Katedra matematiky PdF MU v Brně
Studijní obor: Učitelství pro 1. stupeň ZŠ
Předmět: Aritmetika 1

Typy úloh k písemné části zkoušky

Zkoušející: doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc., RNDr. Milena Vaňurová, CSc.

1. Jsou dány množiny M = $\{1,2,3,4\}$ a N = $\{a,b,c,d\}$.
   a) Definujte výčtem prvků relaci R z množiny M do N, která není zobrazením.
   b) Definujte relaci Z, která je zobrazením z množiny N do M a určete přesně jeho typ.
   c) Zapište výčtem prvků relaci R•Z a rozhodněte, zda je tato relace zobrazením. Pokud ano, určete, zda je prosté.
   d) Zapište dvě různé bijekce množiny N na množinu M.
   e) Na množině N definujte dvě různé permutace P_1, P_2 a určete permutace $P_1 \bullet P_2$ a $P_1 \bullet P_2$.

2. Je dána množina M = $\{1,2,3\}$. V množině M jsou dány relace R, T, U, V takto:
   R = $\{[x,y] \in M \times M;\ x \neq y\ \Rightarrow\ x+y=5\}$, T = $\{[x,y] \in M \times M;\ x \neq 2\ \vee\ y = x+1\}$,
   U = $\{[x,y] \in M \times M;\ x < 3\ \wedge\ y = x+1\}$, V = $\{[1,3],[2,1],[3,2]\}$.
   a) Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou některé z relací R, T, U, V zobrazení v množině M. Pokud ano, určete přesně jejich typ. Je některá z těchto relací permutací na množině M?
   b) Zapište relace R^{-1}, V^{-1}, V^2, U•V, R•U, R•(V•U). Je některá z těchto relací zobrazením v množině M? Pokud ano, určete přesně typ.

3. Rozhodněte a zdůvodněte, které z vlastností ND, A, K, EN, EI, ZR má v množině M = $\{a,b,c\}$ operace * :

*	a	b	c
a		a	b
b	a	b	c
c	b	c	b

*	a	b	c
a	b	a	c
b	c	b	a
c	a	c	b

*	a	b	c
a	c	a	a
b		c	b
c	a	b	c

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	b	a

4. V množině M = $\{a,b,c\}$ definujte tabulkou aspoň jednu binární operaci, která má vlastnosti:
   a) $K \wedge \cancel{EN}$ b) $ND \wedge \cancel{K} \wedge EN$ c) $ND \wedge EN \wedge \cancel{EI}$ d) $A \wedge \cancel{ZR}$
   e) $\cancel{K} \wedge EN \wedge \cancel{EI}$ f) $EI \wedge ZR$ g) $ND \wedge \cancel{A} \wedge EI \wedge \cancel{ZR}$
   U všech nalezených operací určete i zbývající vlastnosti. Rozhodněte, zda v M existuje agresivní prvek vzhledem k jednotlivým operacím. Stanovte přesně typy algebraických struktur, které množina M spolu s jednotlivými operacemi tvoří.

5. Rozhodněte a zdůvodněte, které vlastnosti má operace $\circ$ v množině **N** (**C, Q, R**) :
   a) $x \circ y = 2x + y$ b) $x \circ y = x + y + 1$ c) $x \circ y = 2x + 2y$
   d) $x \circ y = 2x - y$ e) $x \circ y = x + y - 2$ f) $x \circ y = x - 2y$
   g) $x \circ y = xy + 1$ h) $x \circ y = x + y + xy$ i) $x \circ y = \frac{1}{2}(x + y)$

6. Rozhodněte, které vlastnosti mají (nemají) operace určující níže uvedené algebraické struktury a přesně určete typ každé z nich (symboly +, - , ·, : označují obvyklé číselné operace):
$(\mathbf{N}, +)$, $(\mathbf{N}, -)$, $(\mathbf{N}, \cdot)$, $(\mathbf{N}, :)$, $(\mathbf{C}, +)$, $(\mathbf{C}, -)$,
$(\mathbf{C}, \cdot)$, $(\mathbf{C}, :)$, $(\mathbf{Q}, \cdot)$, $(\mathbf{N}, +, \cdot)$, $(\mathbf{C}, +, \cdot)$, $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$
$(P(\mathrm{M}), \cup)$, $(P(\mathrm{M}), \cap)$, $(P(\mathrm{M}), \cup, \cap)$, $(P(\mathrm{M}), \cap, \cup)$, kde $P(\mathrm{M})$ je potenční systém množiny $\mathrm{M} = \{a, b,\}$

7. Nechť $(G, \circ)$ je komutativní grupa. Dokažte podrobně, že pro každé prvky $a, b, c \in G$ platí: a) $\overline{a \circ b} = \overline{a} \circ \overline{b}$ b) $\overline{\overline{a}} = a$ c) $c \circ a = c \circ b \Rightarrow a = b$.

