Test B

(výběr z bobulí)

23–24. listopadu 2005

1. (4 body) Rozhodněte, zda je funkce $f(x) = \log 2^{x^2+1}$ sudá, lichá, ...

2. (6 bodů) Pro která reálná čísla x není funkce

$$g(x) = \frac{|x+1|}{x^2 - 6x - 7}$$

spojitá.

3. (15 bodů) Najděte podmnožinu $P \subseteq \mathbb{R}$, na níž je funkce

$$h(x) = 1 - \sqrt{4 + 3^x}$$

prostá. Pak najděte předpis pro inverzní funkci a určete její definiční obor.

4. (15 bodů) Podle definice pojmu limity dokažte, že

$$\lim_{x \to 1} (1 - 2x) = -1.$$

Řešení B

aktualizováno 2. ledna 2006

1. Funkce f je definovaná pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a pro všechna $x \in D(f)$ umíme psát $f(x) = (x^2+1) \cdot \log 2$. Takto máme funkci f vyjádřenou jako součin sudé funkce a nějakého čísla, tedy f je krásně sudá.

2. Funkce g, jako podíl dvou spojitých funkcí, je spojitá všude, kde je definovaná. Jinými slovy, funkce g není spojitá právě pro $x \notin D(g)$, tj. $x \in \{-1, 7\}$ (kořeny funkce ve jmenovateli).

3. (i) Funkce h je definovaná pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a je prostá všude, kde je definovaná, tedy $P = \mathbb{R}$. Toto tvrzení můžeme ozřejmit nejméně dvojím způsobem:
Způsob 1: Funkce 3^x, a tedy i $3^x + 4$, je všude definovaná, kladná (!) a všude rostoucí funkce. Odtud $\sqrt{3^x+4}$ je opět všude definovaná a všude (o něco pomaleji) rostoucí funkce. Odtud $-\sqrt{3^x+4}$, a tedy i $h(x) = 1 - \sqrt{3^x+4}$, je zase všude definovaná a všude klesající, zejména tedy prostá, funkce.
Způsob 2: Dokážeme přímo implikaci $h(x) = h(x') \implies x = x'$, pro libovolné $x, x' \in D(h) = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h(x) = h(x') &\implies 1 - \sqrt{4+3^x} = 1 - \sqrt{4+3^{x'}} \implies \\ &\implies \sqrt{4+3^x} = \sqrt{4+3^{x'}} \implies \\ &\implies 4 + 3^x = 4 + 3^{x'} \implies \\ &\implies 3^x = 3^{x'} \implies x = x'. \end{aligned}$$

Uvědomte si, že používáme (jiným způsobem) stejné argumenty jako v předešlém způsobu řešení; zejména např. poslední implikace platí, protože funkce 3^x je rostoucí, tj. prostá.
Taky si uvědomte, že implikace $x = x' \implies h(x) = h(x')$ platí triviálně a hlavně s prostostí zobrazení h nemá nic společného!
Závěr: Ještě jednou, $P = D(f) = \mathbb{R}$, takže inverze globálně existuje a v následujícím odstavci pro ni hledáme předpis…
(ii) K vyjádření předpisu pro inverzní funkci, definujeme novou (závislou) proměnnou $y = h(x)$ a snažíme se odtud vyjádřit x v závislosti na y. Pokud se nám to podaří, máme $x = h^{-1}(y)$ a jsme hotovi. Obvykle se počítá takto:

$$\begin{aligned} y &= 1 - \sqrt{4+3^x} \\ y - 1 &= -\sqrt{4+3^x} \\ (y-1)^2 &= 4 + 3^x \\ y^2 - 2y - 3 &= 3^x \\ \log_3(y^2 - 2y - 3) &= x \end{aligned}$$

