Test C

(skupina 04)

15. prosince 2005

1. (40 bodů) Analyzujte funkci definovanou předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(1+x)}{1-x} & \text{pro } x < 0 \\ xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{pro } x > 0 \end{cases} .$$

Přitom za úplnou odpověď se považuje graf popsaný a sestrojený na základě řešení následujících úkolů (ne nutně v tomto pořadí):

a. definiční obor $D(f)$

b. sudost, lichost, …

c. spojitost, limity na hranici $D(f)$, nulové body a pod.

d. diferencovatelnost, extrémy, rostoucnost, klesajícnost

e. vypuklosti, inflexní body a tečny v inflexních bodech

f. asymptoty

g. obor hodnot $H(f)$

Řešení C

aktualizováno 3. ledna 2006

Funkce je definovaná pomocí dvou jednoduchých funkcí,

$$f_1(x) = \frac{x(1+x)}{1-x} \text{ a } f_2(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}},$$

takže přirozeně rozdělíme naši analýzu na dvě části. Než tak učiníme, odpovíme aspoň na to, co je zřejmé už nyní:

a. Funkce je definovaná pro všechna $x \neq 0$, tj. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b. Dále, funkce je definovaná symetricky podle 0, takže pokud by měla být sudá, příp. lichá, muselo by platit $f_1(-x) = f_2(x)$, příp. $f_1(-x) = -f_2(x)$, pro všechna $x > 0$. To zřejmě není pravda, takže funkce není ani sudá ani lichá.

Nic dalšího asi říct neumíme, takže pokračujeme po částech:

---

1. interval $(-\infty, 0)$**.** Na tomto intervalu pracujeme s funkcí

$$f_1 = \frac{x(1+x)}{1-x},$$

jejíž definiční obor je $D(f_1) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ a ...

$\mathbf{c}_1$**.** ... protože f_1 je podíl dvou spojitých funkcí (polynomů), je funkce f_1 taky spojitá na celém definičním oboru, zejména tedy na intervalu $(-\infty, 0)$.
Nulové body funkce f_1 jsou právě kořeny polynomu v čitateli, tj. čísla -1 a 0, z nichž pouze -1 náleží do studovaného intervalu. Z předešlých řečí o spojitosti aspoň máme

$$\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} f_1(x) = \lim_{x\to 0} f_1(x) = f_1(0) = 0.$$

Na intervalu $(-\infty, 0)$ je funkce ve jmenovateli kladná, takže o znamínku f_1 rozhoduje právě znamínko funkce v čitateli...
Celkem tedy máme:

- pro $x \in (-\infty, -1)$ je $f_1(x) > 0$
- pro $x = -1$ je $f_1(x) = 0$

- pro $x \in (-1, 0)$ je $f_1(x) < 0$
- pro $x \to 0_-$ je $f_1(x) \to 0$

To je taky asi všechno, co umíme o funkci f_1 říct bez derivování…
První představa: Už teď však máme docela dobrou představu o možném/-ých grafu/-ech funkce; zejména už teď je jisté, že někde na intervalu $(-1, 0)$ musí mít funkce f_1 (aspoň jedno) lokální minimum! (ví každý proč?) Podobně vidíme, že lokálně kolem -1 musí být funkce f_1 klesající a lokálně kolem 0 (zleva) rostoucí, což by se mělo potvrdit v následujícím odstavci.

d$_1$. Další kus analýzy je založen na výpočtu a následném přemýšlení o derivaci (tj. rychlosti změny hodnot) funkce f_1:

$$\begin{aligned}
f_1'(x) = \frac{df_1}{dx} &= \frac{(x+x^2)'(1-x) - (x+x^2)(1-x)'}{(1-x)^2} = \\
&= \frac{(1+2x)(1-x) + (x+x^2)}{(1-x)^2} = \frac{1+x-2x^2+x+x^2}{(1-x)^2} = \\
&= \frac{1+2x-x^2}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

