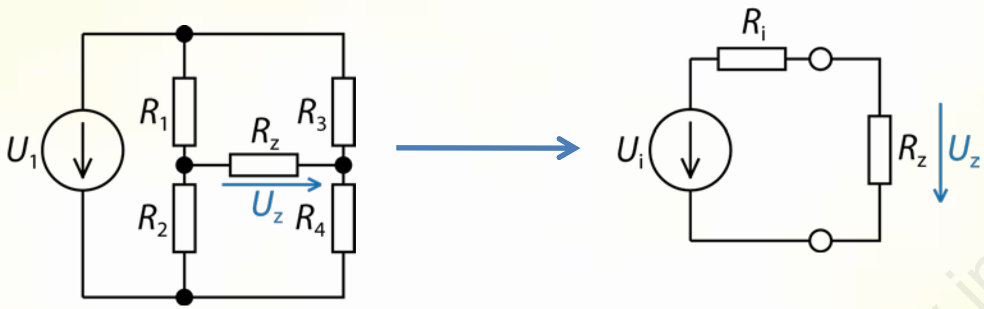
$$U_i + U_{R_4} - U_{R_2} = 0 \quad \rightarrow \quad U_i = U\left(\frac{R_2}{R_1+R_2} - \frac{R_4}{R_3+R_4}\right)$$



- Nyní musíme vypočítat vnitřní odpor náhradního Théveninova obvodu

$$R_i = R_1 \parallel R_2 + R_3 \parallel R_4 = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3+R_4}$$





Výpočet napětí na diagonále Wheatstoneova můstku se tak zjednodušil na výpočet děliče napětí.

Parametry Thévevinova náhradního obvodu jsou tedy:

$$U_i = U\left(\frac{R_2}{R_1+R_2} - \frac{R_4}{R_3+R_4}\right), \quad R_i = R_1 \parallel R_2 + R_3 \parallel R_4$$

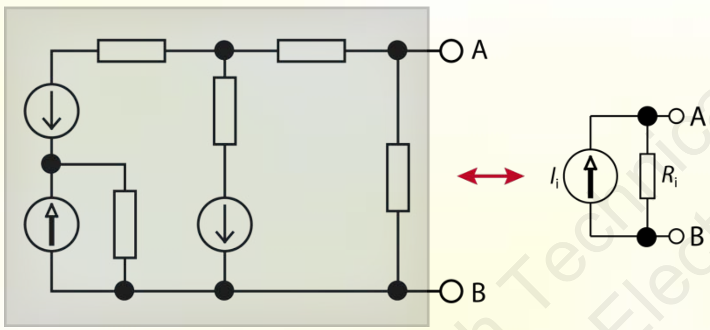
A konečně,

$$U_z = U_i \frac{R_z}{R_i + R_z}$$

Nortonův teorém

Edward Lawry Norton spolu s Hans Ferdinandem Mayerem publikovali v roce 1926 nezávisle tento princip, byl ale pojmenován pouze po Nortonovi **Nortonův teorém**

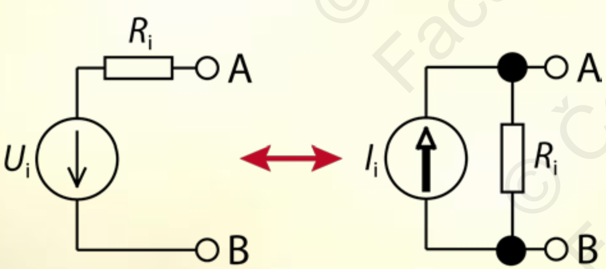
Podle něj se můžeme na obvod, ve kterém je zapojen libovolný počet zdrojů napětí i proudu a rezistorů *(bude rozšířen i na kapacitory a induktory)*, dívat jako na „černou skřínku“ se dvěma svorkami, u které můžeme změřit právě jen napětí na prázdno a vnitřní odpor a která se tak chová jako **jediný zdroj proudu s jediným paralelně zapojeným rezistorem**



