! URČOVÁNÍ JEDNOTEK FYZIKÁLNÍCH VELIČIN

Př.: Určete jednotky veličiny r nazývané refrakce, víte-li, že se spočítá podle vztahu $r = \frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{1}{\varrho}$.
ϱ je hustota, kterou jste dosadili v jednotkách $g\,cm^{-3}$, n je index lomu.

Pravidla: !!

1) ~~Funkce~~ výrazy $\log x$, $\ln x$, 10^x, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{cotg}\, x$ jsou definovány pouze pro bezrozměrná čísla (goniometrické funkce i pro úhlové stupně). Argument i hodnota těchto funkcí jsou bezrozměrná čísla. Píšeme $[\log x] = 1$, ...

2) Pokud se ve fyzikálním vzorci vyskytuje číslo (a ne symbol pro konstantu), je toto číslo bezrozměrné.

3) Hodnoty sčítaných nebo odečítaných veličin musejí být ve stejných jednotkách. Výsledek má stejné jednotky jako sčítané (odečítané) veličiny.

4) Jednotky dané veličiny zjišťujeme následovně: Místo symbolů fyzikálních veličin dosadíme do vzorce jejich jednotky (podle bodů 1-3). Symbol veličiny, jejíž jednotky chceme zjistit, napíšeme do hranaté závorky.
Běžnými matemat. úpravami (násobení, dělení) vyjádříme, čemu se rovná hodnota v hranaté závorce. Výsledek jsou hledané jednotky.

Př.: $r = \frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{1}{\varrho}$ $\qquad [\varrho] = g \cdot cm^{-3}$

$[n^2] = 1$ (bezrozměrné číslo, neboť ve vzorci je odčítání bezrozměrného čísla).

$[n^2-1] = 1$ výsledek odčítání bezrozměrných čísel

$[n^2+2] = 1$ výsledek sčítání -"- -"-

$[r] = \frac{[n^2-1]}{[n^2+2]} \cdot \frac{1}{[\varrho]}$ / dosadíme

$[r] = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{g \cdot cm^{-3}}$

$[r] = \frac{1}{g \cdot cm^{-3}} = \underline{\underline{g^{-1} cm^3}}$

Př.: Určete jednotky veličiny G, platí-li: $G = -RT \ln K$

Řešení: $[T] = K$

$[R] = J K^{-1} mol^{-1}$ (molární plynová konstanta)

$[G] = [-1] \cdot [R] \cdot [T] \cdot [\ln K]$

$[G] = 1 \cdot J K^{-1} mol^{-1} \cdot K \cdot 1$

$[G] = \underline{\underline{J mol^{-1}}}$

Př.: Při stanovování viskozity kapalin η Hopplerovým viskozimetrem počítáme konstantu K ze vztahu

$s = \eta \cdot K \cdot (\varrho_2 - \varrho_1)$. Určete jednotky veličiny K, víte-li: s ... čas $[s] = s$

η ... viskozita $[\eta] = mPa = 10^{-3} Pa$ (milipaskal)

ϱ_2 ... hustota kuličky $[\varrho_2] = kg\, m^{-3}$

ϱ_1 ... hustota vody $[\varrho_1] = kg\, m^{-3}$

$[s] = [\eta] \cdot [K] \cdot [\varrho_2 - \varrho_1]$

$s = 10^{-3} Pa \cdot [K] \cdot kg\, m^{-3}$

Pa ... není základní jednotkou SI

$Pa = [p]$

$p = \frac{F}{S} = \frac{m \cdot a}{S}$ — m ... hmotnost, a ... zrychlení, S ... plocha

$[p] = \frac{[m] \cdot [a]}{[S]}$

$[p] = \frac{kg \cdot m s^{-2}}{m^2} = kg \cdot m^{-1} s^{-2}$

$Pa = kg\, m^{-1} s^{-2}$

$s = 10^{-3} \cdot kg\, m^{-1} s^{-2} \cdot [K] \cdot kg\, m^{-3}$

$[K] = \frac{s \cdot 1}{10^{-3} kg^2 m^{-4} s^{-2}}$

$[K] = \underline{\underline{10^3 s^3 kg^{-2} m^4}}$

Př.: V jakých jednotkách máme dosadit koncentraci c do vztahu pro osmotický tlak ?

$$\Pi = RTc$$

Π... osmot. tlak

$[\Pi] = [R]\cdot[T]\cdot[c]$

$[\Pi] = Pa = kg\,m^{-1}s^{-2}$

$$[c] = \frac{[\Pi]}{[R]\cdot[T]}$$

R... molární plynová konstanta

$[R] = J K^{-1} mol^{-1}$

T... teplota

$[T] = K$

$$[c] = \frac{kg\,m^{-1}s^{-2}}{J\,\cancel{K^{-1}}\,mol^{-1}\cdot\cancel{K}}$$

J... není základní jednotkou SI

$J = [w]$

w... práce

$w = F\cdot s = m\cdot a\cdot s$

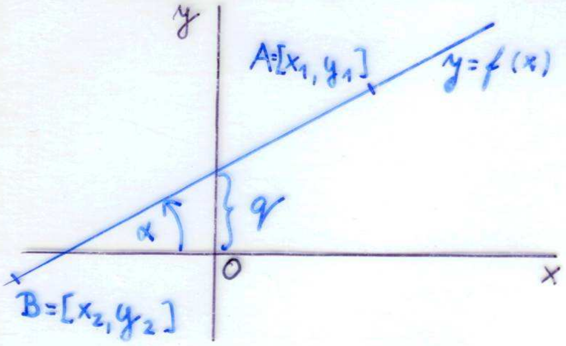
$[w] = kg\cdot m\,s^{-2}\cdot m = kg\,m^2s^{-2}$

$J = kg\,m^2s^{-2}$

$$[c] = \frac{kg\,m^{-1}s^{-2}}{kg\,m^2s^{-2}\cdot mol^{-1}} = \underline{\underline{mol\,m^{-3}}}$$

[! Tedy ne $mol\,l^{-1}$]

PŘÍMKA, LINEÁRNÍ REGRESE, LINEARIZACE



Rovnice přímky (směrnicový tvar):

$$y = kx + q$$

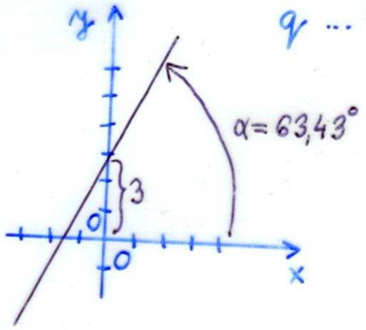
$$k = tg\,\alpha$$

k ... směrnice přímky
q ... velikost úseku na ose y

Př.: $y = 2x + 3$

$\Downarrow$

$k = 2$
$q = 3$

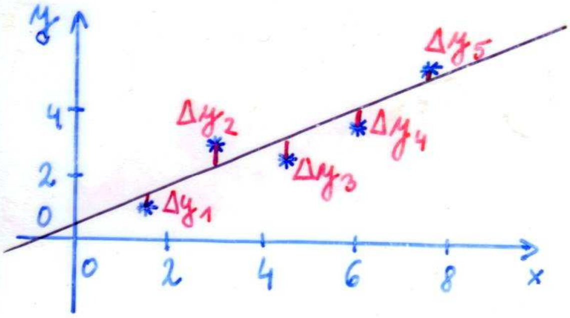


$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Lineární regrese:

Experimentálně zjištěnými body chceme „co nejlépe" proložit přímku. Jedna z metod lineární regrese je tzv.:

Metoda nejmenších čtverců:



Experimentálními body (modré) prokládá přímku (černá) tak, aby součet druhých mocnin (= čtverců) odchylek mezi y-souřadnicemi exper. bodů a odpovídajících bodů na hledané přímce (tj. Δy, červená), byl co nejmenší. Tomuto požadavku ($\sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2$ = co nejméně) vyhovuje přímka $y = kx + q$,

kde:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i - n \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$ ... regresní koeficient

$$q = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Σ ... suma (součet)

n ... počet bodů, jimiž je prokládána přímka

$[x_i, y_i]$ ... souřadnice jednotlivých bodů, jimiž je prokládána přímka.

Příklad použití MNČ: viz skripta do lab. cvič.

LINEARIZACE

= převod vyjádření určité nelineární závislosti na tvar

$$y = kx + q,$$

což je rovnice přímky.

Důvod: lineární (= přímková) závislost se zpracovává snadněji než jiné závislosti.

Postup linearizace: Obecný postup neexistuje.