První jednoduché pozorování je $D(f_1') = D(f_1) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, což česky znamená, že funkce f_1 je diferencovatelná (zejména tedy spojitá) všude, kde je definovaná. Pro nás to hlavně znamená, že graf funkce f_1 nemá nikde žádné hroty, zobáky a pod.
Dál, funkce ve jmenovateli je na celém definičním oboru kladná, takže o znamínku a nulovosti f_1' rozhoduje zase jenom funkce v čitateli. Kořeny polynomu $1 + 2x - x^2$ jsou čísla $1 \pm \sqrt{2}$, z nichž pouze $1 - \sqrt{2} \doteq -0.41$ leží v intervalu, kde f_1 analyzujeme.
Protože funkce f_1' je spojitá (!) na celém svém definičním oboru, $1 \pm \sqrt{2}$ jsou její jediné nulové body a např. $f_1'(0) = 1 > 0$, můžeme udělat následující závěr:

- pro $x \in (-\infty, 1 - \sqrt{2})$ je $f_1'(x) < 0$, tj. funkce f_1 klesá
- pro $x = 1 - \sqrt{2}$ je $f_1'(x) = 0$, tj. stacionární bod
- pro $x \in (1 - \sqrt{2}, 0)$ je $f_1'(x) > 0$, tj. funkce f_1 roste
- pro $x \in [0, \infty)$ nás to už nezajímá

Odtud je hlavně patrno, že v bodě $1-\sqrt{2}$ nabývá funkce f_1 lokálně (na intervalu $(-\infty, 0)$ dokonce globálně) minimální hodnoty, která je přibližně $f_1(1 - \sqrt{2}) = \cdots = \sqrt{8} - 3 \doteq -0.17$; zejména $1 - \sqrt{2} \in (-1, 0)$, což potvrzuje náš dřívější dohad. Podobně, diskuzi o lokálním chování kolem -1 a 0 můžeme snadno a přesvědčivě ověřit jenom dosazením $f_1'(-1) = -\frac{1}{2} < 0$ a $f_1'(0) = 1 > 0$…

e$_1$. O případné další vlnitosti grafu funkce f_1 budeme umět říct víc po spočítání její druhé derivace f_1'', které lidově říkáme zrychlení. Ze zkušenosti víme, že funkce podobného typu jako f_1 jsou velmi skromné, tj. žádné zbytečné vlnění neočekáváme:

$$\begin{aligned}
f_1''(x) = (f_1'(x))' &= \frac{(1+2x-x^2)'(1-x)^2 - (1+2x-x^2)((1-x)^2)'}{(1-x)^4} = \\
&= \frac{(2-2x)(1-x)^2 - (1+2x-x^2)2(1-x)(1-x)'}{(1-x)^4} = \\
&= \frac{2(1-x)^3 + 2(1+2x-x^2)(1-x)}{(1-x)^4} = \\
&= \frac{2(1-x)\left((1-x)^2 + (1+2x-x^2)\right)}{(1-x)^4} = \\
&= \frac{4}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

Skutečně, pro $x < 0$ je $1 - x > 0$, takže $f_1''(x) > 0$. To znamená, že funkce f_1 nemá inflexní body a na intervalu $(-\infty, 0)$ je graf vypuklý jen jedním způsobem a to dolů. Mimo jiné nás tento výsledek znova ujišťuje, že v bodě $1 - \sqrt{2}$ má funkce f_1 lokálně minimální hodnotu ($f_1'(x) = 0$ a $f_1''(x) > 0 \Longrightarrow x$ je lok. min.).

f$_1$. Poslední, co je třeba diskutovat, abychom měli úplnou a dokonalou představu o grafu funkce na intervalu $(-\infty, 0)$, je chování pro $x \to -\infty$. Zejména nás zajímá, zda jsou hodnoty funkce f_1 nějak shora omezné. O tom by mohla něco prozradit limita

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+x^2}{1-x} = \cdots = \infty,$$ [1]

takže funkce shora omezená není.

Funkce sice nekonverguje k žádné reálné hodnotě, přesto se pro $x \to -\infty$ může její průběh linearizovat, tj. může existovat přímka $y = ax + b$, k níž se graf funkce f_1 asymptoticky blíží... To nastane právě tehdy, když existuje limita $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1'(x)$ (nebo ekvivalentně, když $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1''(x) = 0$) a směrnice a pak bude rovna tomuto číslu.[2] Alternativně lze směrnici asymptoty počítat jako $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f_1(x)}{x}$ a cvičně spočítáme všechny limity, které jsme dosud zmínili:

(a) Nejjednodušší ze všech je

$$\lim_{x\to-\infty} f_1''(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{(1-x)^3} = \frac{4}{\infty} = 0,$$

takže asymptota bude!