8. Množina $N = \{0, 1, 2, ...\}$ je množina všech přirozených čísel. Určete 2 její podmnožiny, které jsou a) konečné , b) nekonečné .

9. Zvolte si výčtem prvků tři navzájem různé konečné množiny A, B, C tak, že množiny A, B mají společné dva prvky.
   a) Rozhodněte a zapište, zda jsou některé dvě z těchto množin ekvivalentní.
   b) Porovnejte kardinální čísla množin A, B, C. Tvrzení zdůvodněte podle definice nerovnosti mezi kardinálními čísly.
   c) Určete $|A| + |B|$, $|A| + |C|$, $|B| + |C|$, $|A| . |B|$, $|A| . |C|$.

10. Je dáno číslo 54. Zvolte si další přirozené číslo větší než 65 a menší než 70. Obě čísla zapište ve čtyřkové (pětkové, sedmičkové, šestnáctkové) číselné soustavě, použijte obě metody převodu. Dále vypočítejte ve čtyřkové (pětkové, sedmičkové, šestnáctkové) soustavě jejich součet, součin a rozdíl (proveďte zkoušky správnosti). Všechny výsledky získané ve čtyřkové soustavě převeďte přímo do soustavy dvojkové a šestnáctkové.

11. Vypočtěte a proveďte zkoušky správnosti:
   a) $ABA_{12} + BAB_{12}$, b) $1A2E3_{16} - 76B9_{16}$, c) $13721_8 : 5_8$. Výsledky porovnejte.

12. Trojciferné číslo zapsané v desítkové soustavě je zakončeno číslicí 6. Přesuneme-li ji na místo stovek(a ostatní dvě číslice ponecháme beze změny), dostaneme číslo, které je o 387 větší než původní číslo. Určete původní číslo.

13. Čtyřciferné číslo zapsané v desítkové soustavě má ciferný součet roven 22. Obě krajní číslice jsou stejné, obě vnitřní číslice jsou rovněž stejné. Vyměníme-li krajní číslice s vnitřními, zvětší se číslo o 891. Určete obě čísla.

14. Dokažte, že pro každá dvě celá čísla A, B platí:
   a) $-(A + B) = (-A) + (-B)$ b) $(-A) . B = -(A . B)$ c) $(-A) . (-B) = A . B$
   (v důkazu využijte této reprezentace: $A = [a \overset{\bullet}{,} b]$, $B = [c \overset{\bullet}{,} d]$).

15. Pro celá čísla A, B, X platí $A + X = B$. Určete celé číslo $X = [x \overset{\bullet}{,} y]$, jestliže $A = [1 \overset{\bullet}{,} 3]$, $B = [7 \overset{\bullet}{,} 2]$.

16. Dokažte, že rovnice A . X = B nemá v množině všech celých čísel řešení pro
   A = [3; 0], B = [0; 4] .

17. Pomocí tříd uspořádaných dvojic přirozených čísel zapište dvě kladná celá čísla a dvě záporná celá čísla.

18. Zapište tři uspořádané dvojice přirozených čísel, která reprezentují
   a) celé číslo O (nula) b) celé číslo J (jedna)

19. Jsou dána celá čísla A = [1 ;3], B = [4; 5].
   a) Vypočítejte A + B , A . B, A – B. b) Porovnejte čísla A, B.
   Vyřešte úlohu pro několik dalších dvojic celých čísel.

20. Dokažte, že pro každá tři celá čísla A, B, C platí: $(A < B \wedge C < 0) \Rightarrow A \cdot C > B \cdot C$.
   Dokažte alespoň jednu další vlastnost relace „<“ v úloze 16 na s. 199 v učebnici.

21. Vypočtěte: $a + |b| . |a| - |-a| + |a . b| - |a|^2 + |-b|$ pro a = -6 , b = 3 .

22. Dokažte, že pro každé celé číslo a platí $|a| = |-a|$.

23. Zvolte si dvě záporná a jedno kladné celé číslo. Tato tři čísla dělte postupně číslem 7 a číslem (–5). Ve všech šesti případech určete neúplný podíl a zbytek.

24. Zapište čtyři zlomky, které reprezentují totéž kladné racionální číslo. Dále zapište čtyři zlomky, které reprezentují jedno záporné racionální číslo. U obou čísel určete jejich desetinný rozvoj. Rozhodněte, zda jsou zvolená čísla čísly desetinnými.

25. Zapište zlomek, který reprezentuje racionální číslo
   a) 3,56 b) $1,\overline{43}$ c) $0,2\overline{7}$ d) $0,1\overline{9}$

Součástí písemné části zkoušky jsou definice pojmů studovaných v předmětech:
Základy algebry a aritmetiky a **Aritmetika 1**