Zavádíme vhodnou substituci:

původní závislost	→	linearizovaná závislost
výraz obsahující jen nezávislou proměnnou a čísla	→	x
výraz obsahující jen závislou proměnnou a čísla	→	y
výrazy obsahující jen konstanty (i neznámé)	→	k, q

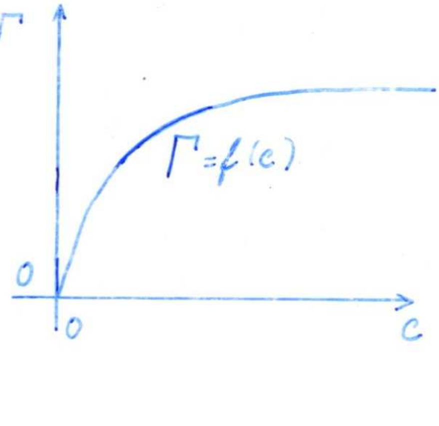
Př.: 1) původní závislost:

$$\Gamma = \frac{\Gamma_{max} \cdot \omega \cdot c}{1 + \omega \cdot c} \qquad (1)$$

c … nezávislá proměnná (koncentrace)

Γ … závislá proměnná

Γ_{max}, ω … konstanty



2) linearizace:

převrácená hodnota obou stran rovnice (1):

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{1 + \omega \cdot c}{\Gamma_{max} \cdot \omega \cdot c}$$

úpravy pravé strany:

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{\Gamma_{max} \cdot \omega \cdot c} + \frac{\cancel{\omega \cdot c}\ 1}{\Gamma_{max} \cdot \cancel{\omega \cdot c}}$$

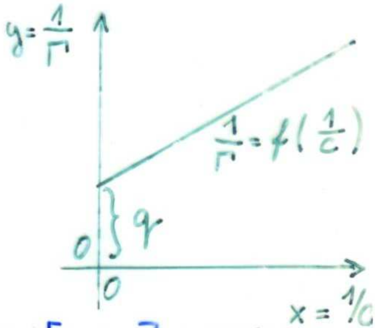
$$\underbrace{\frac{1}{\Gamma}}_{y} = \underbrace{\frac{1}{\Gamma_{max} \cdot \omega}}_{k} \cdot \underbrace{\frac{1}{c}}_{x} + \underbrace{\frac{1}{\Gamma_{max}}}_{q}$$

3) Linearizovaná závislost:

$$y = k \cdot x + q$$

Substituce: $\frac{1}{\Gamma} = y$ $\quad \frac{1}{\Gamma_{max} \omega} = k$ $\quad \frac{1}{\Gamma_{max}} = q$

$\frac{1}{c} = x$



Jsou-li dvojice $[c, \Gamma]$ a tedy i dvojice $[x, y]$ zjištěny experimentálně, lze pak po provedení linearizace zjistit hodnoty k, q například pomocí metody nejmenších čtverců a pak zpětně vypočíst Γ_{max}, ω.

Př.: Byly naměřeny dvojice $[c, \Gamma]$, které mají vyhovovat tzv. Langmuirově izotermě: $\Gamma = \frac{\Gamma_{max} \cdot \omega \cdot c}{1 + \omega \cdot c}$.

Určete hodnoty konstant Γ_{max}, ω. Linearizace viz výše.

c	Γ	$x = \frac{1}{c}$	$y = \frac{1}{\Gamma}$
0,001	48	1000	0,0208
0,002	95	500	0,0105
0,005	220	200	0,00455
0,01	300	100	0,00333
0,05	700	20	0,00143
0,1	850	10	0,00118

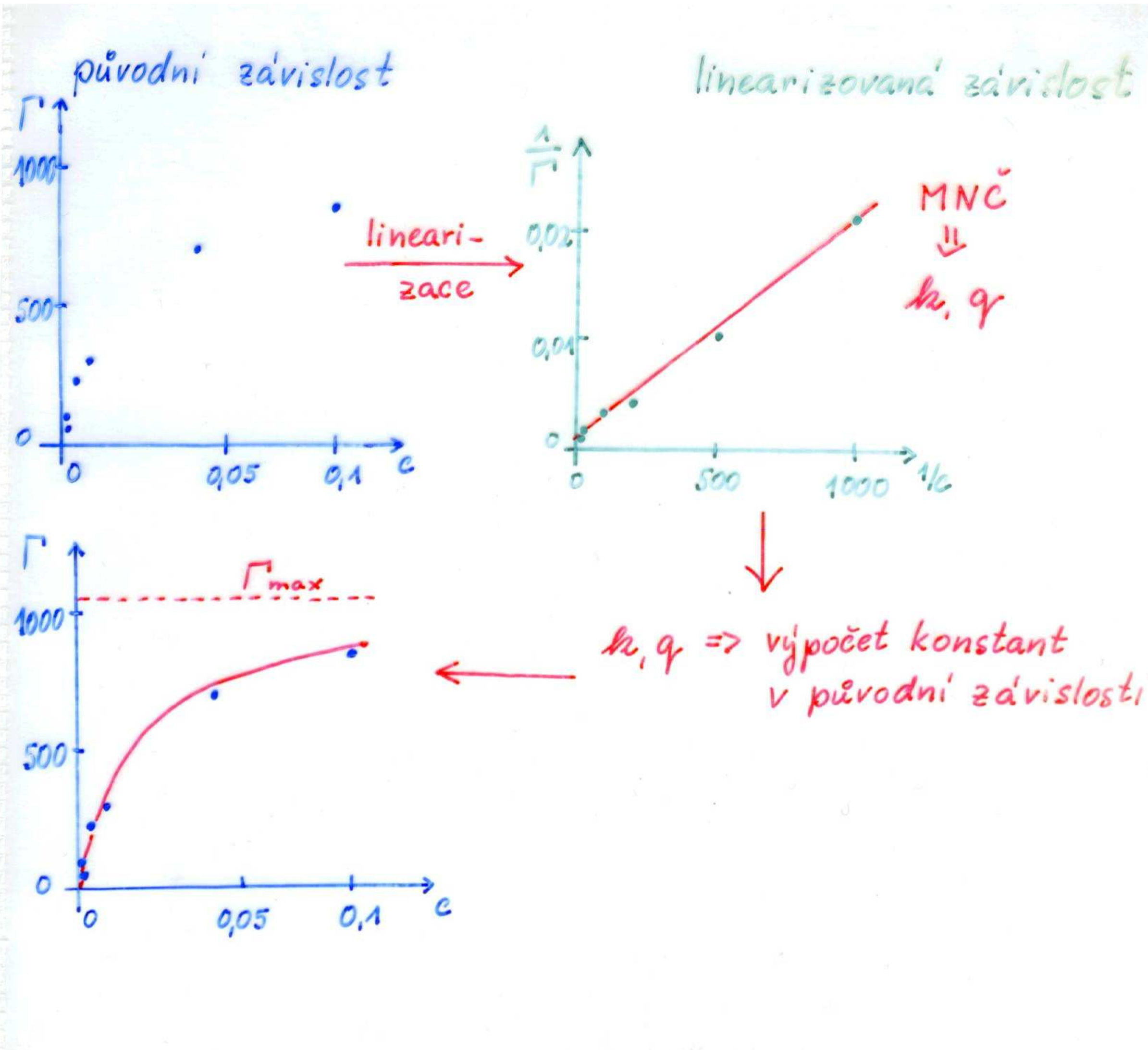
z metody nejmenších čtverců: $\frac{1}{\Gamma_{max} \omega} = k$

$k = 1{,}98 \cdot 10^{-5} \Rightarrow \underline{\underline{\omega \doteq 48}}$

$\Uparrow$

$q = 9{,}47 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \underline{\underline{\Gamma_{max} \doteq 1050}}$

$1/\Gamma_{max} = q$


původní závislost
linearizovaná závislost
lineari-
zace
MNČ
k, q
Γ
1000
500
0
0,05
0,1
c
1/Γ
0,02
0,01
500
1000
1/c
Γmax
k, q => výpočet konstant
v původní závislosti

VEKTORY

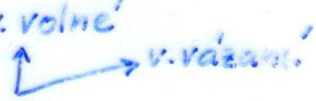
Fyzikální veličiny:

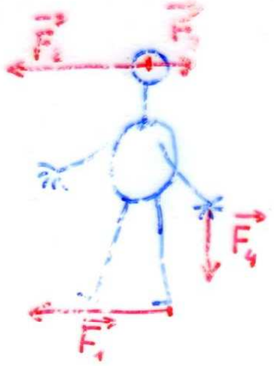
- skaláry ... jednoznačně určeny svou velikostí

