Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (řešené příklady)

Jiří Tesař

Vypracoval: **David Michálek**

Soustavy lineárních rovnic

Příklad 2 / strana 6

Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 6 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & 12 & 8 & 10 \end{array}\right) /2 \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 4 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$h_s = h_r = n = 3 \quad \Rightarrow \quad$ soustava má jedno řešení

$$-\frac{4}{5}x_3 = \frac{1}{5} \quad /\cdot 5 \qquad -4x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -\frac{1}{4}$$

$$5x_2 + 3\cdot x_3 = 4 \qquad 5x_2 + 4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = 4 \qquad 5x_2 - 1 = 4 \qquad 5x_2 = 5 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3\cdot x_3 = 2 \qquad -x_1 + 2\cdot 1 + 3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 \qquad -x_1 + 2 - \frac{3}{4} = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{3}{4}$$

Soustava rovnic má jedno řešení $\left(-\frac{3}{4}; 1; -\frac{1}{4}\right)$.

Příklad 3 / strana 6

Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} x_2 & x_3 & x_1 & \\ 1 & -5 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} x_2 & x_3 & x_1 & \\ 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} x_2 & x_3 & x_1 & \\ 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$h_s = h_r = n = 3 \quad \Rightarrow \quad$ jedno řešení

$$\frac{3}{2}x_1 = \frac{3}{2} \quad /\cdot 2 \qquad 3x_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$$

$$-4x_3 + 7x_1 = 3 \qquad -4x_3 + 7\cdot 1 = 3 \qquad -4x_3 + 7 = 3 \qquad -4x_3 = -4 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1$$

$$x_2 - 5x_3 + 3x_1 = 0 \qquad x_2 - 5\cdot 1 + 3\cdot 1 = 0 \qquad x_2 - 5 + 3 = 0 \qquad x_2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2$$

Soustava rovnic má jedno řešení $(\mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{1})$.

Příklad 4 / strana 6

Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & & & = & 12 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 17 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 33 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & 33 \\ 5 & 4 & -1 & 17 \\ 3 & 2 & 0 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & 33 \\ 0 & -6 & -26 & -148 \\ 0 & -4 & -15 & -87 \end{array}\right) /2 \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & 33 \\ 0 & -3 & -13 & -74 \\ 0 & -4 & -15 & -87 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & 33 \\ 0 & -3 & -13 & -74 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{35}{3} \end{array}\right)$$

$$h_s = h_r = n \quad \Rightarrow \quad \text{jedno řešení}$$

$$\frac{7}{3}x_3 = \frac{35}{3} \quad /\cdot 3 \qquad 7x_3 = 35 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 5$$

$$-3x_2 - 13x_3 = -74 \qquad -3x_2 - 13\cdot 5 = -74 \qquad -3x_2 - 65 = -74 \qquad -3x_2 = -9 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 33 \qquad x_1 + 2\cdot 3 + 5\cdot 5 = 33 \qquad x_1 + 31 = 33 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2$$

Soustava rovnic má jedno řešení $(\mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{5})$.

Příklad 5 / strana 6

Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 2 \\ 6x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & = & 4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \\ 6 & 8 & 9 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & -1 \\ 0 & 2 & -21 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$h_s = h_r = n = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{jedno řešení}$$

$-5x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0$

$x_2 - 8x_3 = -1 \quad x_2 - 8\cdot 0 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1$

$x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \quad x_1 - 1 + 5\cdot 0 = 1 \quad x_1 - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2$

Soustava rovnic má jedno řešení $\mathbf{(2; -1; 0)}$

Příklad 6 / strana 6

Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 &= -2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 6 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & -2 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$h_s = h_r = 2 \quad n = 3 \quad h_s = h_r < n \quad \Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení

zvolíme $x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad -3x_2 - 2x_3 = -6 \quad -3x_2 - 2\cdot 1 = -6 \quad -3x_2 = -4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{4}{3}$

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \quad x_1 + \frac{4}{3} + 2\cdot 1 = 1 \quad x_1 + \frac{10}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{7}{3}$

Soustava rovnic má ∞ řešení např.: $\left(\mathbf{-\frac{7}{3}; \frac{4}{3}; 1}\right)$.