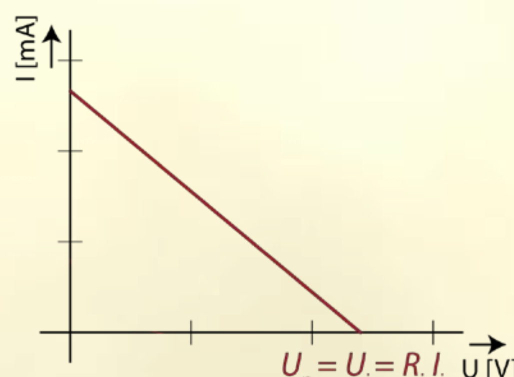
Omezení:

- Pouze lineární obvody
- Celkový výkon spotřebovaný rezistory původního obvodu původního obvodu a Nortonovým náhradním rezistorem R_i obecně nejsou stejné
- **Náhrada je platná pouze z pohledu svorek A, B!!!**

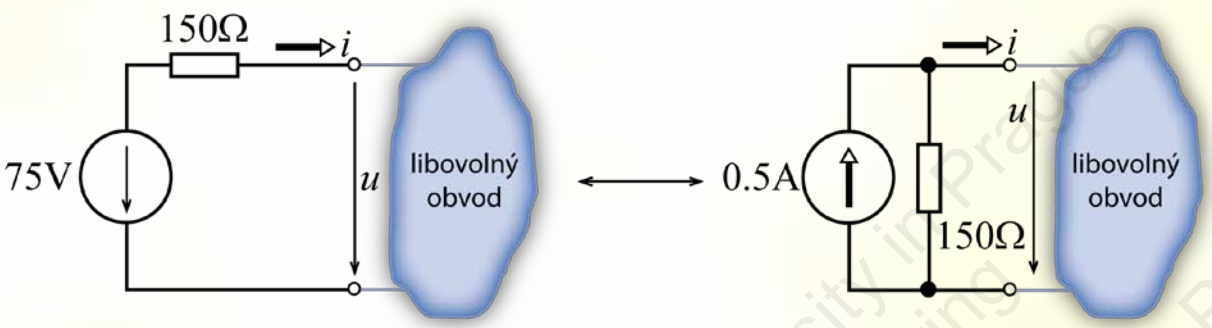
Ekvivalence obou teorémů



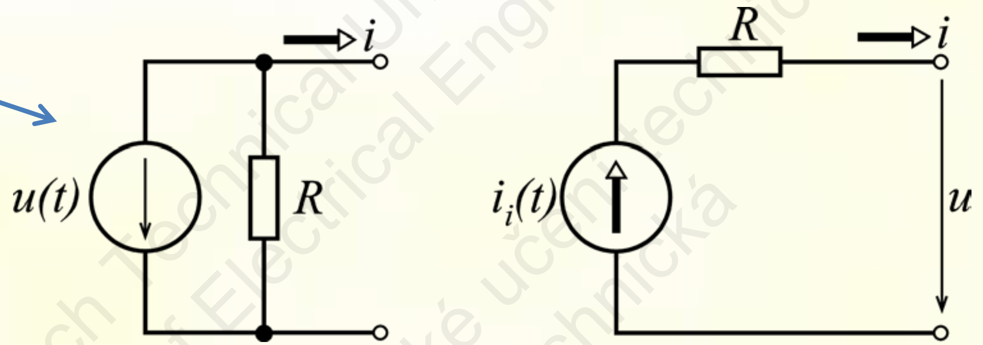
$$I_k = I_i = \frac{U_i}{R_i}$$

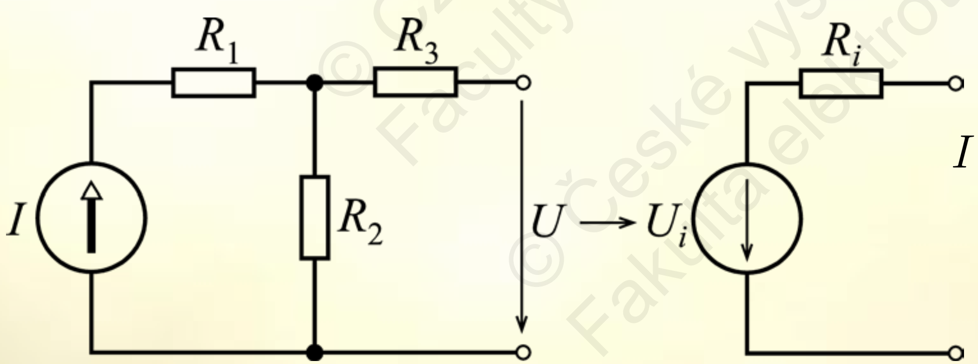


Příklad:



Tyto zdroje není možné zaměnit – jsou stále ideální!



