Test A

(výběr z hroznů)

19–20. října 2005

1. (2 body) Najděte infimum množiny $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 5\}$.

2. (10 bodů) Zjistěte, pro která reálná čísla x platí nerovnost

$$\frac{x-3}{|x+2|} < \frac{1}{2}.$$

3. (10 bodů) Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n platí

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1).$$

4. (18 bodů) Podle definice pojmu limity dokažte, že

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+100}{3n-8} = \frac{1}{3}.$$

Řešení A

aktualizováno 2. ledna 2006

1. Množinu $M = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 5\}$ můžeme ekvivalentně popsat jako $M = \{x \in \mathbb{R} : |x| < \sqrt{5}\}$ nebo explicitně jako interval $M = (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$, takže $\inf M = -\sqrt{5}$ a máme 2 body.

2. (a) Pro $x = -2$ není levá strana nerovnosti vůbec definovaná a pro všechna $x \neq -2$ je nerovnost $\frac{x-3}{|x+2|} < \frac{1}{2}$ ekvivalentní nerovnosti

$$2x - 6 < |x + 2|,$$

kterou se budeme nyní zaobírat. V závislosti na znaménku čísla $x + 2$, tj. argumentu absolutní hodnoty, řešíme následující dvě nerovnosti:
Nerovnost 1: Pro $x < -2$ je $|x+2| = -x-2$, takže řešíme $2x - 6 < -x - 2 \iff 3x < 4 \iff x < \frac{4}{3}$. Česky: všechna $x < -2$ vyhovují naší nerovnosti, protože $-2 < \frac{4}{3}$.
Nerovnost 2: Pro $x > -2$ je $|x+2| = x+2$ a počítáme $2x-6 < x+2 \iff x < 8$, tj. všechna $x > -2$, která vyhovují naší nerovnosti, musí být současně mensí než 8.
Závěr: Dohromady, $x \in \mathbb{R}$ je řešením zadané nerovnosti právě tehdy, když

$$x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 8) = (-\infty, 8) \setminus \{-2\}.$$

(b) V pokročilejší fázi studia, např. za polovinou semestru, můžeme úlohu chápat taky jako „určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ má funkce

$$f(x) = \frac{x-3}{|x+2|}$$

hodnoty menší než $\frac{1}{2}$“. Pokud jsme schopni nějak rychle funkci f analyzovat, má tento přístup evidentní výhodu ve své názornosti, viz obrázek 1.
Analýza: Rychle napsaná rychlá analýza funkce f může vypadat třeba takto:

- $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; uvažujeme pouze $x \in D(f)$, tj. $x \neq -2$,
- $f(x) = 0 \iff x = 3$ a protože $0 < \frac{1}{2}$, je $x = 3$ jedno dobré řešení,
- pro všechna $x < 3$ (a samozřejmě $x \neq -2$) je $f(x) < 0 < \frac{1}{2}$, takže všechna $x \in (-\infty, 3) \setminus \{-2\}$ jsou taky řešením naší nerovnosti.

Nápad 1: Po této úvaze stačí uvažovat pouze $x > 3$, tj. řešíme pouze jednu nerovnost z postupu (a) místo toho, abychom dělali tutéž práci dvakrát…

Nápad 2: Pro $x > 3$, nebo obecněji pro $x > -2$, můžeme místo nerovnosti $f(x) < \frac{1}{2}$ uvažovat raději rovnost[1] $f(x) = \frac{x-3}{x+2} = \frac{1}{2}$, která platí právě tehdy, když $2x - 6 = x + 2$, tj. $x = 8$. Celkem tedy máme, že $f(x) = \frac{1}{2} \iff x = 8$ a z dřívějška $f(3) = 0 < \frac{1}{2}$. Protože je funkce f spojitá (!) na celém definičním oboru, musí být taky $f(x) < \frac{1}{2}$ pro všechna x mezi 3 a 8, obecněji pro $x \in (-2, 8)$.
Závěr: Celkem tedy dostáváme stejný výsledek jako v předešlém postupu, tj. $x \in \mathbb{R}$ je řešení zadané nerovnosti právě tehdy, když

$$x \in \big((-\infty, 3] \setminus \{-2\}\big) \cup (3, 8) = (-\infty, 8) \setminus \{-2\}.$$

Cvičení: Cvičně můžeme dopočítat něco navíc, abychom měli přesnější představu o chování funkce f:

- pro $x > -2$ je $f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$, takže funkce je skutečně rostoucí na tomto intervalu (neroste však neomezeně: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$),
- dále např. $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$, pro $x < -2$ je $f'(x) = -\frac{5}{(x+2)^2} < 0$ a tak podobně,
- samozřejmě je jako obvykle vhodné pro kontrolu výsledku dosadit několik čísel za x a přesvědčit se, zda studovaná nerovnost skutečně platí/neplatí...