$m = 5\ kg$

$S = 5\ m^2$

- vektory ... určeny
  - velikostí
  - (- působištěm)
  - směrem
  - orientací



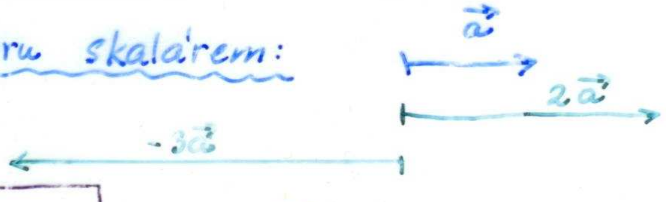


$\vec{F}$ ... vektor

$\left.\begin{matrix}|\vec{F}| \\ F\end{matrix}\right\}$ ... velikost vektoru

Matematické operace s vektory

1) Násobení vektoru skalárem:



Př.: $\boxed{\vec{G} = m \cdot \vec{g}}$

$\vec{G}$ ... tíhová síla

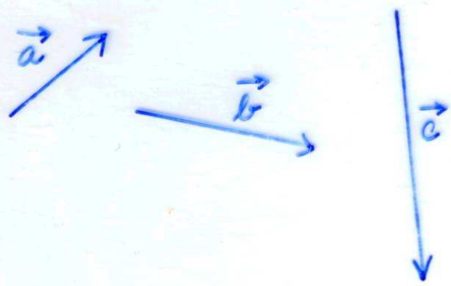
m ... hmotnost

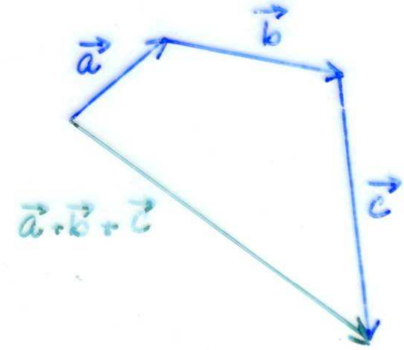
$\vec{g}$ ... tíhové zrychlení

$\boxed{5\ kg}$ $\vec{g} = 9{,}81\ m \cdot s^{-2}$

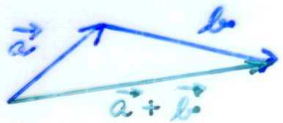
$\vec{G} = 5 \cdot 9{,}81 \underbrace{kg \cdot m \cdot s^{-2}}_{N} = \underline{\underline{49{,}05\ N}}$

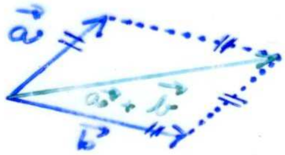
2) Sčítání vektorů:





Pozn.: 2 vektory lze sečíst i pomocí tzv. vektorového rovnoběžníka:





3) Odečítání vektorů:

$$\vec a - \vec b = \underbrace{\vec a + \underbrace{(-1)\cdot \vec b}_{\text{skalár.vektor}}}_{\text{součet vektorů}}$$

4) Skalární součin dvou vektorů (výsledkem je skalár)

Skalárním součinem dvou vektorů se nazývá součin jejich velikostí násobený kosinem úhlu jimi sevřeného:

$$\boxed{\vec a \cdot \vec b = a \cdot b \cdot \cos\varphi}$$

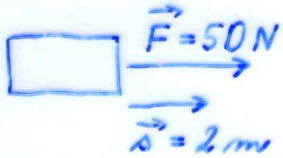
$\vec a \cdot \vec b = \vec b \cdot \vec a$

$a \parallel b \Rightarrow \varphi = 0° \Rightarrow \vec a \cdot \vec b = a \cdot b$

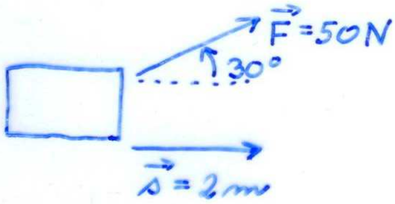
$a \perp b \Rightarrow \varphi = 90° \Rightarrow \vec a \cdot \vec b = 0$

Př.: $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$

A ... práce (skalár)
$\vec{F}$ ... síla (vektor)
$\vec{s}$ ... dráha (vektor)

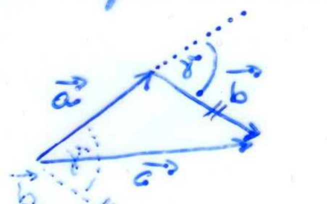


$A = 50 \cdot 2 \cdot \underbrace{\cos 0^\circ}_{1} = \underline{\underline{100\ J}}$



$A = 50 \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ = \underline{\underline{86{,}6\ J}}$

Využití skalárního součinu k výpočtu úhlů nebo stran v trojúhelníku (→ délky vazeb, vazebné úhly, ...)



$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ / povýšíme ^{2}

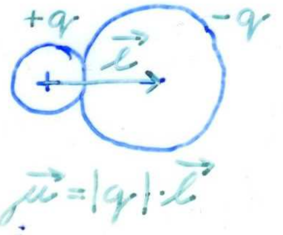
$\vec{c}^{\,2} = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$

$\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a} = a \cdot a \cdot \underbrace{\cos 0^\circ}_{1}$

$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}$

$\underline{\underline{\vec{a}^{\,2} = a^2}}$

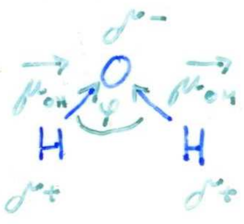
Př.: Dipólový moment vody je $6{,}13 \cdot 10^{-30}$ Cm. Vypočtěte velikost úhlu H-O-H v molekule vody, víte-li, že dipólový moment skupiny OH je $5{,}04 \cdot 10^{-30}$ Cm.

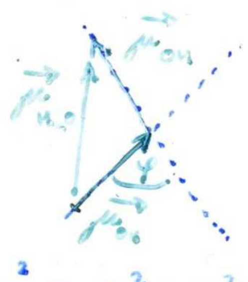


$\vec{\mu} = |q| \cdot \vec{l}$

⋮

Dipólový moment





$\mu_{H_2O}^2 = \mu_{OH}^2 + \mu_{OH}^2 + 2\mu_{OH}^2 \cos\varphi$

$\mu_{H_2O}^2 = 2\mu_{OH}^2 (1 + \cos$

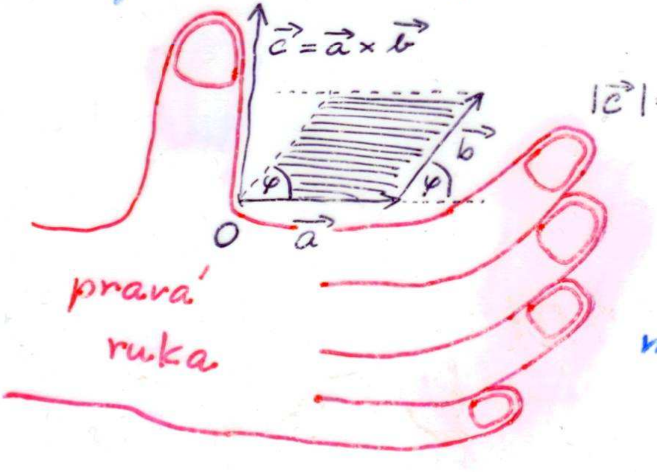
$$(6,13\cdot 10^{-30})^2 = 2\cdot(5,04\cdot 10^{-30})^2\,(1+\cos\varphi)$$

$$\frac{6,13^2\cdot\cancel{(10^{-30})^2}}{2\cdot(5,04)^2\cdot\cancel{(10^{-30})^2}} - 1 = \cos\varphi$$

$$\frac{6,13^2}{2\cdot 5,04^2} - 1 = \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = 105,09^\circ$$

5) Vektorový součin dvou vektorů $\vec{a}, \vec{b}$ je třetí vektor $\vec{c}$, který:

1, Má velikost rovnou obsahu rovnoběžníka sestrojeného z vektorů $\vec{a}, \vec{b}$
2, Je kolmý k rovině rovnoběžníka
3, Vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tvoří pravotočivou soustavu.

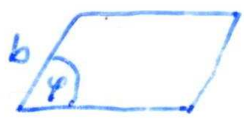


$$|\vec{c}| = |\vec{a}\times\vec{b}| = a\cdot b\cdot \sin\varphi$$

Př: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

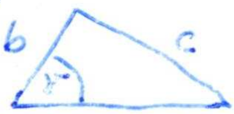
moment síly … rameno síly … síla

Pozn. 1: Obsah rovnoběžníka:



$S = a\cdot b\cdot \sin\varphi$

Pozn. 2: Obsah trojúhelníka:



$S = \frac{1}{2}\,a\cdot b\cdot \sin\gamma$

ÚVOD DO MATEMATICKÉ ANALÝZY

Intervaly, funkce: kap. V/1, př. 673 - 700.