(b) Směrnice poprvé:

$$a = \lim_{x\to-\infty} f_1'(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+2x-x^2}{1-2x+x^2} = \cdots = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{1} = -1.$$

[1] uvědomte si, že pro $x \to -\infty$ máme neurčitý výraz typu $\frac{\infty}{\infty}$ a že znáte aspoň tři způsoby, jak tuto limitu řešit......

[2] hodnota $f_1'(x)$ je směrnice tečny ke grafu f_1 v bodě x a asymptota je tečna v $\pm\infty$

(c) Směrnice podruhé:

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+x}{1-x} = \cdots = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{1} = -1.$$

Hodnotu b teď získáme přímo z formálního popisu asymptotického chování funkce f_1, tj. ze vztahu $\lim_{x\to-\infty}(f_1(x) - (ax+b)) = 0$. Odtud

$$b = \lim_{x\to-\infty}(f_1(x) + x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1+x) + x(1-x)}{1-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{1-x} = \cdots = -2.$$

Dohromady, asymptota ke grafu funkce f_1 pro $x \to -\infty$ je přímka

$$y = -x - 2.$$

$\mathbf{g}_1$**.** Uvědomte si, že skutečně až nyní známe obor hodnot funkce f_1 na intervalu $(-\infty, 0)$: pro $x < 0$ nabývá funkce $f_1(x)$ všech (!) hodnot z množiny

$$H_1 = [\sqrt{8} - 3, \infty).$$

Poznámka: Ve všech úpravách, co jsme dělali s limitami, tři tečky znamenají vždy některou z mnoha možných úprav/úvah, které za celý semestr ovládáme (viz poznámka 1 pod čarou) a ani v písemce je není třeba nějak zvlášť rozepisovat...

Závěr: Výsledek dosavadního počítání by měl být shrnut v grafu, který částečně popíšeme. Funkci f_1 jsme sice analyzovali na intervalu $(-\infty, 0)$, ale vždy máme spočítáno o něco víc, viz obrázek 1......

---

2. interval $(0, \infty)$**.** Na tomto intervalu pracujeme s funkcí

$$f_2(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}},$$

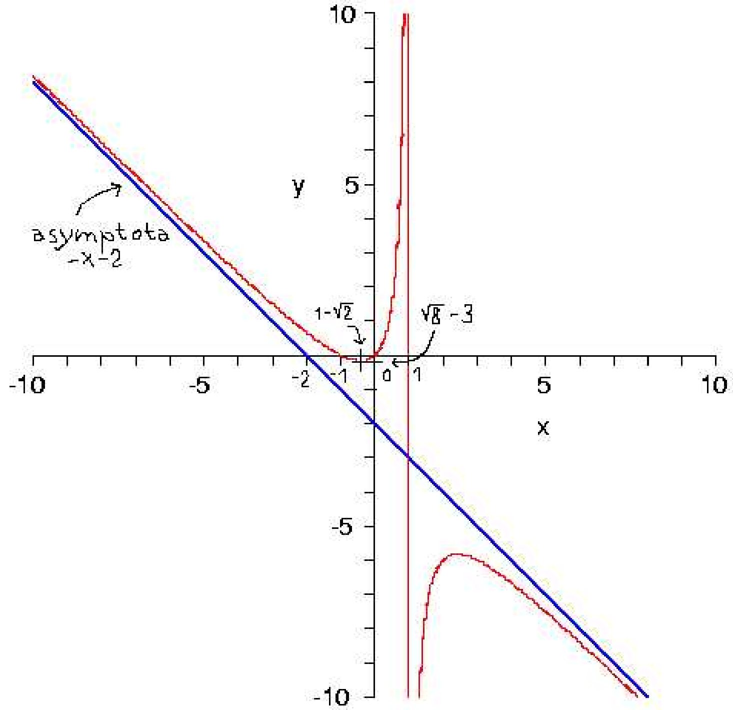
která je definovaná pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