Příklad 7 / strana 7

Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_2 & x_3 & x_4 & x_1 & \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_2 & x_3 & x_4 & x_1 & \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_2 & x_3 & x_4 & x_1 & \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & 4 \end{array}\right)$$

Příklad 8 / strana 7

Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & & + & 2x_3 & - & 2x_4 & & & = & 7 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & & & + & 2x_5 & = & 5 \\ 7x_1 & - & 2x_2 & + & 12x_3 & - & 2x_4 & + & 4x_5 & = & 17 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 15x_3 & & & + & 6x_5 & = & 15 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ 3 & 0 & 2 & -2 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 2 & 5 \\ 7 & -2 & 12 & -2 & 4 & 17 \\ 6 & -3 & 15 & 0 & 6 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_1 & \\ -1 & 5 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ -2 & 12 & -2 & 4 & 7 & 17 \\ -3 & 15 & 0 & 6 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_1 & \\ -1 & 5 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_1 & \\ -1 & 5 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_1 & \\ -1 & 5 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$h_s = h_r = 2 \qquad n = 5 \qquad h_s = h_r < n \qquad \Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení

zvolíme 3 neznámé: $x_1 = \frac{5}{3};\ x_5 = \frac{4}{3};\ x_4 = -1$

$$2x_3 - 2x_4 + 0x_5 + 3x_1 = 7 \qquad 2x_3 - 2\cdot(-1) + 0\cdot\frac{4}{3} + 3\cdot\frac{5}{3} = 7 \qquad 2x_3 + 2 + 0 + 5 = 7 \ \Rightarrow\ x_3 = 0$$

$$-x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 2x_5 + 2x_1 = 5 \qquad -x_2 + 5\cdot 0 + 0\cdot(-1) + 2\cdot\frac{4}{3} + 2\cdot\frac{5}{3} = 5 \qquad -x_2 + \frac{8}{3} + \frac{10}{3} = 5$$

$$-x_2 + \frac{18}{3} = 5 \qquad -x_2 + 6 = 5 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1$$

Soustava rovnic má ∞ řešení např.: $\left(\mathbf{\frac{5}{3}; 1; 0; -1; \frac{4}{3}}\right)$.

Příklad 9 / strana 7

Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 6 \\ 5x & + & y & + & 4z & = & 21 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 21 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -9 & -6 & -9 \\ 0 & -1 & -3 & -8 \end{array}\right) /3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \end{array}\right)$$

$h_s = h_r = n = 3 \quad \Rightarrow \quad$ jedno řešení

$7z = 21 \Rightarrow z = 3$

$-y - 3z = -8 \quad -y - 3 \cdot 3 = -8 \quad -y - 9 = -8 \Rightarrow y = -1$

$x + 2y + 2z = 6 \quad x + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 6 \quad x - 2 + 6 = 6 \quad x + 4 = 6 \Rightarrow x = 2$

Soustava rovnic má jedno řešení $(\mathbf{2}; -\mathbf{1}; \mathbf{3})$.

Příklad 10 / strana 7

Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 5y & - & z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & = & 5 \\ 4x & + & 3y & & & = & 5 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -4 & -15 \\ 0 & 11 & -4 & -15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -4 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$h_s = h_r = 2 \quad n = 3 \quad h_s = h_r < n \quad \Rightarrow \quad$ nekonečně mnoho řešení

volíme např.: $z = 1$

$11y - 4z = -15 \quad 11y - 4 \cdot 1 = -15 \quad 11y - 4 = -15 \quad 11y = -11 \Rightarrow y = -1$

$x - 2y + z = 5 \quad x - 2 \cdot (-1) + 1 = 5 \quad x + 2 + 1 = 5 \quad x + 3 = 5 \Rightarrow x = 2$

Soustava rovnic má ∞ řešení např.: $(\mathbf{2}; -\mathbf{1}; \mathbf{1})$.

Příklad 11 / strana 8

Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 5y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & 3z & = & 5 \\ x & + & y & - & z & = & 4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -8 & 4 & -12 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -8 & 4 & -12 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & -8 & 4 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{array}\right) / : (-6) \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$h_s = h_r = n = 3 \quad \Rightarrow \quad$ jedno řešení

z matice vyplývá:

$z = 1$

$-4y + 5z = -3 \quad -4y + 5 \cdot 1 = -3 \quad -4y + 5 = -3 \quad -4y = -8 \Rightarrow y = 2$

$x + y - z = 4 \quad x + 2 - 1 = 4 \quad x + 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

Soustava rovnic má jedno řešení $(\mathbf{3}; \mathbf{2}; \mathbf{1})$.