Limita funkce: Nechť je funkce definována v okolí bodu $\underline{a}$. Pak:

$\lim\limits_{x \to a-} f(x) = b$ ... limita zleva funkce $f(x)$ v bodě a

$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = b$ ... -"- zprava -"-

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ ... limita funkce $f(x)$ v bodě $\underline{a}$ (oboustranná)

Limita: - vlastní ... b je reálné číslo
- nevlastní ... -"- $+\infty$ nebo $-\infty$.

Vlastnosti limit (ve vzorcích vynecháno „pro $x \to a$").

1) Limita konstanty je rovna této konstantě.

2) $\lim (u + v) = \lim u + \lim v$ } pokud $\lim u$

3) $\lim (u \cdot v) = \lim u \cdot \lim v$ } a $\lim v$ existují

4) $\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}$, pokud $\lim u$ a $\lim v$ existují a $\lim v \neq 0$.

Př.: 711:

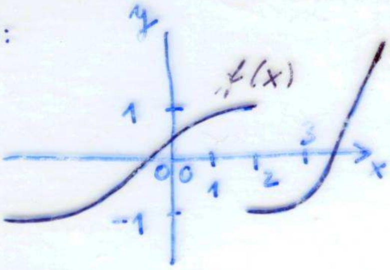
$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x+4}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\cancel{3x}^{1}}{\cancel{x}_{1}} + \frac{4}{x} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(3 + \frac{4}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} 3 + \lim_{x \to \infty} \frac{4}{x} = \underbrace{\lim_{x \to \infty} 3}_{3} + \underbrace{\lim_{x \to \infty} 4}_{4} \cdot \underbrace{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}}_{0} = \underline{\underline{3}}$$

716: $$\lim_{x \to 2+} \frac{3}{x-2} = \underbrace{\lim_{x \to 2+} 3}_{3} \cdot \underbrace{\lim_{x \to 2+} \frac{1}{(x-2)}}_{\text{viz tabulka}} = +\infty$$

x	$\frac{1}{x-2}$
3	1
2,5	2
2,1	10
2,01	100
2,001	1000

Př.:



$\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = -1$

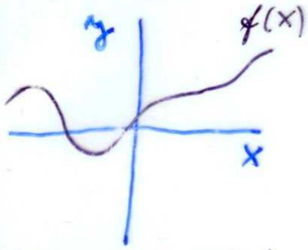
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0{,}4$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

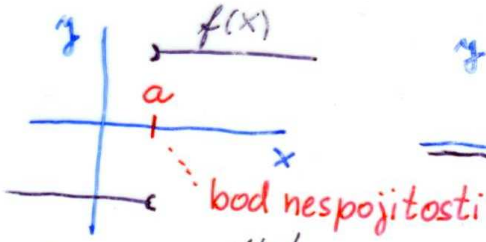
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1{,}2$

Projít si: 711 - 713, 716 - 718 (1-5), 726, 727, 734 (1), 735 - 737, 746 - 750, 753 - 755, 757

Spojitost funkce: přesná definice viz str. 91

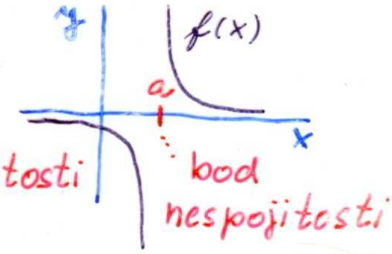


f-ce spojitá



f-ce nespojitá

$\lim\limits_{x \to a-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a+} f(x)$



f-ce nespojitá

Alespoň jedna z limit $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ je nevlastní.

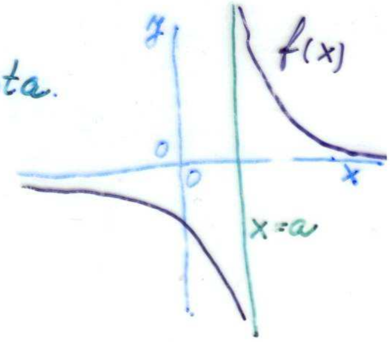
Projít si: 814, 815; 823, 825 (1, 4, 5).

Hledáme-li u běžných funkcí body nespojitosti, probereme nejprve okraje definičního oboru. Např. f-ce $y = \frac{5x}{x+7}$ bude zřejmě nespojitá v bodě $x = -7$.

Asymptoty (projít si: 827-830, 834, 835)

Asymptotou křivky se nazývá přímka, k níž se neomezeně blíží bod křivky, který se po křivce vzdaluje do nekonečna.

1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = a$ je **asymptota**.



2) Nechť

$$y = f(x) = \underbrace{kx + q}_{\text{lineární část}} + \alpha(x).$$

Jestliže $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = \emptyset$ nebo $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha(x) = \emptyset$, pak

přímka $y = kx + q$ je asymptota křivky.

Př. 828: ① $y = \dfrac{x^2 + 1}{x} = \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = \emptyset$

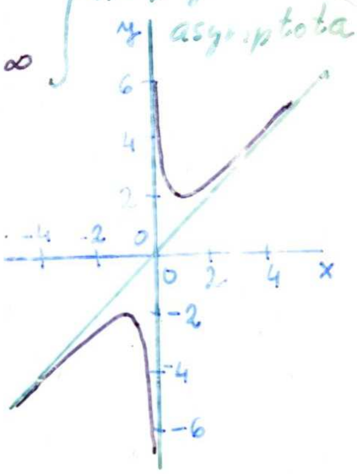
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = \emptyset$

1) asymptota: $y = x$.

2) $\lim\limits_{x \to \emptyset+} \dfrac{x^2+1}{x} = \underbrace{\lim\limits_{x \to 0^+} x}_{\emptyset} + \underbrace{\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x}}_{+\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to \emptyset-} \dfrac{x^2+1}{x} = \underbrace{\lim\limits_{x \to 0^-} x}_{\emptyset} + \underbrace{\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x}}_{-\infty} = -\infty$

} $x = \emptyset$ je asymptota



Př. 828 ② $y = \dfrac{x^2}{x+1}$

1) $\lim\limits_{x \to -1-} \dfrac{x^2}{x+1} = -\infty$ … asymp. $\underline{x = -1}$

2) $x^2 : (x+1) = \underbrace{x - 1 + \dfrac{1}{x+1}}_{\text{asymp. } y = x - 1}$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+1} = \emptyset$

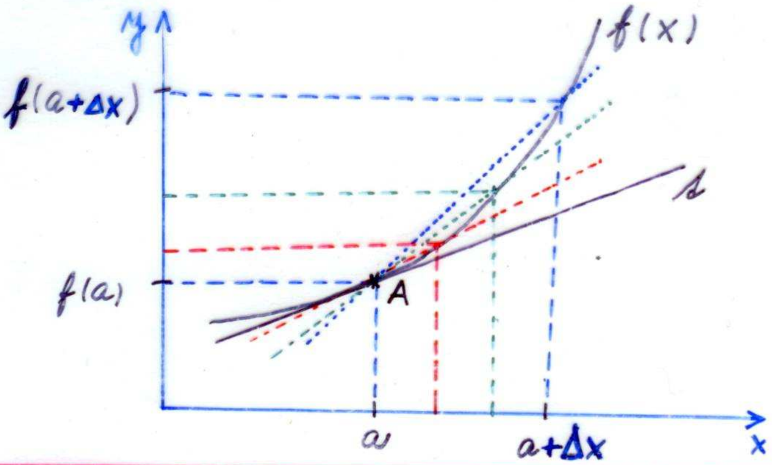
$-(x^2 + x)$

$0 - x$

$-(-x - 1)$

DERIVACE A DIFERENCIÁL (kap. VI)

Derivace funkce $y = f(x)$ v bodě $x = a$ je rovna směrnici tečny ke křivce $y = f(x)$ v bodě $x = a$.



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x) = y'$$

dx ... diferenciál x

dy ... diferenciál y

$\frac{dy}{dx}$ ... derivace y podle x

Hledání derivace se nazývá <u>derivování funkce</u>.

<u>Základní vzorce pro derivování</u>: kap. VI / 1 / 2°,
VI / 2,
VI / 15.

Projít si příklady: 849 - 856, 859(1), 861 - 864, 866 - 870, 937 - 939, 954(1), 905, 948, 906 - jen tečna, 874 - 877.