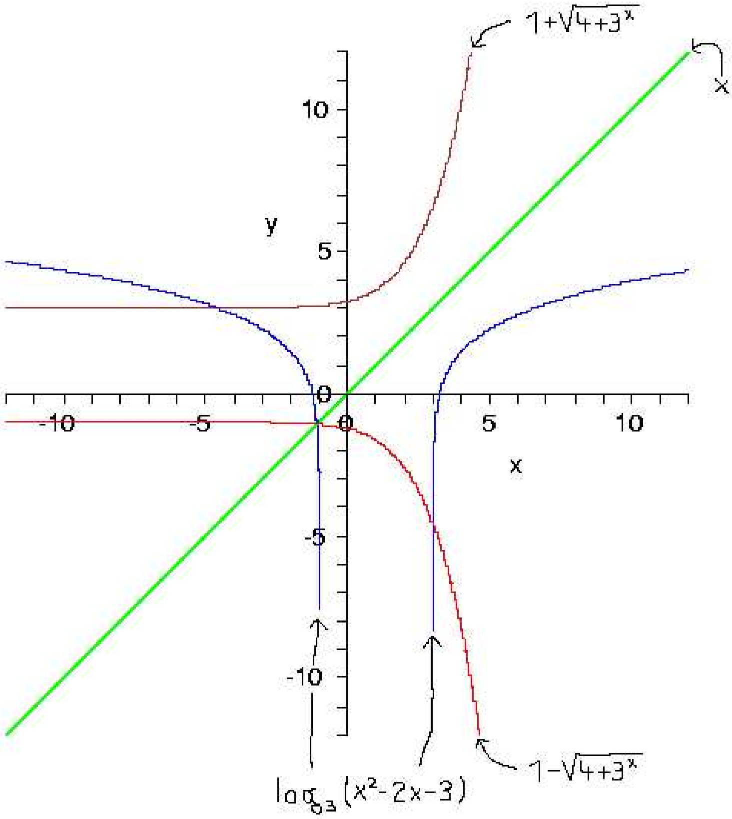
POZOR, polovina předchozích úprav není uplně ekvivalentní! Poslední, tj. čtvrtá, úprava je ekvivalence, pouze když $y^2 - 2y - 3 > 0$, což budeme diskutovat za chvíli v odstavci (iii). Zásadnější neekvivalence je skryta v úpravě druhé: platí pouze implikace $y-1 = -\sqrt{4+3^x} \Longrightarrow (y-1)^2 = 4+3^x$, ale opačné tvrzení určitě neplatí, neboť stejně dobře máme taky $y - 1 = \sqrt{4+3^x} \Longrightarrow (y-1)^2 = 4+3^x$! Tušíte nějaký důsledek tohoto pozorování? Pokud ne, hledejte odpověď v odstavci (iii)...
Závěr: V každém případě, inverzní funkce k funkci h bude (až porozumíme předchozím otazníkům) explicitně zadaná předpisem $h^{-1}(y) = \log_3(y^2 - 2y - 3)$ nebo, s obvyklejší proměnnou, $h^{-1}(x) = \log_3(x^2 - 2x - 3)$.
(iii) Definiční obor funkce h^{-1} je charakterizován podmínkou $x^2 - 2x - 3 > 0$. Kořeny polynomu nalevo jsou čísla -1 a 3 a standardní úvahou dostáváme: $(x+1)(x-3) > 0$ právě tehdy, když $x < -1$ nebo $x > 3$. Celkem se tedy zdá, že $D(h^{-1}) = (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$, ale.........
Kvíz: Proč tento závěr není správný?
Odpověď: Protože funkce h byla všude definovaná a spojitá (!), musí být množina $H(h)$ všech jejích hodnot souvislá podmnožina $\mathbb{R}$. Protože však $H(h) = D(h^{-1})$ a množinu napravo jsme právě popsali jako sjednocení dvou disjunktních intervalů, není něco v pořádku.
Útěcha: Množina $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ je skutečně definiční obor funkce $\log_3(x^2 - 2x - 3)$ a i tento výsledek jsem v písemce hodnotil plným počtem bodů. Funkce inverzní k h však bude definovaná pouze na jednom z těch intervalů...
Správný závěr: V odstavci (i) jsme odvodili, že funkce h je klesající na celém definičním oboru. Protože, znova, h je spojitá a $D(h) = \mathbb{R}$, jsou její hodnoty shora omezeny číslem $\lim_{x\to-\infty} h(x)$, pokud existuje, a zdola číslem $\lim_{x\to\infty} h(x)$, pokud existuje. Zpočítáme