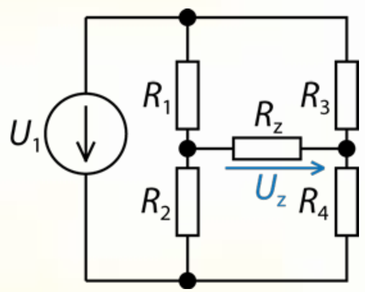


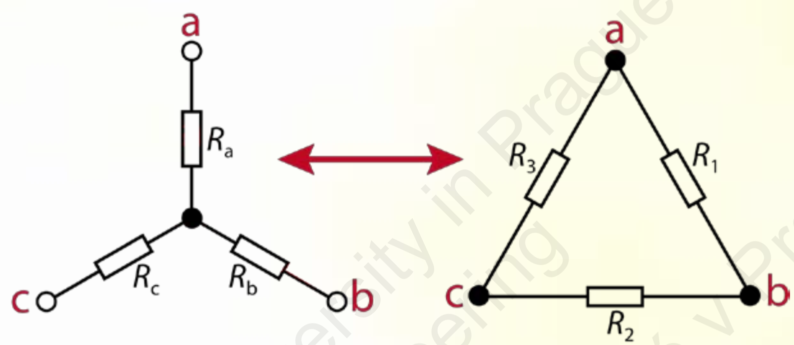
$$I = 1\,\mathrm{A},\ R_1 = 100\,\Omega,\ R_2 = 200\,\Omega,\ R_3 = 300\,\Omega$$

$$U_i = I R_2 = 200\,\mathrm{V}$$

$$R_i = R_2 + R_3 = 500\,\Omega$$

Transfigurace hvězda - trojúhelník

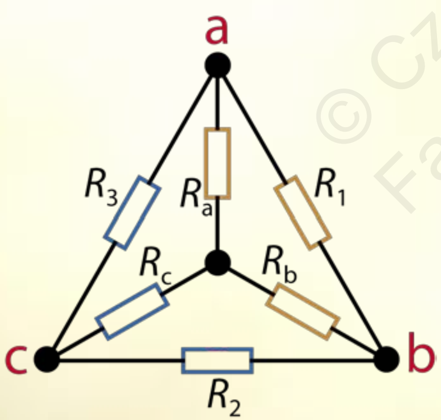




Wheatstoneův můstek jsme již jednou řešili, s využitím Théveninova náhradního obvodu. Další možností, jak zjednodušit tento obvod, je použít ekvivalentního zapojení rezistorů do hvězdy.

- Pokud máme zapojení do trojúhelníka, pak ekvivalentní zapojení do hvězdy bude mít parametry:

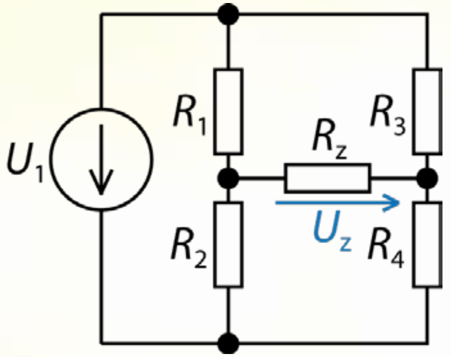
$$R_a = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad R_b = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

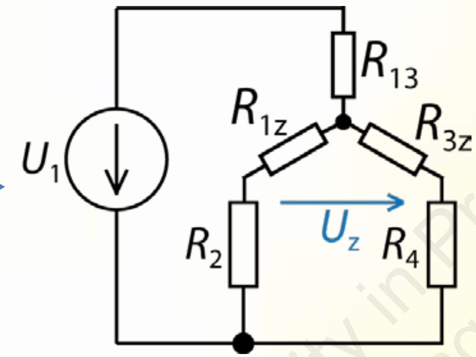


Pomůcka:

Uvedené vztahy není nutné se učit nazpaměť – nemá to ani smysl, protože v analyzovaných obvodech mají rezistory zcela jistě jiné indexy.