Př. 905: $y = x^2$ ... najdìte tečnu v bodě $x = 2$ ... $T = [2, ?]$, $y = x^2 = 2^2 = 4$ $\Big\}$ $T = [2, 4]$

$y' = \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow y'_{x=2} = 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow$ Rovnice tečny: $y = 4x + q$

$T = [2, 4] \Rightarrow 4 = 4 \cdot 2 + q$

rovnice tečny: $y = 4x - 4$

Základní pravidla pro výpočet derivací

Funkce y	Derivace y podle x $\frac{dy}{dx}$
c (c = konst.)	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{cotg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Výpočet derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

Uvažujme funkce $y = f_1(x)$ a $z = f_2(x)$.

Pak platí:

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{d(y+z)}{dx} &= \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}\\
\frac{d(y-z)}{dx} &= \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx}\\
\frac{d(y\cdot z)}{dx} &= \frac{dy}{dx}\cdot z + y\cdot\frac{dz}{dx}\\
\frac{d\left(\frac{y}{z}\right)}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dx}\cdot z - y\cdot\frac{dz}{dx}}{z^2}
\end{aligned}}$$

Pozn.: Je-li $a = \text{konst.}$, platí:

- $\dfrac{d(a+y)}{dx} = \dfrac{dy}{dx}$
- $\dfrac{d(a-y)}{dx} = -\dfrac{dy}{dx}$
- $\dfrac{d(a\cdot y)}{dx} = a\cdot\dfrac{dy}{dx}$

Výpočet diferenciálů funkcí jedné proměnné (kap. VI/11)

$$\boxed{dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot dx}$$

Diferenciál y je přímo úměrný diferenciálu x. Konstantou úměrnosti je derivace y podle x.

Př.: $y = x^3$

$dy = 3x^2 dx$

$y = a$, $a = \text{konst.}$

$dy = \left(\frac{da}{dx}\right)\cdot dx = 0\cdot dx = 0$

$\boxed{\text{Diferenciál konstanty je } 0.}$

Projít si: 1064 – 1066, 1067, 1068 (2, 3), 1071, 1072, 1074, 1077.

Derivace vyšších řádů (str. 106) D4

Př.: Vypočtěte čtvrtou derivaci funkce $y = x^{10}$.

Řešení: Derivace počítáme postupně:

1. derivace (derivace 1. řádu)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{10}) = \underline{\underline{10x^9}}$$

2. derivace (derivace 2. řádu)

Derivujeme výsledek 1. derivování:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(10x^9) = \underline{\underline{90x^8}}$$

Čteme: „dé druhé y podle dé x druhé"

3. derivace (derivace 3. řádu)

Derivujeme výsledek 2. derivování

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}(90x^8) = \underline{\underline{720x^7}}$$

„dé třetí y podle dé x třetí"

4. derivace (derivace 4. řádu)

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}(720x^7) = \underline{\underline{5040x^6}}$$

Projít si: 1021, 1022

Derivace složené funkce

Nechť $y = f(z)$ (vnější složka) a $z = g(x)$ (vnitřní složka). Definujme složenou funkci $y = f(g(x))$. Derivace složené funkce se počítá podle vztahu:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}}$$

Př.: Vypočtěte 1. derivaci fce $y = \sin(x^3)$.

Řešení: Vnitřní funkce: $z = x^3$

Vnější funkce: $y = \sin z$

dosadíme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin z)}{dz} \cdot \frac{dx^3}{dx} = \cos z \cdot 3x^2 = \underline{\underline{3x^2 \cos x^3}}$$

Parciální derivace (kap. XI/2)

Mějme funkci více proměnných, např. $f = f(x, y, z)$.
Definujme parciální derivaci funkce f podle x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

Tu vypočteme podle obvyklých pravidel pro derivování tak, že všechny ostatní proměnné kromě x při derivování pokládáme za konstanty.
V chemii bývá zvykem do závorky za derivaci připsat symboly proměnných, které se při výpočtu mají pokládat za konstanty, tedy:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}$$

Funkce $f = f(x, y, z)$ má tři parciální derivace prvního řádu:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}$$

Př: $f = 5x^2y^3 + 2z$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} = 5y^3 \cdot 2x + 0 = 10y^3x$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} = 5x^2 \cdot 3y^2 + 0 = 15x^2y^2$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} = 0 + 2 = 2$$

Projít si:
1858–1860, 1862, 1865–
–1867

Výpočet diferenciálů funkcí více proměnných

Uvažujme funkci $z = f(x, y)$. Pro tuto funkci definujeme vztah

$$\boxed{dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy}$$

Diferenciál označený dz nazveme totální diferenciál z.

Př.: Je dána fce $z = 2x^2 + y$. Vypočtěte totální diferenciál z.

$$\underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = 4x \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 1}$$

$$dz = 4x\,dx + dy$$

Př.: Vnitřní energie uzavřené termodynamické soustavy je funkcí entropie S a objemu V. $U = f(S, V)$.
Totální diferenciál vnitřní energie pak je

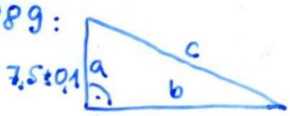
$$dU = \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V}_{T} dS + \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S}_{-p} dV$$

$$\Rightarrow \boxed{dU = T\,dS - p\,dV} \; \dots \text{ spojení 1. a 2. věty termodynamické}$$

Viz kap. XI /3.

Projít si: 1889 - 1890, 1894 - 1896.

Př.: 1889:



$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\left(\frac{\partial c}{\partial a}\right)_b = \cancel{\frac{1}{2}}(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}a = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

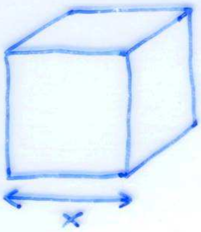
$$\left(\frac{\partial c}{\partial b}\right)_a = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$dc = \frac{7{,}5 \cdot 0{,}1 + 18 \cdot 0{,}1}{\sqrt{7{,}5^2 + 18^2}} = \underline{\underline{0{,}13\text{ cm}}} \Leftarrow dc = \frac{a \cdot da + b \cdot db}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$c = (\sqrt{7{,}5^2 + 18^2} + 0{,}13)\text{ cm}$$

Diferenciál - příklady

Př. 1071:



krychle, $x = 5\,m \pm 0{,}01\,m$.

Absolutní chyba výpočtu $V = ?$

Relativní —"— —"— ?

$$V = x^3$$

$$\frac{dV}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dV = 3x^2\,dx \qquad dx = 0{,}01\,m \quad x = 5\,m$$

$$dV = 3 \cdot 5^2 \cdot 0{,}01\ m^3$$

$$\underline{\underline{dV = 0{,}75\ m^3}} \quad \text{(absolutní chyba)}$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{0{,}75}{5^3} = 6 \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{0{,}6\,\%}} \ldots \text{ relativní chyba}$$

Př. 1077 (2):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \begin{aligned} g &= 980\ cm\,s^{-2} \\ l &= 20\ cm \\ dT &= 0{,}1\ s \\ dl &= ? \end{aligned}$$

$$\frac{dT}{dl} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\frac{d}{dl}\sqrt{l} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\frac{d}{dl}l^{\frac{1}{2}} = \frac{\cancel{2}\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot l^{-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{l \cdot g}}$$

$$\frac{dT}{dl} = \frac{\pi}{\sqrt{l \cdot g}} \Rightarrow dl = \frac{\sqrt{l \cdot g}}{\pi} \cdot dT$$

$$dl = \frac{\sqrt{20 \cdot 980}}{3{,}14} \cdot 0{,}1\ cm \doteq 4{,}46\,cm$$

Kyvadlo je nutno zkrátit o 4,46 cm.

Použití derivací

Projít: 1090–1092, 1095–1097.