$\mathbf{c}_2$**.** Na celém definičním oboru je funkce f_2 spojitá jakožto součin dvou spojitých funkcí. Přitom funkce $e^{-\frac{x^2}{2}}$ je spojitá, protože je to složení spojitých funkcí e^x a $-\frac{x^2}{2}$, ...
Protože $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, má fukce f_2 jediný nulový bod a to 0. Odtud pro $x > 0$ je $f_2(x) > 0$ a pro úplnost ještě dodejme

$$\lim_{x\to0_+} f_2(x) = f_2(0) = 0,$$

tedy stejný výsledek jako v odstavci $\mathbf{c}_1$ zleva. Do celkové diskuze si tedy budeme pamatovat, že

$$\lim_{x\to0} f(x) = 0.$$



Obrázek 1: funkce $f_1(x) = \frac{x(1+x)}{1-x}$

Narozdíl od diskuze na intervalu $(-\infty, 0)$ neumíme z těchto informací utvořit téměř žádnou představu o možném průběhu funkce f_2. Proto, hnáni nedočkavostí, spočítáme cvičně limitu $\lim_{x\to\infty} f_2(x)$ a to záměrně ještě před tím, než začneme derivovat!

Výpočet $\lim_{x\to\infty} f_2(x)$*:* Pro $x \to \infty$ dostáváme neurčitý výraz typu $\infty \cdot e^{-\infty} = \infty \cdot 0$ a jediný přirozený způsob, jak takovou limitu dopočítat, je asi tento: Přepíšeme

$$xe^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}}$$

a výraz napravo je, pro $x \to \infty$, neurčitost typu $\frac{\infty}{\infty}$ a samozřejmě vyzkoušíme trik Guillauma Francoise Antoina de l'Hospitala: Obě funkce, které v podílu vystupují, jsou diferencovatelné,

$$(x)' = 1, \ \left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)' = e^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{x^2}{2}\right)' = xe^{\frac{x^2}{2}}$$

a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{xe^{\frac{x^2}{2}}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Celkem tedy platí

$$\lim_{x\to\infty} f_2(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{xe^{\frac{x^2}{2}}} = 0.$$

Důsledky a první představa: První důsledek předešlého výpočtu je úplné řešení úlohy o asymptotách: protože funkce f_2 je na intervalu $(0,\infty)$ všude definovaná, jediná asymptota tady je přímka $y = 0$.
Další závěr plyne z faktu, že $f_2(x) > 0$ pro $x \in (0,\infty)$, $\lim_{x\to 0_+} f_2(x) = 0$ a, zejména, f_2 je spojitá. Odtud funkce f_2 musí být v nějakém (pravém) okolí 0 rostoucí, na studovaném intervalu bude mít (alespoň jedno) lokální maximum a (aspoň jeden) inflexní bod. Všechny tyto předpovědi by se měly potvrdit v nádledujících odstavcích...

d$_2$. První derivování:

$$f_2'(x) = (x)'e^{\frac{-x^2}{2}} + x\left(e^{\frac{-x^2}{2}}\right)' = e^{\frac{-x^2}{2}}\left(1 + x\left(\frac{-x^2}{2}\right)'\right) = e^{\frac{-x^2}{2}}(1-x^2)$$

Odtud zejména $D(f_2') = D(f_2) = \mathbb{R}$, tj. funkce je diferencovatelná na celém svém definičním oboru. Dále, $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, takže o znamínku a nulovosti f_2' rozhoduje pouze druhý součinitel $1 - x^2$...

- pro $x \in (0,1)$ je $f_2'(x) > 0$, tj. funkce f_2 roste
- pro $x = 1$ je $f_2'(x) = 0$, tj. stacionární bod
- pro $x \in (1,\infty)$ je $f_2'(x) < 0$, tj. funkce f_2 klesá

Takže $x = 1$ je lokální maximum s hodnotou $f_2(1) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \doteq 0{,}6$. Všimněte si, že $f_2'(x)$ je opět spojitá funkce a $\lim\limits_{x\to 0_+} f'(x) = f_2'(0) = 1$, což je stejná hodnota, jako v odstavci **d$_1$**, počítáme-li zleva. Pro celkovou představu o funkci f to znamená, že případná dodefinice f v 0 jako

$$f(0) := 0$$

by bylo nejen spojité, ale i diferencovatelné rozšíření funkce f. V obrázku budeme toto pozorování reprezentovat společnou tečnou...