$$\lim_{x\to-\infty}(1 - \sqrt{4+3^x}) = 1 - \sqrt{4} = -1 \text{ a } \lim_{x\to\infty}(1 - \sqrt{4+3^x}) = 1 - \sqrt{\infty} = -\infty,$$

takže $H(h) = D(h^{-1}) = (-\infty, -1)$.
Cvičení: Druhá větev (tj. souvislá část) grafu funkce $\log_3(x^2 - 2x - 3)$ definovaná na intervalu $(3, \infty)$ představuje inverzní funkci k funkci $1 + \sqrt{4+3^x}$, kterou jsme potkali v odstavci (ii); rozmyslete si podrobnosti a obrázek...

4. Označíme $k(x) = 1 - 2x$ a dokážeme, že hodnoty funkce k konvergují k -1 pro $x \to 1$. Nikdo nepochybuje o správnosti tohoto tvrzení, neboť funkce k je všude spojitá, zejména tedy v 1, takže $\lim_{x\to1} k(x) = k(1) = -1$. Chceme tuto rovnost dokázat podle definice limity...
Definice: Máme ukázat, že pro x dostatečně blízko 1 jsou hodnoty $k(x) = 1 - 2x$ libovolně blízko číslu -1. Jinými slovy, chceme dokázat, že pro libovolné reálné číslo $\varepsilon > 0$ umíme najít nějaké (ryzí) okolí O bodu 1 tak, aby pro všechna $x \in O$ platilo, že hodnoty $k(x)$ jsou číslu -1 blíž než ε. Okolí O obvykle charakterizujeme reálným číslem $\delta > 0$, tj. uvažujeme $O = (1 - \delta, 1 + \delta) \setminus \{1\} = (1 - \delta, 1) \cup (1, 1 + \delta)$, a formálně předchozí úkol formulujeme takto:
„Pro libovolné $\varepsilon > 0$ nejděte $\delta > 0$ tak, aby pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platilo

$$0 < |x - 1| < \delta \Longrightarrow |k(x) - (-1)| < \varepsilon.\text{“} \qquad (1)$$



Obrázek 1: k příkladu 3

(a) Nutnou podmínku, tj. nerovnost vpravo, můžeme ekvivalentně psát jako

$$\begin{aligned} |(1-2x)-(-1)| &< \varepsilon \\ 2\,|1-x| &< \varepsilon \\ |x-1| &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Zejména tedy platí implikace $|x-1| < \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow |k(x)-(-1)| < \varepsilon$, odkud je již zřejmé, že pokud pro libovolné $\varepsilon > 0$ definujeme $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ (nebo jakékoli číslo menší), tak tvrzení (1) přesvědčivě platí.
(b) Taky můžeme úlohu řešit tak, že aplikujeme proceduru, kterou jsme používali pro (lokálně) monotonní funkce:

- funkce $k(x) = 1-2x$ je spojitá a prostá na celém definičním oboru; předpis

pro inverzní funkci je
$$k^{-1}(y) = \frac{1-y}{2}$$

- najdou se mezní čísla x_1 a x_2, pro která je $|k(x) - (-1)| = \varepsilon$, tj. pro která platí $k(x_1) = -1 + \varepsilon$ a $k(x_2) = -1 - \varepsilon$:
$$\begin{aligned} x_1 &= k^{-1}(-1+\varepsilon) = \frac{2-\varepsilon}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \\ x_2 &= k^{-1}(-1-\varepsilon) = \frac{2+\varepsilon}{2} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