1) Rychlost a zrychlení

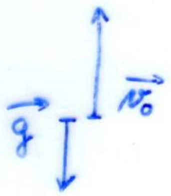
Nechť $s = f(t)$. $\quad s$ ... dráha, t ... čas

Pak

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad v \text{ ... rychlost}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \qquad a \text{ ... zrychlení}$$

Př. 1090



1) ? Závislost výšky h na čase t ?
2) –"– rychlosti v –"–
3) –"– zrychlení a –"–
4) $h_{max} = ?$ $\quad t_{max} = ?$ (nejvyšší bod)

1) $\vec{h} = \vec{h}_{v_0} + \vec{h}_g$ $\qquad$ opačná orientace $\vec{v_0}, \vec{g}$.

$$h = \vec{v_0} \cdot t + \frac{1}{2}\vec{g}\, t^2 \Rightarrow \underline{\underline{h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2}}$$

2)
$$v = \frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_0 t - \frac{1}{2} g t^2\right) = \underline{\underline{v_0 - g t}}$$

3)
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_0 - g t\right) = \underline{\underline{-g}}$$

4) Střela se zastaví a začne padat ve chvíli, kdy $v = 0$.
Nejvyššího bodu tedy dosáhne pro $v = 0$

$$v_0 - g t_{max} = 0$$

$$\underline{\underline{t_{max} = \frac{v_0}{g}}}$$

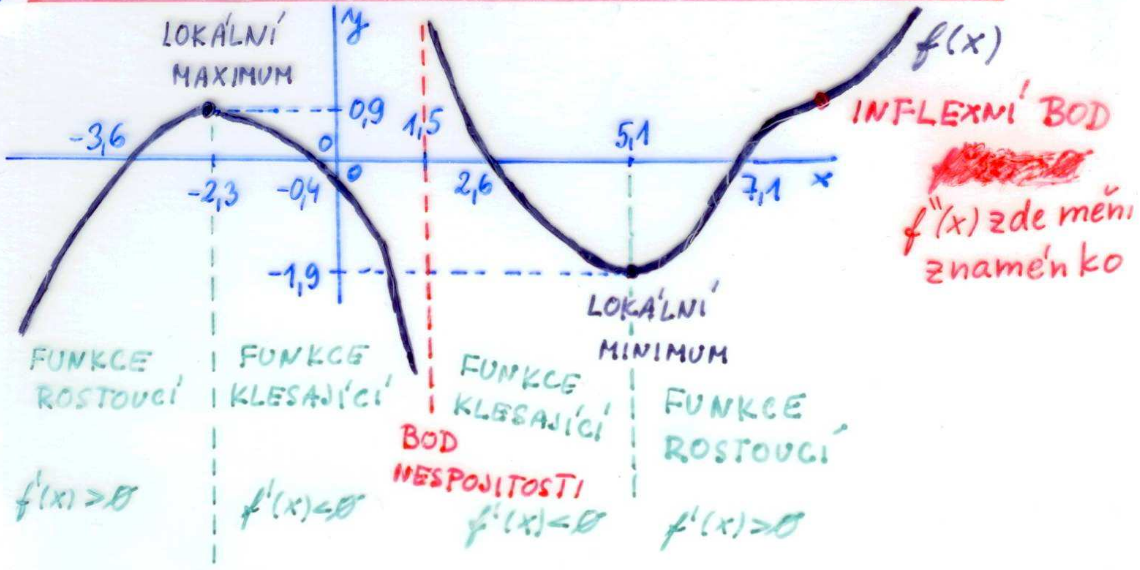
a bude přitom ve výšce

$$h_{max} = v_0 t_{max} - \frac{1}{2} g t_{max}^2$$

$$h_{max} = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right)^2$$

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

2, PRŮBĚH FUNKCÍ. MAXIMA A MINIMA FUNKCÍ (VII/4)



Vyšetření průběhu funkce $f(x)$:

1) Určíme definiční obor a body nespojitosti a asymptoty.
2) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
3) Vypočteme $f'(x)$
   Nalezneme tzv. kritické body (v nich $\overbrace{f'(x) = 0 \text{ nebo neexistuje}}^{\text{a } f(x) \text{ existuje}}$)
   Zjistíme znaménko $f'(x)$ zleva a zprava u každého krit. bodu:
   $+ \; -$ … lokální maximum
   $- \; +$ −„− minimum
   Vypočteme obě souřadnice maxim a minim.
4) Vypočteme $f''(x)$.
   Nalezneme kritické body (v nich $\overbrace{f''(x) = 0 \text{ nebo neexistuje}}^{\text{a } f(x) \text{ existuje}}$, přičemž $f(x)$ je v nich definovaná). Zjistíme znaménko zleva a zprava u každého kritického bodu:
   $\left.\begin{matrix} + \; - \\ - \; + \end{matrix}\right\}$ jedná se o inflexní bod $\quad \left.\begin{matrix} - \; - \\ + \; + \end{matrix}\right\}$ nejedná se o inflexní bod
5) Načrtneme schematický graf zadané funkce s využitím zjištěných informací o ní.

Projít si: 1158, 1160 – 1169, 1193 – 1200.
Fyzikální aplikace: 1222, 1225, 1226, 1229, 1232, 1235, 1240

Př. : 1168 : Vyšetřete průběh funkce $y = \frac{x^2-6x+13}{x-3}$

1) Def. obor:

Nesmí být $x-3=0$, tedy $x=3$.

$D(f) = (-\infty; 3) \cup (3; \infty)$

Bod nespojitosti: $x=3$

Asymptoty: $\lim_{x\to 3+} \frac{x^2-6x+13}{x-3} = \lim_{x\to 3+} \frac{9-18+13}{x-3} = \lim_{x\to 3+} \frac{4}{x-3} = +\infty$

$\lim_{x\to 3-} \frac{x^2-6x+13}{x-3} = \lim_{x\to 3-} \frac{4}{x-3} = -\infty$

=> asymptota $x=3$

$\frac{x^2-6x+13}{x-3} = (x^2-6x+13):(x-3) = x-3+\underbrace{\frac{4}{x-3}}$

$-(x^2-3x)$

$-3x+13$

$-(-3x+9)$

4

$\lim_{x\to\infty} \frac{4}{x-3} = 0$

} Asymptota $y = x-3$

2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-6x+13}{x-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}_1} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-6x+13}{x-3} = +\infty$

3) $f'(x) = \frac{(2x-6)(x-3)-(x^2-6x+13)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-6x-6x+18-x^2+6x-13}{(x-3)^2} =$

$= \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$

Kritické body: a) $f'(x)=0$ => $x^2-6x+5=0$

$x_{1,2} = \frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot 5}}{2} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$

b) $f'(x)$ neexistuje

pro $(x-3)=0$

tedy $x=3$

max. min.

$\frac{0^2-6\cdot0+5}{(0-3)^2}$		$\frac{2^2-6\cdot2+5}{(2-3)^2}$		$\frac{4^2-6\cdot4+5}{(4-3)^2}$		$\frac{100^2-6\cdot100+5}{(100-3)^2}$
$+$	1	$-$	3	$-$	5	$+$
rostoucí	↓ lokální maximum	klesající	bod nespojitosti	klesající	↓ lokální minimum	rostoucí

$$y(1)=\frac{1^2-6\cdot1+13}{1-3}=-4$$

Lok. max.: [1; −4]

$$y(5)=\frac{5^2-6\cdot5+13}{5-3}=4$$

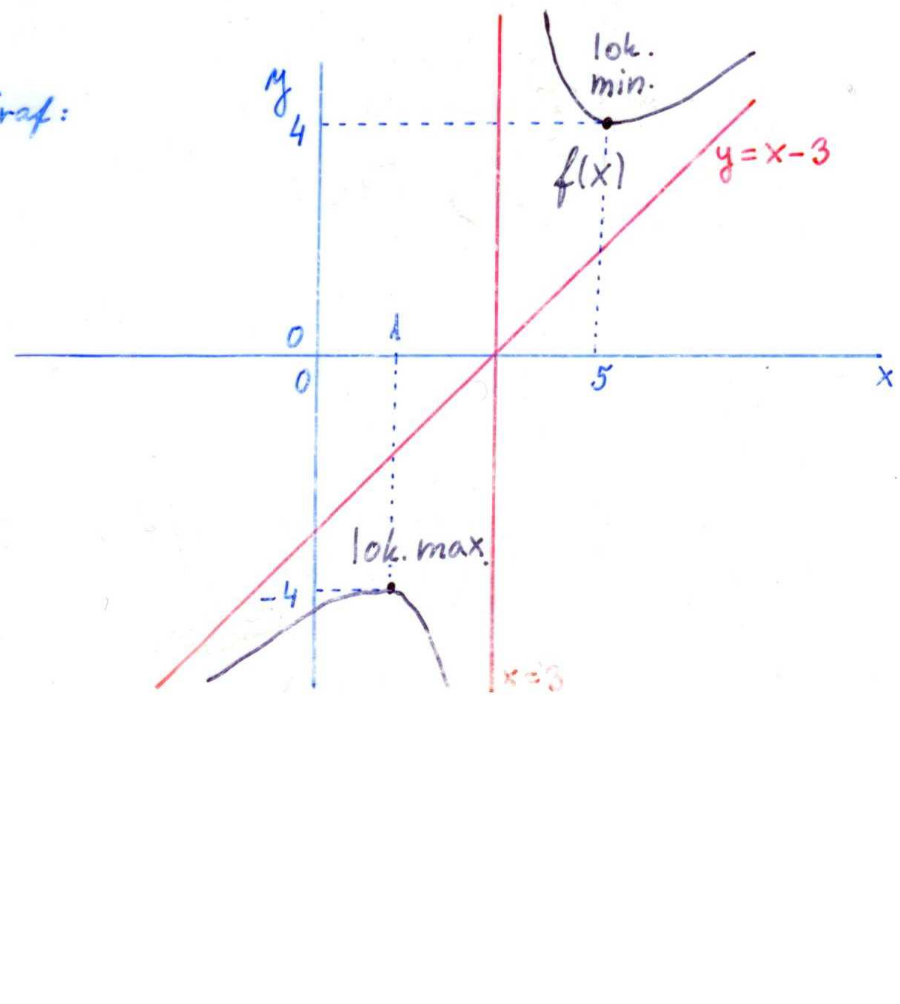
Lok. min.: [5; 4]

4) $$f''(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}\right)=\frac{(2x-6)(x-3)^{\cancel{2}\,1}-(x^2-6x+5)\cdot2\cancel{(x-3)}}{(x-3)^{\cancel{4}\,3}}=$$

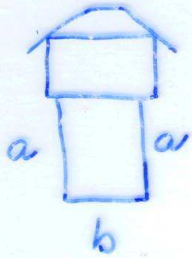
$$=\frac{2x^2-6x-6x+18-2x^2+12x-10}{(x-3)^3}=\frac{8}{(x-3)^3}\neq0$$

V bodě $x=3$ (zde neexistuje $f''(x)$) není daná funkce definována. $\Rightarrow$ Funkce $f(x)$ nemá inflexní body.