Příklad 12 / strana 8

Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 5z & = & -8 \\ -x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -8 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -8 \\ 0 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 7 & -9 & 19 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -8 \\ 0 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & -\frac{11}{2} \end{array}\right)$$

$h_s = h_r = n = 3 \quad \Rightarrow \quad$ jedno řešení

z matice vyplývá:

$$5z = -\frac{11}{2} \quad / : 5 \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{\frac{11}{2}}{5} = -\frac{11}{10} = -1{,}1$$

$-2y + 4z = -7 \quad -2y + 4 \cdot (-1{,}1) = -7 \quad -2y - 4{,}4 = -7 \quad -2y = -2{,}6 \quad \Rightarrow \quad y = 1{,}3$

$x - 3y + 5z = -8 \quad x - 3 \cdot 1{,}3 + 5 \cdot (-1{,}1) = -8 \quad x - 3{,}9 - 5{,}5 = -8 \quad x - 9{,}4 = -8 \Rightarrow x = 1{,}4$

Soustava rovnic má jedno řešení $(\mathbf{1{,}4}; \mathbf{1{,}3}; -\mathbf{1{,}1})$.

Příklad 13 / strana 8

Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 &= 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right) / :2 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$h_s = h_r = 3 \quad n = 4 \quad h_s = h_r < n \quad \Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení

volíme $x_4 = -2$ a z matice vyplývá:

$2x_3 - 4x_4 = 12 \quad 2x_3 - 4\cdot(-2) = 12 \quad 2x_3 + 8 = 12 \quad 2x_3 = 4 \quad \Rightarrow x_3 = 2$

$x_2 - x_3 + x_4 = -3 \quad x_2 - 2 - 2 = -3 \quad x_2 - 4 = -3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1$

$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \quad x_1 - 2 + 3\cdot 2 - 4\cdot(-2) = 4 \quad x_1 - 2 + 6 + 8 = 4$

$x_1 + 12 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -8$

Soustava rovnic má ∞ řešení např.: $(\mathbf{-8};\ \mathbf{1};\ \mathbf{2};\ -\mathbf{2})$.

Příklad 15 / strana 9

Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 3x - y + 2z &= 0 \\ 11x + y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 11 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & -21 & 15 & 0 \end{array}\right) / :(-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$h_s = h_r = 2 \quad n = 3 \quad h_s = h_r < n \quad \Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení volíme $z=1$, z matice vyplývá:

$$-7y+5z=0 \quad -7y+5\cdot 1=0 \quad -7y+5=0 \quad -7y=-5 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{5}{7}$$

$$x+2y-z=0 \quad x+2\cdot\frac{5}{7}-1=0 \quad x+2\cdot\frac{5}{7}-1=0 \quad x+\frac{3}{7}=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{7}$$

Soustava rovnic má ∞ řešení např.: $\left(-\frac{3}{7};\frac{5}{7};1\right)$.

Příklad 16 / strana 9

Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & & & + & 5x_3 & & & = & 0 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -14 & -11 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -14 & -11 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -14 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{9}{7} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{9}{7} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -14 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{9}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$h_s=h_r=3 \quad n=4 \quad h_s=h_r<n \quad \Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení

volíme $x_4=-2{,}8$, z matice vyplývá:

$$2x_3-\frac{9}{7}x_4=0 \quad 2x_3-\frac{9}{7}\cdot(-2{,}8)=0 \quad 2x_3+3{,}6=0 \quad 2x_3=-3{,}6 \quad \Rightarrow \quad x_3=-1{,}8$$

$$7x_2-14x_3-11x_4=0 \quad 7x_2-14\cdot(-1{,}8)-11\cdot(-2{,}8)=0 \quad 7x_2+25{,}2+30{,}8=0$$

$$7x_2+56=0 \quad 7x_2=-56 \quad \Rightarrow \quad x_2=-8$$

$$x_1-x_2+3x_3+2x_4=0 \quad x_1+8+3\cdot(-1{,}8)+2\cdot(-2{,}8)=0 \quad x_1+8-5{,}4-5{,}6=0$$

$$x_1-3=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=3$$

Soustava rovnic má ∞ řešení např.: $(\mathbf{3};-\mathbf{8};\ -\mathbf{1{,}8};-\mathbf{2{,}8})$.

Příklad 17 / strana 9

Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 26 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 25 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 24 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 23 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 26 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 25 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 24 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 23 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 26 \\ 0 & -0{,}5 & -1 & -5{,}5 & -14 \\ 0 & -1 & -6 & -7 & -28 \\ 0 & -5{,}5 & -7 & -8{,}5 & -42 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 26 \\ 0 & -1 & -6 & -7 & -28 \\ 0 & -0{,}5 & -1 & -5{,}5 & -14 \\ 0 & -5{,}5 & -7 & -8{,}5 & -42 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 26 \\ 0 & -1 & -6 & -7 & -28 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & 30 & 112 \end{array}\right) /:2 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 26 \\ 0 & -1 & -6 & -7 & -28 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 15 & 56 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 26 \\ 0 & -1 & -6 & -7 & -28 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28 & 56 \end{array}\right)$$