e$_2$. Druhá derivace:

$$f_2''(x) = \left(e^{\frac{-x^2}{2}}\right)'(1-x^2) + e^{\frac{-x^2}{2}}(1-x^2)' = e^{\frac{-x^2}{2}}\left(-x(1-x^2) - 2x\right) = e^{\frac{-x^2}{2}}x(x^2-3)$$

Na intervalu $(0,\infty)$ máme jediný inflexní bod $\sqrt{3}$ a přesně podle očekávání je $\sqrt{3} > 1$...... Jednoduchá diskuze o znamínku vede k závěru:

- pro $x \in (0, \sqrt{3})$ je $f_2''(x) < 0$, tj. f_2 je vypuklá nahoru
- pro $x = \sqrt{3}$ je $f_2''(x) = 0$, tj. inflexní bod
- pro $x \in (\sqrt{3}, \infty)$ je $f_2''(x) > 0$, tj. f_2 je vypuklá dolů

Tečna v inflexním bodě: Nejdřív spočteme

$$\begin{aligned} f_2(\sqrt{3}) &= \sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{e^3}}, \\ f_2'(\sqrt{3}) &= -2e^{-\frac{3}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{e^3}}. \end{aligned}$$

Nyní tečna v $(x, y) = (\sqrt{3}, f_2(\sqrt{3}))$ je přímka $y = ax + b$, kde $a = f_2'(\sqrt{3}) = \frac{-2}{\sqrt{e^3}}$ a b dostaneme po dosazení $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{e^3}} = \frac{-2}{\sqrt{e^3}}\sqrt{3} + b$, tedy $b = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{e^3}}$ (pokud počítám dobře). Dohromady tečna v inflexním bodě je přímka

$$y = \frac{-2}{\sqrt{e^3}}x + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{e^3}}.$$

$\mathbf{f_2}$**.** Už z odstavce $\mathbf{c_2}$ víme, že asymptota pro $x \to \infty$ je přímka

$$y = 0.$$

Jinak $y = ax+b$ a cvičně se každý rád přesvědčí, že $a = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} f_2'(x) = 0$. Odtud pak $b = \lim\limits_{x\to\infty} f_2(x) = 0$, což je právě zmiňovaný výpočet...

$\mathbf{g_2}$**.** Pro $x > 0$ nabývá funkce f_2 všech hodnot z intervalu

$$H_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right).$$

Závěr: Výsledky počítání opět zhodnotíme v grafu a protože je funkce f_2 jasně lichá, kreslíme jej rovnou celý, viz obrázek 2.

Závěr. Funkce f je definovaná pro všechna $x \neq 0$, tj.

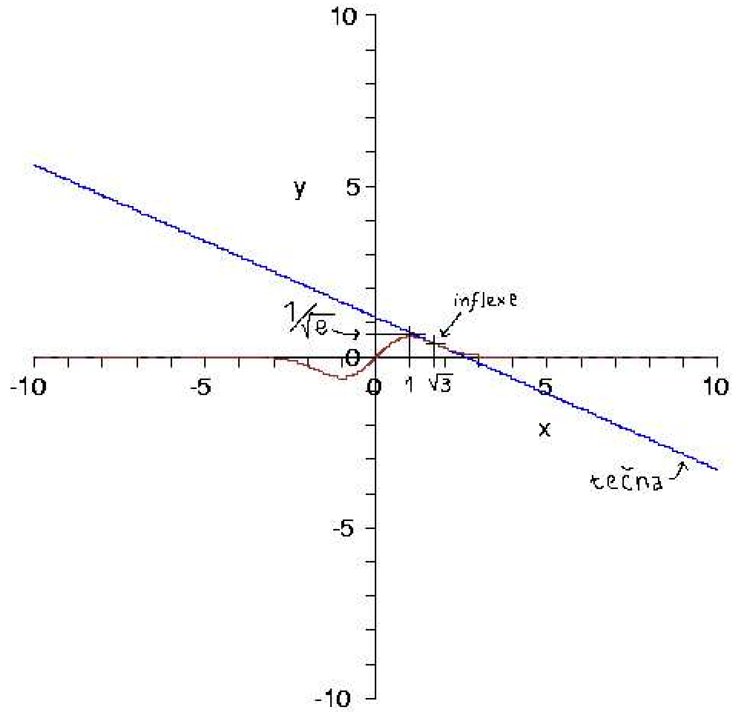
$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

není ani sudá ani lichá a je spojitá a diferencovatelná na celém definičním oboru. Množina všech hodnot, kterých f nabývá, je sjednocením množin H_1 a H_2 shora, tj.