- spočítají se vzdálenosti x_1, x_2 od 1:
$$\begin{aligned} \delta_1 = |x_1 - 1| &= \left|-\frac{\varepsilon}{2}\right| = \frac{\varepsilon}{2} \\ \delta_2 = |x_2 - 1| &= \left|\frac{\varepsilon}{2}\right| = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

- jako výsledek se vezme menší delta:
$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Závěr: Ať už jsme počítali jakkoli, pro libovolné reálné číslo $\varepsilon > 0$ skutečně existuje reálné $\delta > 0$ (např. $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$) tak, že pro všechna reálná čísla x, která jsou 1 blíž než δ, jsou hodnoty $1 - 2x$ číslu -1 blíž než ε, tedy $\lim\limits_{x\to 1}(1-2x) = -1$.

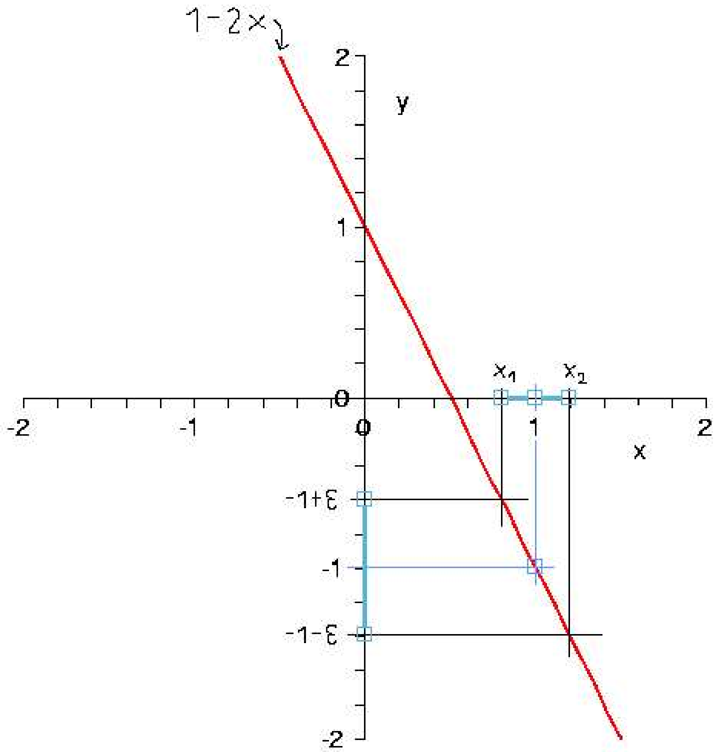
Poznámky a cvičení:

- V našem případě byl postup (a) podstatně rychlejší než alternativa (b), ale obecně tomu tak nebývá. Jednak se pracuje s nerovnostmi a absolutními hodnotami, jednak je často třeba udělat nějaký chytrý odhad, tj. nahradit jednu nerovnost nerovností silnější (viz řešené příklady ve sbírce). Celkově, všechny úpravy v postupu (a) bývají dost formální, takže případné chyby se pak dost těžko hledají.

- Naopak, hlavní výhoda postupu (b) je, že přímo odpovídá názorné představě, tj. obrázku. Samozřejmě, bez dodatečných modifikací je uvedený postup použitelný pouze pro limity v bodech, na jejichž nějakém okolí je studovaná funkce rostoucí nebo klesající (!), tedy např. spojitá a prostá, ...

- V každém případě se snažte podobné úlohy vždy řešit (a výstupy srovnávat) s konkrétním obrázkem.

- V našem případě, je výsledek (tj. závislost $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$) naprosto zřejmý už jen z obrázku, protože funkce $k(x) = 1 - 2x$, jejíž limitu počítáme, je obzvlášť jednoduchá, totiž lineární!



Obrázek 2: $\lim_{x \to 1}(1 - 2x) = -1$ z příkladu 4