$h_s = h_r = n = 4 \quad \Rightarrow \quad$ jedno řešení

z matice vyplývá:

$28x_4 = 56 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 2$

$2x_3 - 2x_4 = 0 \quad 2x_3 - 2\cdot 2 = 0 \quad 2x_3 - 4 = 0 \quad 2x_3 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 2$

$-x_2 - 6x_3 - 7x_4 = -28 \quad -x_2 - 6\cdot 2 - 7\cdot 2 = -28 \quad -x_2 - 12 - 14 = -28$

$-x_2 - 26 = -28 \quad -x_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 26 \quad 2x_1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 2 + 5\cdot 2 = 26 \quad 2x_1 + 6 + 8 + 10 = 26$

$2x_1 + 24 = 26 \quad 2x_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$

Soustava rovnic má jedno řešení $(\mathbf{1};\ \mathbf{2};\ \mathbf{2};\ \mathbf{2})$.

Příklad 18 / strana 9

Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & - & 5y & + & 4z & = & 0 \\ x & + & 17y & + & 4z & = & 0 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & 17 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & -14 & -2 & 0 \\ 0 & 14 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$h_s = h_r = 2 \qquad n = 3 \qquad h_s = h_r < n \qquad \Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení

volíme $z = -7$, z matice vyplývá:

$-7y - z = 0 \qquad -7y + 7 = 0 \qquad -7y = -7 \;\Rightarrow\; y = 1$

$x + 3y + 2z = 0 \qquad x + 3\cdot 1 + 2\cdot(-7) = 0 \qquad x + 3 - 14 = 0 \qquad \Rightarrow \quad x = 11$

Soustava rovnic má ∞ řešení např.: $(\mathbf{11};\ \mathbf{1};\ -\mathbf{7})$.

Vektory

Příklad 1 / strana 17

Zjistěte, zda vektory **a** (2; 3; 0), **b** (5; 7; 0), **c** (-6; 0; 1) a **d** (1; 10; 1) jsou lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & -17 & -2 & 0 \\ 0 & 63 & 7 & 0 \\ 0 & -43 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & -17 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{17} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{18}{17} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & -17 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & -17 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice **h = 3** a počet uvažovaných vektorů **n = 4** $\Rightarrow$ **h < n** $\Rightarrow$ **vektory jsou lineárně závislé**.

Příklad 2 / strana 17

Zjistěte, zda vektory ***a*** (3; 2; 0; 1), ***b*** (1; 0; 0; 1), ***c*** (2; 4; 2; 1) a ***d*** (5; 2; 3; 1) jsou lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6{,}5 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice **h = 4** a počet uvažovaných vektorů **n = 4** $\Rightarrow$ **h = n** $\Rightarrow$ **vektory jsou lineárně nezávislé**.

Příklad 3 / strana 17

Zjistěte, zda vektory ***a*** (1; 0; 0), ***b*** (2; -1; 1) a ***c*** (1; 1; 3) jsou lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice **h = 3** a počet uvažovaných vektorů **n = 3** $\Rightarrow$ **h = n** $\Rightarrow$ **vektory jsou lineárně nezávislé**.

Příklad 4 / strana 17

Zjistěte, zda vektory ***a*** (1; 0; -2), ***b*** (3; 1; 0) a ***c*** (-2; 1; 10) jsou lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice **h = 2** a počet uvažovaných vektorů **n = 3** $\Rightarrow$ **h < n** $\Rightarrow$ **vektory jsou lineárně závislé**.

Příklad 5 / strana 17

Zjistěte, zda vektory ***a*** (5; 2; -2), ***b*** (3; 1; -1) a ***c*** (-1; 0; 0) jsou lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice **h = 2** a počet uvažovaných vektorů **n = 3** $\Rightarrow$ **h < n** $\Rightarrow$ **vektory jsou lineárně závislé**.

Příklad 6 / strana 18

Zjistěte, zda vektory ***a*** (3; 2; 1), ***b*** (1; -2; 2) a ***c*** (1; 2; -3) jsou lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice **h = 3** a počet uvažovaných vektorů **n = 3** $\Rightarrow$ **h = n** $\Rightarrow$ **vektory jsou lineárně nezávislé**.

Příklad 7 / strana 18

Zjistěte, zda vektory ***a*** (2; 3; 0), ***b*** (5; 7; 0) a ***c*** (0; 1; 2) jsou lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y & z & x \\ 1 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y & z & x \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -14 & 5 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y & z & x \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -14 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Hodnost matice **h = 3** a počet uvažovaných vektorů **n = 3** $\Rightarrow$ **h = n** $\Rightarrow$ **vektory jsou lineárně nezávislé**.

