

Induktivní a deduktivní metody v matematice

Slovník školské matematiky uvádí:

Indukce (str. 67) – přechod od výroků o několika předmětech daného druhu k výroku o všech předmětech tohoto druhu. Taková indukce se považuje a úplnou, jestliže východiskem úvahy byly výroky o všech jednotlivých předmětech uvažovaného druhu. V ostatních případech hovoříme o neúplné indukci. Ta vede jen k hypotézám.

Matematická indukce (str. 98) – postup, který se užívá k důkazům určitých typů matematických vět a výrazů. Zakládá se na IV. Peanově axiomu přirozených čísel.

Dedukce (str. 28) – v širším smyslu vyvozování nových poznatků z daných, a to pomocí pravidel formální logiky pro úsudky a důkazy. V užším smyslu se v tradiční logice chápala dedukce jako vyvozování výroků o jednotlivých předmětech z dané třídy na základě známých vět o všech objektech dané třídy.

Slovník cizích slov

Indukce – jeden z typů úsudků a metoda zkoumání, kdy se na základě pozorování jednotlivých případů vyvozují všeobecné závěry. Postup od zvláštního k obecnému.

Dedukce – logické vyvození, způsob logického myšlení postupujícího od obecného pravidla k jednotlivému. Úsudek, ve kterém nová myšlenka logicky vyplývá z jistých tezí vystupujících v roli obecného pravidla platného pro všechny jevy dané třídy.

Slovník

Indukce (s. 932) – typ úsudků a metoda zkoumání, při níž se z jedinečných výroků usuzuje na obecný závěr. Úplná indukce enumerativní: úsudek, v němž obecný závěr plyne z premis shrnujících všechny jednotlivé případy, závěr je jistý. Neúplní indukce enumerativní: úsudek, v němž se vyvozuje obecný závěr z premis shrnujících některé jednotlivé případy, závěr je pouze pravděpodobný, je potvrzován premisami jen do určité míry.

Dedukce (s. 458) – typ úsudku a metoda zkoumání, při níž se z premis použitím určitých pravidel dospívá k novému tvrzení, tzv. závěru, důsledku. Je přechodem od obecného ke zvláštnímu.

Deduktivní metoda – způsob výstavby vědecké teorie založený pouze na dedukci. Uplatňuje se zpravidla v těch případech, kdy byl nahromaděn a teoreticky vyložen empirický materiál, který chceme uvést v systém, abychom mohli odvodit všechny důsledky plynoucí z přijatých předpokladů. Takto vybudovaná vědecká teorie je vědecká deduktivní soustava. Různé pokusy vést ostrou hranici mezi deduktivní metodou a induktivní se nezdařily, neboť obě metody jsou ve skutečnosti vnitřně spjaté.

Uplatňování indukce a dedukce souvisí s pozorováním, zkoumáním zákonitostí, zobecňováním.

V následujících příkladech vycházejte vždy z induktivních postupů, tj. ověřujte platnost uvedených vět pro několik přirozených čísel, všimněte si zákonitostí a snažte se formulovat příslušné věty. Věty pak dokažte.

Př. 1. Sčítání přirozených čísel – sčítejte postupně přirozená čísla a sledujte, jak se dá vyjádřit jejich součet:

$$1 + 2 = 3 \qquad 3 = \frac{2 \cdot 3}{2}$$

$$1 + 2 + 3 = 6 \qquad 6 = \frac{3 \cdot 4}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 \qquad 10 = \frac{4.5}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \qquad 15 = \frac{5.6}{2}$$

atd.

Úvaha – čemu je roven součet n přirozených čísel

Formulujeme větu :

Pro součet n přirozených čísel platí:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dokážeme snadno matematickou indukcí.

Př. 2. Sleduje součet několika lichých přirozených čísel:

$$1 + 3 = 4 \qquad 2 \cdot 2 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9 \qquad 3 \cdot 3 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 \qquad 4 \cdot 4 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 \qquad 5 \cdot 5 = 25$$

atd.

Formulujeme větu, kterou dokážeme matematickou indukcí:

Pro součet n lichých přirozených čísel platí:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = n^2$$

Př. 3. Sledujte součet sudých přirozených čísel a všimněte si, jak se dá vyjádřit:

$$2 + 4 = 6 \qquad 6 = 2 \cdot 3$$

$$2 + 4 + 6 = 12 \qquad 12 = 3 \cdot 4$$

$$2 + 4 + 6 + 8 = 20 \qquad 20 = 4 \cdot 5$$

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30 \qquad 30 = 5 \cdot 6$$

Formulujeme větu:

Pro součet n sudých přirozených čísel platí:

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

Př. 4. Součet všech přirozených čísel od 1 do 100

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5\,050$$

Př. 5. Součet všech lichých čísel od 1 do 100

$$1 + 3 + 5 + \dots + 99 = 2\,500$$

Př. 6. Součet všech sudých přirozených čísel od 2 do 100

$$2 + 4 + 6 + \dots + 100 = 2\,550$$

Př. 7. Součin dvou sobě rovných činitelů – sledujeme číslo zapsané na místě jednotek

$$0 \cdot 0 = 0 \qquad 1 \cdot 1 = 1 \qquad 2 \cdot 2 = 4 \qquad 3 \cdot 3 = 9 \qquad 4 \cdot 4 = 16 \qquad 5 \cdot 5 = 25$$

$$6 \cdot 6 = 36 \qquad 7 \cdot 7 = 49 \qquad 8 \cdot 8 = 64 \qquad 9 \cdot 9 = 81 \qquad 10 \cdot 10 = 100$$

kdybychom v násobení sobě rovných činitelů pokračovali dále, zjistíme, že na místě jednotek jsou zapsána čísla:

0 1 4 9 6 5 6 9 4 1 0

Př. 8. Dokažte, že druhá mocnina přirozeného čísla nemá na místě jednotek zapsáno číslo 2 nebo 3.

Př. 9. Pozorujte součin čtyř po sobě jdoucích přirozených čísel a sledujte, jak se dá vyjádřit:

$$\begin{array}{lll} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 & 6^2 - 2 \cdot 6 = 24 & 5^2 - 1 = 24 \\ 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 & 12^2 - 2 \cdot 12 = 120 & 11^2 - 1 = 120 \\ 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360 & 20^2 - 2 \cdot 20 = 360 & 19^2 - 1 = 360 \\ \text{atd.} & & \end{array}$$

Př. 10. Vynásobte vždy dvě po sobě jdoucí přirozená čísla a tento součin vynásobte čtyřmi. Všimněte si, jak se dá tento součin vyjádřit:

$$\begin{array}{ll} 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24 & 5^2 - 1 = 24 \\ 4 \cdot 3 \cdot 4 = 48 & 7^2 - 1 = 48 \\ 4 \cdot 4 \cdot 5 = 80 & 9^2 - 1 = 80 \\ 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 & 11^2 - 1 = 120 \\ \text{atd.} & \end{array}$$

Formulujeme větu:

Pro každé přirozené číslo n platí: $4n(n+1) = (2n+1)^2 - 1$

Př. 11. Vyjádřete obecně, kolik úhlopříček má konvexní n -úhelník.

Např.: Čtverec ...2, pětiúhelník 5, šestiúhelník 15, sedmiúhelník 21, atd.

Dokažte, že počet úhlopříček konvexního n -úhelníku je $\frac{n(n-1)}{2}$.

Př. 12. Vyjádřete obecně, jaký je součet vnitřních úhlů konvexního n -úhelníku:

Např. Trojúhelník 180° , čtyřúhelník 360° , pětiúhelník 540° , šestiúhelník 720° , atd.

Vyslovte větu, která vyjadřuje součet vnitřních úhlů konvexního n -úhelníku a dokažte ji.

Př. 13. Vyberte si libovolné prvočíslo, a sledujte následující výrazy:

$$\begin{array}{ll} 5 \cdot 5 - 1 = 24 & 24 = 1 \cdot 24 \\ 7 \cdot 7 - 1 = 48 & 48 = 2 \cdot 24 \\ 11 \cdot 11 - 1 = 120 & 120 = 5 \cdot 24 \\ \text{atd.} & \end{array}$$

Formulujeme větu:

Nechť p je prvočíslo větší než 3. Pak $p^2 - 1$ je vždy dělitelné číslem 24.

Př. 14. Pozorujte následující výrazy:

$$\begin{array}{ll} 2 \cdot 5 \cdot 5 + 1 = 51 & 51 = 3 \cdot 17 \\ 2 \cdot 7 \cdot 7 + 1 = 99 & 99 = 3 \cdot 33 \\ 2 \cdot 11 \cdot 11 + 1 = 243 & 243 = 3 \cdot 81 \\ \text{atd.} & \end{array}$$

Formulujeme větu:

Nechť p je prvočíslo větší než 3. Pak $2p^2 + 1$ je vždy dělitelné třemi.

Př. 15. Všimněte si následujících výrazů:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 + 5 = 32 \qquad 32 = 4 \cdot 8$$

$$3 \cdot 5 \cdot 5 + 5 = 80$$

$$80 = 4 \cdot 20$$

$$3 \cdot 7 \cdot 7 + 5 = 152$$

$$152 = 4 \cdot 38$$

atd.

Formulujeme větu:

Nechť p je prvočíslo větší nebo rovno číslu 3. Pak $3p^2 + 5$ je vždy dělitelné čtyřmi.