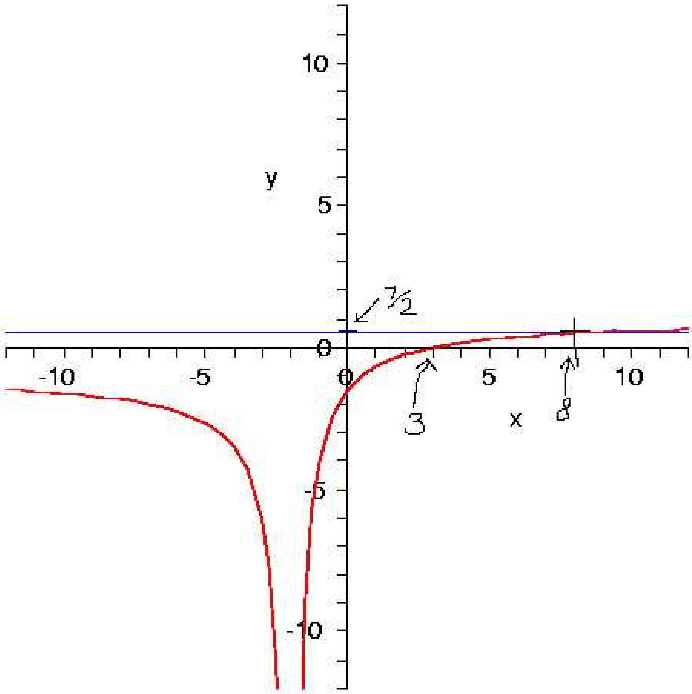
3. Tvrzení asi snad skutečně platí, protože pro prvních pár $n = 2, 3, 4, 5$ máme:

$$\begin{aligned} 2+4=6 &= 2\cdot 3,\\ 2+4+6=12 &= 3\cdot 4,\\ 2+4+6+8=20 &= 4\cdot 5\\ 2+4+6+8+10=30 &= 5\cdot 6 \end{aligned}$$

a tak dále. Vřele doporučujeme podobná ověřování pro malá n vždycky udělat, zejména proto, že je to zpravidla jediný přirozený způsob, jak přijít na nějaký přímý argument, který by dokázal tvrzení obecně:
(a) Všimneme si, že součet prvního a posledního (n-tého) čísla v řadě je stejný jako součet druhého a předposledního, ten je stejný jako součet třetího a před-předposledního, atd......[2] Celkem máme takových párů $\frac{n}{2}$, ovšem pokud n je sudé. Stručně můžeme toto pozorování napsat jako

$$\begin{aligned} & 2+4+6+\cdots+(2n-4)+(2n-2)+2n = \\ = \;& (2+2n)+(4+2n-2)+(6+2n-4)+\cdots = \\ = \;& (2+2n)\cdot\frac{n}{2} = n(n+1). \end{aligned}$$

[1] což by mělo být o dost milejší, protože se nechybuje v úpravách, násobíme-li náhodou zápornými čísly...
[2] číselná posloupnost $(2, 4, 6, \ldots)$ je aritmetická



Obrázek 1: nerovnost $\frac{x-3}{|x+2|} < \frac{1}{2}$ z příkladu 2

Pokud je n liché, tj. $n = 2k+1$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, pak máme k párů se součtem $2+2n$ a jeden lichý sčítanec $n+1$ (ten uprostřed). Součet celkem tedy činí

$$k(2+2n) + (n+1) = (n+1)(2k+1) = n(n+1),$$

což je tentýž výsledek, jako pro n sudé. Sestrojili jsme tedy přímý důkaz tvrzení, který funguje pro libovolné přirozené číslo n...
(b) Kdo si potrpí na matematickou indukci, může postupovat takto:
Krok 1: Nejdřív se dokáže, že tvrzení platí pro nejmenší možné n, tj. $n = 1$:

$$2 = 1 \cdot (1+1),$$

což je jistě pravda.
Krok 2: Nyní stačí dokázat, že pokud naše tvrzení platí pro nějaké přirozené číslo n, pak platí i pro číslo následující, tj. $n+1$. Jinými slovy, chceme dokázat následující implikaci pro libovolné $n \in \mathbb{N}$:

$$2+4+6+\cdots+2n = n(n+1) \Longrightarrow 2+4+6+\cdots+2(n+1) = (n+1)(n+2).$$

Toto tvrzení přesvědčivě dokážeme přímou úpravou

$$\begin{aligned} & 2+4+6+\cdots+2(n+1) = \\ = \quad & (2+4+6+\cdots+2n)+2(n+1) = \\ = \quad & n(n+1)+2(n+1) = (n+1)(n+2), \end{aligned}$$

kde jsme ve vhodný okamžik vhodně použili (!) indukční předpoklad.
Závěr: Dohromady, tvrzení platí pro $n = 1$ (podle prvního kroku) a odkud (opakováním kroku dva) platí pro $n = 2, 3, \ldots\ldots\ldots$, tj. skutečně pro všechna přirozená čísla n.

4. Máme posloupnost (a_n) reálných čísel definovanou jako $a_n = \frac{n+100}{3n-8}$ a máme dokázat, že hodnoty této posloupnosti konvergují k číslu $\frac{1}{3}$. Nikdo by neměl pochybovat o správnosti tohoto tvrzení, máme je však dokázat podle definice...
Definice: Podle definice limity máme ukázat, že všichni členové posloupnosti (a_n) s dostatečně velkými indexy n jsou čísla libovolně blízká právě hodnotě $\frac{1}{3}$. Jinými slovy, máme dokázat, že pro libovolné reálné číslo $\varepsilon > 0$ umíme najít takový index $n_0 \in \mathbb{N}$, že všechna a_n s indexem $n \geq n_0$ jsou hodnotě $\frac{1}{3}$ blíž než ε. Poslední požadavek formálně píšeme jako

$$\left| \frac{n+100}{3n-8} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon \tag{1}$$

a z tohoto výrazu se snažíme vyjádřit n v závislosti na ε, aby bylo zřejmé, která n této podmínce vyhovují. Odtud je již snadné zjistit, zda existuje n_0 tak, aby pro všechna $n \geq n_0$ nerovnost (1) platila, či nikoli...
Výpočet: Úpravou výrazu v absolutní hodnotě dostáváme ekvivalentní nerovnost

$$\left| \frac{308}{9n-24} \right| < \varepsilon.$$

Pro dostatečně velká n je výraz v absolutní hodnotě kladné číslo, takže budeme uvažovat nerovnost

$$\frac{308}{9n-24} < \varepsilon.$$

POZOR, tyto dvě nerovnosti jsou ekvivalentní pouze když $9n-24 \geq 0$, tj. $n \geq 3$, takže od teďka musíme mít na paměti, že výsledné n_0 musí zejména vyhovovat této podmínce!
Nyní již elementárními (a hlavně ekvivalentními) úpravami dostáváme:

$$\begin{aligned} \frac{308}{9n-24} &< \varepsilon \\ 308 &< 9\varepsilon n - 24\varepsilon \\ \frac{308+24\varepsilon}{9\varepsilon} &< n \end{aligned} \tag{2}$$

Závěr: Protože všechny úpravy byly skutečně ekvivalentní (!), máme nyní spočítáno, že pro všechna $n \geq 3$, která jsou současně větší než $\frac{308+24\varepsilon}{9\varepsilon}$, platí i původní nerovnost (1). Pro libovolné $\varepsilon > 0$ tedy můžeme jako ono správné číslo n_0 z definice vzít např. první přirozené číslo, které je větší než 3 a současně větší než posledně zmiňovaná hodnota, což taky můžeme chytře zapsat jako

$$n_0 = \max\left\{3, \left\lceil \frac{308 + 24\varepsilon}{9\varepsilon} \right\rceil\right\}.$$

Cvičení:

- Rozhodně zkuste pro kontrolu počítat např. s oblíbenou hodnotou $\varepsilon = 0.01$, tj. vyjádřit n_0 podle právě odvozeného pravidla a přesvědčit se, že pro $n \geq n_0$ jsou hodnoty a_n skutečně v toleranci $\frac{1}{3} \pm 0.01$.
- Taky se zkuste neprosto stejným postupem jako dosud přesvědčit, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+100}{3n-8}$ se nerovná ani $\frac{1}{2}$ ani 0 ani 1 ani cokoli jiného… (kromě $\frac{1}{3}$)
- Nadšenci se můžou taky přesvědčit, že ve skutečnosti je $\left\lceil \frac{308+24\varepsilon}{9\varepsilon} \right\rceil \geq 3$ pro libovolné $\varepsilon > 0$, takže závěr předchozího počítání můžeme napsat taky takto:
$$n_0 = \left\lceil \frac{308 + 24\varepsilon}{9\varepsilon} \right\rceil.$$