Příklad 8 / strana 18

Zjistěte, zda vektory ***a*** (2; 1; 0), ***b*** (3; 3; 2) a ***c*** (1; 2; 1) jsou lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice **h = 3** a počet uvažovaných vektorů **n = 3** $\Rightarrow$ **h = n** $\Rightarrow$ **vektory jsou lineárně nezávislé**.

Příklad 9 / strana 18

Určete z-ovou souřadnici vektoru ***a*** tak, aby vektory ***a*** (4; 1; a_z), ***b*** (2; -1; -3) a ***c*** (-1; -1; -1/2) byly lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & a_z \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & a_z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & (a_z-2) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & [(a_z-2)+4] \end{pmatrix} \Rightarrow a_z - 2 + 4 = 0$$

$a_z - 2 + 4 = 0 \qquad a_z + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_z = \mathbf{-2}$

Příklad 10 / strana 18

Určete souřadnici x vektoru ***a*** tak, aby vektory ***a*** (a_x; 1; -2), ***b*** (1; 2; -3/2) a ***c*** (2; 2; 1) byly lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ a_x & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z & y & x \\ 1 & 2 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 2 & 1 \\ -2 & 1 & a_x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z & y & x \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & (a_x+4) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z & y & x \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & [(a_x+4)-4] \end{pmatrix} \Rightarrow [(a_x+4)-4] = 0$$

$a_x + 4 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_x = \mathbf{0}$

Příklad 12 / strana 19

Je dán bod M (5; -3; 4) [m], určete délku $|\mathbf{OM}|$ a jeho směrové úhly a výsledek ověřte.

$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25+9+16} = \sqrt{50} = \mathbf{7,0711\ m}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\left|\overrightarrow{OM}\right|} = \frac{5}{7,0711} = \mathbf{0,7071} \qquad \alpha = \mathbf{45°}$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{\left|\overrightarrow{OM}\right|} = \frac{-3}{7,0711} = \mathbf{-0,4243} \qquad \beta = \mathbf{115°\,6'}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{\left|\overrightarrow{OM}\right|} = \frac{4}{7,0711} = \mathbf{0,5657} \qquad \gamma = \mathbf{55°\,33'}$$

Příklad 15 / strana 19

Síla **F** (2; 3; 2) [N] posunula těleso z bodu A (3; 0; 1) [m] po přímce do bodu B (1; 2; 3). Jakou přitom vykonala práci?

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = B - A = \big((b_1 - a_1);(b_2 - a_2);(b_3 - a_3)\big) = \big((1-3);(2-0);(3-1)\big) =$$
$$= (-2;\ 2;\ 2)$$
$$W = \vec{F}.\vec{s} = (F_1.s_1) + (F_2.s_2) + (F_3.s_3) = 2.(-2) + 3.2 + 2.2 = -4 + 6 + 2 = \mathbf{6\,J}$$

Příklad 16 / strana 19

Určete práci, kterou vykoná síla **F** (5; 3; 1) [N] působící z bodu X (0; 0; 1) [m] po přímé dráze do bodu Y (1; 1; 3) [m] a určete úhel, který svírá síla **F** a dráha **s**.

$$\vec{s} = \overrightarrow{XY} = Y - X = \big((y_1 - x_1);(y_2 - x_2);(y_3 - x_3)\big) = \big((1-0);(1-0);(3-1)\big) =$$
$$= (1;\ 1;\ 2)[N]$$
$$W = \vec{F}.\vec{s} = (F_1.s_1) + (F_2.s_2) + (F_3.s_3) = 5.1 + 3.1 + 1.2 = 5 + 3 + 2 = \mathbf{10\,J}$$
$$W = \left|\vec{F}\right|.\left|\vec{s}\right|.\cos\varphi \;\Rightarrow\; \cos\varphi = \frac{W}{\left|\vec{F}\right|.\left|\vec{s}\right|} = \frac{10}{\sqrt{5^2+3^2+1^2}.\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \frac{10}{\sqrt{25+9+1}.\sqrt{1+1+4}} =$$
$$= \frac{10}{\sqrt{35}.\sqrt{6}} = \frac{10}{5,9161.2,4495} = \frac{10}{14,4915} = 0,6901 \qquad \varphi = \mathbf{46°\,21'}$$

Příklad 17 / strana 19

Chlapec táhne sáňky do kopce silou **F** (100; 0; 20) [N] po dráze **s** (20; 0; 1) [m]. Jakou vykoná práci a jaký úhel svírá **F** a **s**?