Všimněte si modře zvýrazněných rezistorů, zapojených do uzlu c – počítáme odpor rezistoru R_c; v čitateli zlomku je vždy součin odporů rezistorů, zapojených do daného uzlu (v tomto případě c) v původní konfiguraci trojúhelník, ve jmenovateli součet odporů všech 3 rezistorů

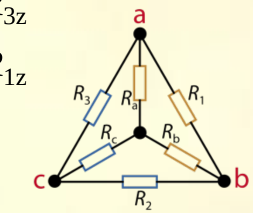




Rezistory R_1 a $R_3 \rightarrow R_{13}$

Rezistory R_3 a $R_z \rightarrow R_{3z}$

Rezistory R_1 a $R_z \rightarrow R_{1z}$



$$R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3 + R_z} \qquad R_{3z} = \frac{R_3 R_z}{R_1 + R_3 + R_z} \qquad R_{1z} = \frac{R_1 R_z}{R_1 + R_3 + R_z}$$

Nyní můžeme postupným zjednodušováním obvodu vypočítat napětí U_z:

$$R = R_{13} + (R_{1z} + R_2) \parallel (R_{3z} + R_4)$$

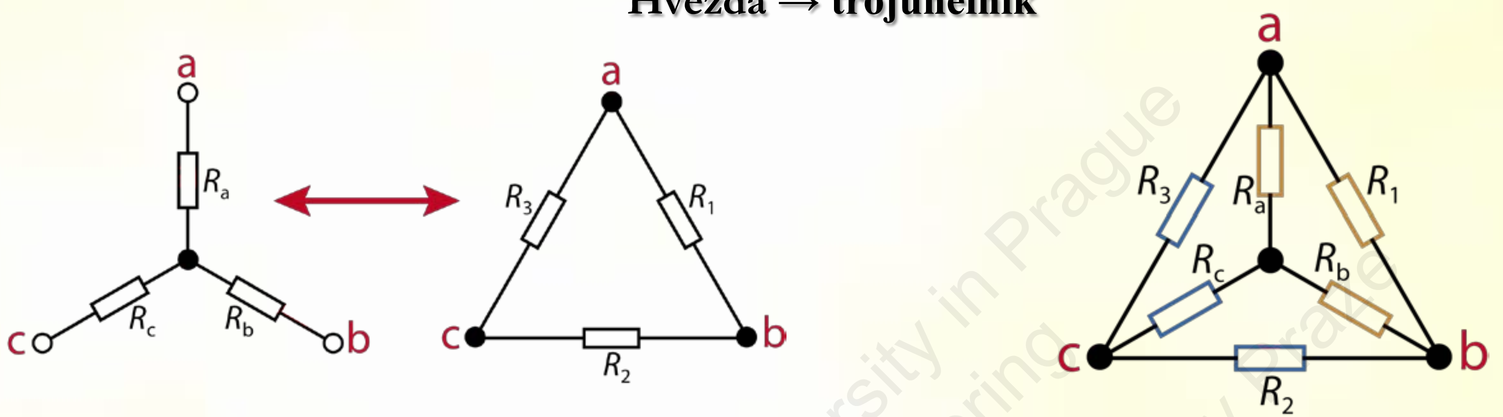
$$I = \frac{U}{R}$$

$$U_x = U - R_{13} I$$

$$U_{R2} = U_x \frac{R_2}{R_{1z} + R_2} \qquad U_{R4} = U_x \frac{R_4}{R_{3z} + R_4}$$

$$U_Z = U_{R2} - U_{R4}$$

Hvězda → trojúhelník



$$R_1 = R_a + R_b + \frac{R_a R_b}{R_c} \qquad R_2 = R_b + R_c + \frac{R_b R_c}{R_a} \qquad R_3 = R_a + R_c + \frac{R_a R_c}{R_b}$$

Pomůcka:

Uvedené vztahy se opět není nutné se učit nazpaměť.

Všimněte si hnědě zvýrazněných rezistorů, zapojených mezi uzly a, b – počítáme odpor rezistoru R_1; výsledný odpor je součtem odporů hvězdy, zapojených mezi uzly a, b plus zlomek, kde v čitateli je jejich součin, ve jmenovateli opor třetího rezistoru hvězdy