$$H(f) = [\sqrt{8} - 3, \infty).$$

Tímto odpovídáme na úkoly **a**, **b**, **g** a částečně **c** a **d**. Zbytek shrneme následujícím přehledným způsobem a obrázkem:

c. první představa:



Obrázek 2: funkce $f_2(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

- pro $x \to -\infty$ je $f(x) \to \infty$
- pro $x \in (-\infty, -1)$ je $f(x) > 0$
- pro $x = -1$ je $f(x) = 0$
- pro $x \in (-1, 0)$ je $f(x) < 0$
- pro $x \to 0$ je $f(x) \to 0$
- pro $x \in (0, \infty)$ je $f(x) > 0$
- pro $x \to \infty$ je $f(x) \to 0$

d. monotónnosti a extrémy:

- pro $x \in (-\infty, 1 - \sqrt{2})$ funkce f klesá

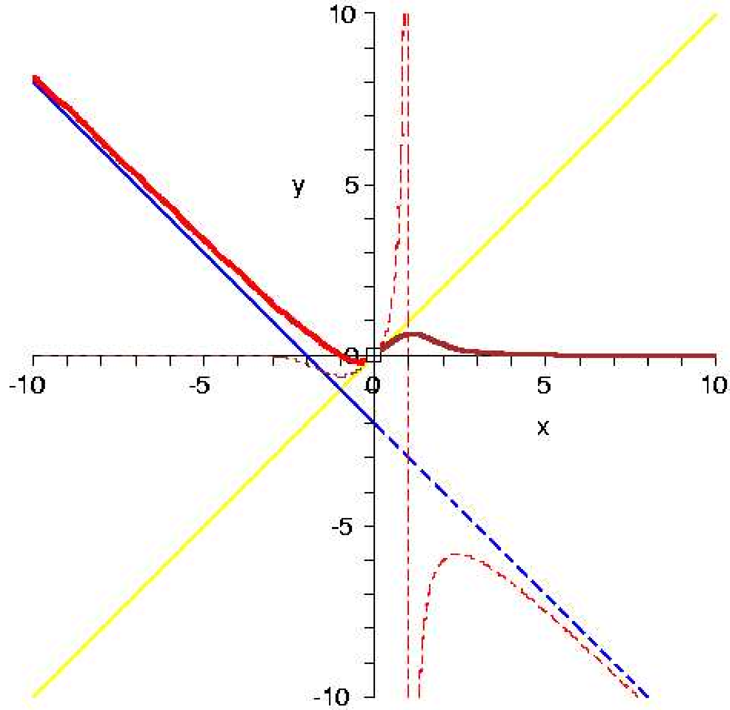
- pro $x = 1 - \sqrt{2}$ je hodnota $f(x) = \sqrt{8} - 3$ lokálně minimální
- pro $x \in (1 - \sqrt{2}, 0)$ funkce f roste
- pro $x \in (0, 1)$ funkce f roste
- pro $x = 1$ je hodnota $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e}}$ lokálně maximální
- pro $x \in (1, \infty)$ funkce f klesá

e. vypuklosti a inflexní body:

- pro $x \in (-\infty, 0)$ je f vypuklá dolů
- pro $x \in (0, \sqrt{3})$ je f vypuklá nahoru
- pro $x = \sqrt{3}$ máme inflexní bod s tečnou $y = \frac{-2}{\sqrt{e^3}}x + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{e^3}}$
- pro $x \in (\sqrt{3}, \infty)$ je f vypuklá dolů

f. asymptoty:

- pro $x \to -\infty$ je asymptotou přímka $y = -x - 2$
- pro $x \to \infty$ je asymptotou přímka $y = 0$



Obrázek 3: funkce f (tlustě)