$$W = \vec{F}.\vec{s} = (F_1.s_1) + (F_2.s_2) + (F_3.s_3) = 100.20 + 0.0 + 20.1 = 2000 + 0 + 20 = \mathbf{2020\ J}$$

$$W = |\vec{F}|.|\vec{s}|.\cos\varphi \ \Rightarrow\ \cos\varphi = \frac{W}{|\vec{F}|.|\vec{s}|} = \frac{2020}{\sqrt{100^2+0^2+20^2}.\sqrt{20^2+0^2+1^2}} = \frac{2020}{\sqrt{10000+400}.\sqrt{400+1}} =$$

$$= \frac{2020}{\sqrt{10400}.\sqrt{401}} = \frac{2020}{101{,}9804.20{,}025} = \frac{2020}{2042{,}1575} = 0{,}9891 \qquad \varphi = \mathbf{8^\circ\,28'}$$

Příklad 18 / strana 19

Určete práci, kterou vykoná síla F = 6 N o směrových úhlech 45°; 60°; 60° jestliže působí po dráze **s** = $\left(5\sqrt{2}; -6;\ 3\right)[\mathrm{m}]$. Dále určete jaký úhel svírají **F** a **s**.

$$\cos\alpha = \frac{f_1}{|\vec{F}|} \ \Rightarrow\ f_1 = \cos\alpha.|\vec{F}| = \cos 45^\circ.6 = \frac{\sqrt{2}}{2}.6 = \mathbf{6\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\cos\beta = \frac{f_2}{|\vec{F}|} \ \Rightarrow\ f_2 = \cos\beta.|\vec{F}| = \cos 60^\circ.6 = 0{,}5.6 = \mathbf{3}$$

$$\cos\gamma = \frac{f_3}{|\vec{F}|} \ \Rightarrow\ f_3 = \cos\gamma.|\vec{F}| = \cos 60^\circ.6 = 0{,}5.6 = \mathbf{3}$$

$$\vec{F} = \left(\mathbf{6\frac{\sqrt{2}}{2}; 3; 3}\right)[\mathrm{N}]$$

$$W = \vec{F}.\vec{s} = (F_1.s_1) + (F_2.s_2) + (F_3.s_3) = 6\frac{\sqrt{2}}{2}.5\sqrt{2} + 3.(-6) + 3.3 = 30 - 18 + 9 = \mathbf{21\ J}$$

$$W = |\vec{F}|.|\vec{s}|.\cos\varphi \ \Rightarrow\ \cos\varphi = \frac{W}{|\vec{F}|.|\vec{s}|} = \frac{21}{\sqrt{\left(6\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3^2 + 3^2}.\sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 + (-6)^2 + 3^2}} =$$

$$= \frac{21}{\sqrt{18+9+9}.\sqrt{50+36+9}} = \frac{21}{\sqrt{36}.\sqrt{95}} = \frac{21}{6.9{,}7468} = \frac{21}{58{,}4808} = 0{,}3591 \qquad \varphi = \mathbf{68^\circ\,57'}$$

Příklad 19 / strana 20

Vypočítejte práci, kterou vykoná síla **F** (3; 2; 1) [N] působící po dráze **s** (1; 2; 3) [m]. Určete úhel, který svírají **F** a **s**.

$$W = \vec{F}.\vec{s} = (F_1.s_1) + (F_2.s_2) + (F_3.s_3) = 3.1 + 2.2 + 1.3 = 3 + 4 + 3 = \mathbf{10\ J}$$

$$W = |\vec{F}|.|\vec{s}|.\cos\varphi \ \Rightarrow\ \cos\varphi = \frac{W}{|\vec{F}|.|\vec{s}|} = \frac{10}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}.\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{10}{\sqrt{9+4+1}.\sqrt{1+4+9}} = \frac{10}{\sqrt{14}.\sqrt{14}} =$$

$$= \frac{10}{\left(\sqrt{14}\right)^2} = \frac{10}{14} = 0{,}7143 \qquad \varphi = \mathbf{44^\circ\,24'}$$

Příklad 20 / strana 20

Vypočítejte práci, kterou vykoná síla **F** (5; 1; 1) [N] působící po dráze **s** (3; 5; 5) [m] a určete úhel, který svírají **F** a **s**.

$$W = \vec{F}.\vec{s} = (F_1.s_1) + (F_2.s_2) + (F_3.s_3) = 5.3 + 1.5 + 1.5 = 15 + 5 + 5 = \mathbf{25\ J}$$

$$W = |\vec{F}|.|\vec{s}|.\cos\varphi \ \Rightarrow\ \cos\varphi = \frac{W}{|\vec{F}|.|\vec{s}|} = \frac{25}{\sqrt{5^2+1^2+1^2}.\sqrt{3^2+5^2+5^2}} = \frac{25}{\sqrt{25+1+1}.\sqrt{9+25+25}} =$$

$$= \frac{25}{\sqrt{27}.\sqrt{59}} = \frac{25}{5{,}1962.7{,}6811} = \frac{25}{39{,}9128} = 0{,}6264 \qquad \varphi = \mathbf{51°13'}$$