Graf:



Př. 1222:



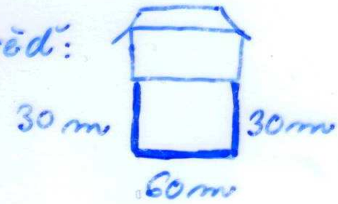
$$a + b + a = 120\,m$$
$$b = 120 - 2a$$

$$S = a \cdot b$$
$$S = a \cdot (120 - 2a) = 120a - 2a^2$$

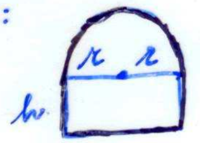
Hledáme extrém: $\frac{dS}{da} = 120 - 2 \cdot 2a = 0$ (podmínka extrému)

$$120 - 4a = 0$$
$$\underline{\underline{a = 30\,m}}$$
$$b = 120 - 2a = \underline{\underline{60\,m}}$$

Odpověď:



1229:



$l = 18\,m$

$r = ?$

$$l = \frac{\cancel{2}\pi r}{\cancel{2}} + h + 2r + h$$
$$l = \pi r + 2r + 2h$$
$$\Downarrow$$
$$h = (l - \pi r - 2r)/2$$

$$S = \frac{\pi r^2}{2} + 2r \cdot h$$
$$S = \frac{\pi r^2}{2} + \cancel{2} \cdot r \cdot \frac{l - \pi r - 2r}{\cancel{2}} = r^2\left(\frac{\pi}{2} - \pi - 2\right) + rl = rl - r^2\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)$$

Extrém: $\frac{dS}{dr} = 0$ $\qquad \frac{dS}{dr} = \frac{d}{dr}\left(rl - r^2\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)\right) = l - 2r\left(\frac{\pi}{2} + 2\right) = 0$

$$r = \frac{l}{2\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)} = \frac{l}{\pi + 4}$$

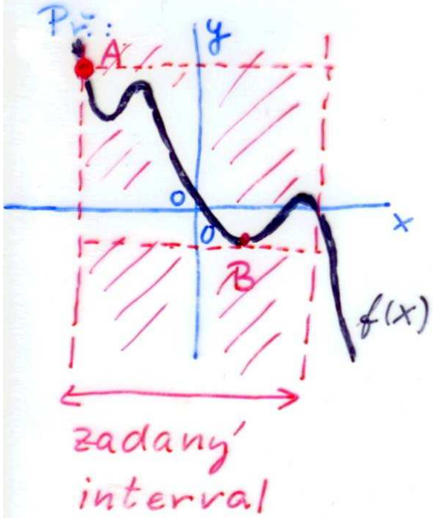
$$r = \frac{18}{\pi + 4} \doteq \underline{\underline{2{,}5}}$$

Odpověď: $\underline{\underline{r \doteq 2{,}5\,m}}$

Globální extrémy

hledáme vždy na určitém intervalu hodnot $\underline{x}$.
Hledáme je tak, že vypočteme funkční hodnoty zadané funkce na okrajích zadaného intervalu a nalezneme lokální extrémy uvnitř zadaného intervalu.
Z těchto ~~..~~ všech hodnot nalezneme
a) největší (= globální maximum)
b) nejmenší (= –"– minimum).

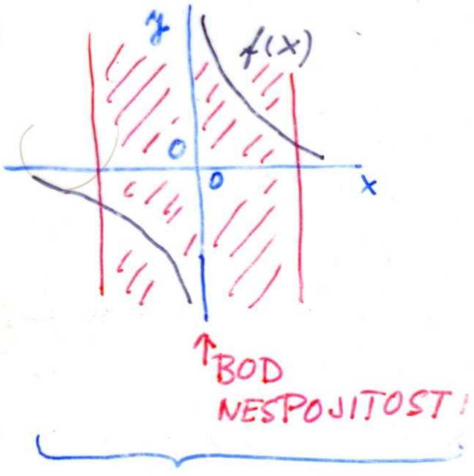
Př:



A... globální maximum
B... globální minimum

! Globální extrémy hledáme jen tehdy, spadá-li celý zadaný interval do definičního oboru dané funkce.

Př:



V tomto případě nemá smysl hledat globální extrémy.

Integrály

Až dosud jsme k funkcím hledali jejich derivace. Hledejme nyní naopak k derivaci tu funkci, z níž derivace vznikla. Řekneme, že hledáme primitivní funkci.

Př: Víme, že pro určitou funkci $y = f(x)$ platí $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$. O kterou funkci $y = f(x)$ se jedná? **Řešte pomocí tabulky derivací.**

Řešení: Víme (viz tabulka derivací), že

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}.$$ Avšak také

$$\frac{d(\ln x + k)}{dx} = \frac{1}{x},$$ kde $k =$ konst.

Hledaná primitivní funkce je tedy (každá) funkce

Najdou: $y = \ln x$

Otázka: Je řešením také $\ln x + 1$? ano

-"- $\ln x + 5$? ano

-"- $\ln x - 7$? ano

Primitivní funkce

-"- $\ln x +$ konst ? ano

neurčitý integrál

Výpočet neurčitých integrálů

1. Tabulkové integrály (k = konst.)

$$\int 0\,dx = k$$

$$\int dx = x + k$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k\,,\quad n \neq -1$$

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + k$$

$$\int e^x\,dx = e^x + k$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + k$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + k$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + k$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + k$$

↓ ústně udělat

Př: $\int x^3\,dx = \dfrac{x^{3+1}}{3+1} + k = \dfrac{x^4}{4} + k$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + k = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + k$$

2. Další pravidla pro integrování

1) Násobící konstantu lze vytknout před integrál.

$$\int 5\cdot x^2\,dx = 5\cdot\int x^2\,dx = 5\cdot\frac{x^3}{3} + k = \frac{5}{3}x^3 + k$$

2) Integrál součtu je roven součtu integrálů

$$\int (x^2 + x)\,dx = \int x^2\,dx + \int x\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + k$$

3) Integrál rozdílu je roven rozdílu integrálů:

$$\int (x^2 - x)\,dx = \int x^2\,dx - \int x\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + k$$

4) Integrál složených funkcí, kde vnitřní fce je typu $v = (ax+b)$ se vypočte podle vzorce:

$$\boxed{\int f\,\underbrace{(ax+b)}_{v}\,dx = \frac{1}{a}\int f(v)\,dv}$$

Př.: $\int e^{(2x+3)}\,dx = \left| \begin{matrix} v = 2x+3 \\ a = 2 \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int e^{v}\,dv = \frac{1}{2}e^{v} + k = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{2x+3} + k}}$

Př.: $\int \frac{1}{7x+5}\,dx = \left| \begin{matrix} v = 7x+5 \\ a = 7 \end{matrix} \right| = \frac{1}{7}\int \frac{1}{v}\,dv = \frac{1}{7}\ln v + k =$

$= \underline{\underline{\frac{1}{7}\ln(7x+5) + k}}$

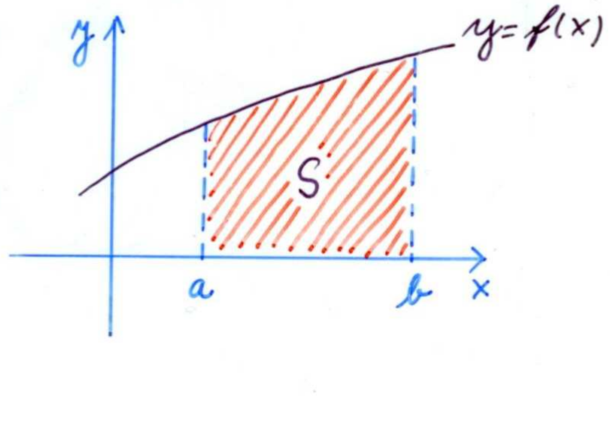
Určitý integrál U1

Číselná hodnota určitého integrálu je rovna plošnému obsahu obrazce omezeného osou x, grafem fce $y = f(x)$ a čarami $x = a$ a $x = b$.

a … dolní mez

b … horní mez

$$\boxed{S = \int_a^b y\,dx}$$



Výpočet určitého integrálu $\int_a^b y\,dx$

1. Vypočteme neurčitý integrál $\int y\,dx$
2. Do výsledku (1) dosadíme $x = b$, dostaneme číslo B
3. Do výsledku (1) dosadíme $x = a$, dostaneme číslo A
4. Určitý integrál $\int_a^b y\,dx = B - A$.
5. Integrační konstantu nemusíme uvažovat, odčítáním v (4) se zruší.