Příklad 21 / strana 20

Jakou potenciální energii (v homogenním gravitačním poli) získá těleso o hmotnosti m = 5 kg, pohybuje-li se z počátku souřadnicového systému do bodu X (3; 1; 2) [m] ? Jaký úhel svírá dráha uvedeného pohybu svislým směrem daný osou z? Orientace gravitačního pole je dána kladným směrem osy z.

$$E_p = m.\vec{g}.\vec{h}\ [J]$$

$$\vec{g} = (0;0;10)\,m.s^{-2} \ \Rightarrow\ \vec{F} = m.\vec{g} = 5.(0;\ 0;\ 10) = 5.0 + 5.0 + 5.10 = (\mathbf{0};\ \mathbf{0};\ \mathbf{50})[\mathbf{N}]$$

$$\vec{h} = \overrightarrow{0X} = X - 0 = ((x_1 - 0);(x_2 - 0);(x_3 - 0)) = ((3-0);(1-0);(2-0)) = (\mathbf{3};\mathbf{1};\mathbf{2})[m]$$

$$E_p = \vec{F}.\vec{s} = (F_1.s_1) + (F_2.s_2) + (F_3.s_3) = 0.3 + 0.1 + 50.2 = 0 + 0 + 100 = \mathbf{100\ J}$$

Příklad 23 / strana 21

Síla F = 4 N o směrových úhlech (60°; 60°; 45°) způsobí posunutí $\vec{s} = (-1;2;\sqrt{2})\,[m]$. Jakou při tom vykoná práci?

$$\cos\alpha = \frac{f_1}{|\vec{F}|} \ \Rightarrow\ f_1 = \cos\alpha.|\vec{F}| = \cos 60°.4 = 0{,}5.4 = \mathbf{2}$$

$$\cos\beta = \frac{f_2}{|\vec{F}|} \ \Rightarrow\ f_2 = \cos\beta.|\vec{F}| = \cos 60°.4 = 0{,}5.4 = \mathbf{2}$$

$$\cos\gamma = \frac{f_3}{|\vec{F}|} \ \Rightarrow\ f_3 = \cos\gamma.|\vec{F}| = \cos 45°.4 = \frac{\sqrt{2}}{2}.4 = \mathbf{4\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\vec{F} = \left(\mathbf{2};\mathbf{2};\mathbf{4\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)[N]$$

$$W = \vec{F}.\vec{s} = (F_1.s_1) + (F_2.s_2) + (F_3.s_3) = 2.(-1) + 2.2 + 4\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2} = -2 + 4 + 4 = \mathbf{6\ J}$$

Příklad 24 / strana 21

Síla **F** (-3; -1; 0) [N] způsobí posunutí hmotného bodu po dráze **s** (-1; -3; 2) [m]. Jakou vykoná práci, jaký úhel svírá **F** a **s**.

$$W = \vec{F}.\vec{s} = (F_1.s_1) + (F_2.s_2) + (F_3.s_3) = -3.(-1) + (-1).(-3) + 0.2 = 3 + 3 + 0 = \mathbf{6\ J}$$

$$W = |\vec{F}|.|\vec{s}|.\cos\varphi \;\Rightarrow\; \cos\varphi = \frac{W}{|\vec{F}|\cdot|\vec{s}|} = \frac{6}{\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 0^2}.\sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{9+1+0}.\sqrt{1+9+4}} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{10}.\sqrt{15}} = \frac{6}{3,1623.3,873} = \frac{6}{12,2476} = 0,4899 \qquad \varphi = \mathbf{60^\circ\, 39'}$$

Příklad 25 / strana 21

Hmotný bod se pohybuje z počátku do bodu M (10; -10; 20) [m] za působení stálé síly. Určete velikost této síly, jestliže svírá se směrem dráhy úhel α = 60° a vykoná práci W = 6 J.

$$\vec{s} = \overrightarrow{0M} = M - 0 = ((m_1 - 0);(m_2 - 0);(m_3 - 0)) = ((10-0);(-10-0);(20-0)) = (\mathbf{10};-\mathbf{10};\mathbf{20})[m]$$

$$W = |\vec{F}|.|\vec{s}|.\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad |\vec{F}| = \frac{W}{|\vec{s}|.\cos\alpha} = \frac{6}{\sqrt{10^2 + (-10)^2 + 20^2}.\cos 60^\circ} = \frac{6}{\sqrt{100+100+400}.0,5} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{600}.0,5} = \frac{6}{24,4949.0,5} = \frac{6}{12,2475} = \mathbf{0,4899\,N}$$

Příklad 26 / strana 21

Určete skalární a vektorový součin vektorů **a** (3; -2; 0) a **b** (3; 0; 2).