Př.: Vypočtěte určitý integrál $\int_2^{10} x^3\,dx$.

Řešení:

1. $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}$ (k nepíšeme – viz (5))
2. $B = \frac{10^4}{4}$
3. $A = \frac{2^4}{4}$
4. $\int_2^{10} x^3\,dx = \frac{10^4}{4} - \frac{2^4}{4} = 2496$

Zápis při výpočtu určitého integrálu

Př.: Vypočtěte $\int_2^{10} x^3\,dx$.

Řešení:

$$\int_2^{10} x^3\,dx = \underbrace{\left[\frac{x^4}{4}\right]_2^{10}}_{(1)} = \underbrace{\frac{10^4}{4}}_{(2)} \underbrace{-}_{(4)} \underbrace{\frac{2^4}{4}}_{(3)} = 2496$$

Aplikace určitého integrálu: chemická kinetika, termodynamika, jaderná chemie, elektřina, mechanika, ...

Diferenciální rovnice (Leibniz, 1677)

Mají obrovský význam v matematice, fyzice i chemii.
Jejich **řešením** není číslo, ale **funkce**.
Neexistuje obecný návod k jejich řešení. Řešení umíme nalézt jen v některých případech. Proto si ukážeme pouze řešení obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu:

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu obsahují:

- Nezávisle proměnnou x
- Závisle proměnnou y
- 1. derivaci y podle x $\quad \frac{dy}{dx}$

> Řešit diferenciální rovnici znamená **nalézt všechny funkce** $y=f(x)$ takové, aby po jejich dosazení do zadání byla levá strana rovnice rovna pravé.

Obyč. dif. rovnice 1. řádu
- s proměnnými separovanými
- s proměnnými separovatelnými

1. Dif. rovnice s proměnnými separovanými

A) $dy = f(x)\,dx$ $\qquad$ B) $\frac{dy}{dx} = f(x)$

Řešení: 1, Typ B převedeme na typ A tím, že obě strany rovnice násobíme diferenciálem dx. Tím jsou proměnné separovány (= odděleny). Na jedné straně rovnice je pouze y, na druhé straně rovnice je pouze x.

2) Obe strany rovnice A integrujeme:

$$\int dy = \int f(x)\,dx$$

Př.: Řešte diferenciální rovnici $\frac{dy}{dx} = 5x + 1$.

Řešení: $\frac{dy}{dx} = 5x + 1 \quad / \cdot dx$

$dy = (5x+1)dx$ / integrace obou stran

$\int dy = \int (5x+1)dx$

$$\underline{\underline{y = \frac{5}{2}x^2 + x + k}}$$

Zkouška: $L = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{5}{2}x^2 + x + k\right) = 5x+1$

$P = 5x+1$

$\underline{\underline{L = P}}$

C) $g(y)\,dy = f(x)\,dx$ D) $g(y) \cdot \frac{dy}{dx} = f(x)$

Řešení: 1) Typ D převedeme na typ C tím, že obě strany rovnice násobíme diferenciálem dx.
2) Obě strany rovnice C integrujeme:
$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$

Př.: Řešte dif. rovnici $y \cdot \frac{dy}{dx} = x+1$

Řešení: $y \cdot \frac{dy}{dx} = x+1 \quad / \cdot dx$

$y\,dy = (x+1)\,dx$ / integrace obou stran

$$\underline{\underline{\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + k}}$$

2. Dif. rovnice s proměnnými separovatelnými

A) $f(x)\,dy = g(y)\,dx$ B) $f(x)\cdot\dfrac{dy}{dx} = g(y)$

Řešení: 1) Typ B převedeme na typ A tím, že obě strany rovnice násobíme diferenciálem dx. Proměnné nejsou separovány, neboť na obou stranách rovnice A vystupuje x i y.

2) Provedeme separaci proměnných tak, že obě strany rovnice dělíme funkcemi $f(x)$ i $g(y)$. Dostaneme: $\dfrac{1}{g(y)}\,dy = \dfrac{1}{f(x)}\,dx$

Proměnné jsou separovány.

3) Obě strany rovnice integrujeme:

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int \frac{1}{f(x)}\,dx$$

Př.: Řešte dif. rovnici $x\cdot\dfrac{dy}{dx} = y$

Řešení: $x\cdot\dfrac{dy}{dx} = y \quad /\cdot dx$

$$x\,dy = y\,dx \quad /:x,\ :y$$

$$\frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{x}\,dx \quad /\text{integrace}$$

$$\int\frac{1}{y}\,dy = \int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\underline{\underline{\ln y = \ln x + k}}$$

Dosud jsme hledali obecná řešení dif. rovnic, tj. konstanta k mohla mít libovolnou hodnotu.

V chemii však často hledáme hodnotu konstanty k tak, aby řešení vyhovovalo určitým podmínkám (tzv. počáteční podmínky).

Postup výpočtu viz následující příklad: !!

Př.: Řešte rovnici $2dy = x\,dx$, víte-li, že pro $x = 0$ má y hodnotu $y = 1$.

Řešení:

$$2dy = x\,dx$$

$$\int_1^y 2\,dy = \int_0^x x\,dx$$

!

$$\left[2y\right]_1^y = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x$$

$$2y - 2\cdot 1 = \frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2}$$

$$\underline{\underline{2y - 2 = \frac{x^2}{2}}}$$

Použití dif. rovnic v chemii:

Např.: termodynamika: $dS = C\cdot\frac{1}{T}\,dT$ … závislost entropie na teplotě

$\frac{dp}{p\,dT} = \frac{\Delta H_{m,výp}}{RT^2}$ … závislost teploty varu na tlaku (Clausiova-Clapeyronova rce)

jaderná chemie:

$-\frac{dN}{dt} = \lambda\cdot N$ … zákon radioaktivního rozpadu

chemická kinetika:

$-\frac{dc}{dt} = k$ … reakce nultého řádu

$-\frac{dc}{dt} = k\cdot c$ … —||— prvního —||—

$-\frac{dc}{dt} = k\cdot c^2$ … reakce druhého řádu

Řešte rovnice:

CVIČENÍ

1) $\frac{dy}{dx} = a \cdot y + b$

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{ax}{y}$

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{ay}{x}$

4) $y + (1+x) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

5) $x^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 1 - y$

6) $(y+3) \cdot \frac{dy}{dx} = x^2 + 5$

7) $\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}$ ... Počáteční podmínka: $x = 2$, $y = 3$

8) $-\frac{dc}{dt} = k \cdot c$ Počáteční podmínka: $t = 0$, $c = a$

9) $-\frac{dc}{dt} = k \cdot c^2$ Počáteční podmínka: $t = 0$, $c = a$

10) $-\frac{dc}{dt} = k$ Počáteční podmínka: $t = 0$, $c = a$

11) $\frac{dp}{p\,dT} = \frac{\Delta H_{m,vyp.}}{RT^2}$ Poč. podm.: Při tlaku p_1 je teplota T_1
-"- p_2 -"- T_2

12) Objem krychle byl stanoven s chybou 3%. Jaká je chyba stanovení délky její hrany? Řešte pomocí diferenciálů.

13) Vypočtěte koncentraci H^+ iontů v roztoku, jehož pH je 10,2.

14) Jaké objemy vody a 5M NaCl musíme smísit, abychom dostali 200 ml 1,7 M NaCl?

15) Vypočtěte: $3 \log 10 - \frac{1}{2} \log 10\,000$ $7 \ln e^5 + 2 \ln e^{-17}$

16) Řešte rovnice:

$\log(x+5) = 0{,}172$ $\ln(2x+7) = 2$