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 3.3 + (-2).0 + 0.2 = 9 + 0 + 0 = \mathbf{9}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = i\cdot\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - j\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + k\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= i\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - j\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + k\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (-4+0)i - (6-0)j + [0-(-6)]k = -\mathbf{4i} - \mathbf{6j} + \mathbf{6k} = (-\mathbf{4}; -\mathbf{6};\ \mathbf{6})$$

Příklad 27 / strana 21

Vypočtěte: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$, pro **a** (2; -3; 1) a **b** (3; 0; 0).

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3\right)=\left(2+3;\ -3+0;\ 1+0\right)=\left(\mathbf{5};-\mathbf{3};\ \mathbf{1}\right)$$
$$\vec{a}-\vec{b}=\left(a_1-b_1;\ a_2-b_2;\ a_3-b_3\right)=\left(2-3;\ -3-0;\ 1-0\right)=\left(-\mathbf{1};-\mathbf{3};\mathbf{1}\right)$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3\right)=\left(2+3;\ -3+0;\ 1+0\right)=\left(\mathbf{5};-\mathbf{3};\ \mathbf{1}\right)$$
$$\vec{a}-\vec{b}=\left(a_1-b_1;\ a_2-b_2;\ a_3-b_3\right)=\left(2-3;\ -3-0;\ 1-0\right)=\left(-\mathbf{1};-\mathbf{3};\mathbf{1}\right)$$

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}=i\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}-j\cdot\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}+k\cdot\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=$$
$$=\left[-3-(-3)\right]i-\left[5-(-1)\right]j+\left[(-15-3)\right]k=\mathbf{0i}-\mathbf{6j}-\mathbf{18k}=\left(\mathbf{0};-\mathbf{6};-\mathbf{18}\right)$$

Příklad 28 / strana 21

Vypočtěte: $\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\times\vec{z}$, pro **u** (1; 2; 3), **v** (2; 3; 1) a **z** (3; 1; 2).

$\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\times\vec{z}$ nejprve vypočítáme $\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=i\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}-j\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+k\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=(2-9)i-(1-6)j+(3-4)k=$$
$$=-\mathbf{7i}+\mathbf{5j}-\mathbf{k}=\left(-\mathbf{7};\ \mathbf{5};-\mathbf{1}\right)$$
$$\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\times\vec{z}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -7 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=i\cdot\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-j\cdot\begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}+k\cdot\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=$$
$$=\left[10-(-1)\right]i-\left[-14-(-3)\right]j+(-7-15)k=\mathbf{11i}+\mathbf{11j}-\mathbf{22k}=\left(\mathbf{11};\mathbf{11};-\mathbf{22}\right)$$

Příklad 29 / strana 21

Určete vektorový a skalární součin vektorů **a** (-1; 2; 4) a **b** (5; 4; 8)

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 8 \end{vmatrix}=i\cdot\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}-j\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}+k\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=$$
$$=i\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}-j\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}+k\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=(16-16)i-(-8-20)j+(-4-10)k=\mathbf{0i}+\mathbf{28j}-\mathbf{14k}=\left(\mathbf{0};\ \mathbf{28};\ -\mathbf{14}\right)$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3=(-1).5+2.4+4.8=-5+8+32=\mathbf{35}$$

Příklad 30 / strana 22

Určete vektorový a skalární součin vektorů **u** (1; 2; 3) a **v** (2; 3; 4).

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=u_1.v_1+u_2.v_2+u_3.v_3=1.2+2.3+3.4=2+6+12=\mathbf{20}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=i\cdot\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}-j\cdot\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}+k\cdot\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}=$$

$$=i\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}-j\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}+k\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=(8-9)i-(4-6)j+(3-4)k=\mathbf{-i+2j-k}=(\mathbf{-1};\ \mathbf{2};\ \mathbf{-1})$$

Příklad 31 / strana 22

Určete vektorový a skalární součin vektorů **x** (-1; 2; 3) a **y** (2; 0; 5).

$$\vec{x}\times\vec{y}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}=i\cdot\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}-j\cdot\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}+k\cdot\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}=$$

$$=i\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}-j\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}+k\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=(10-0)i-(-5-6)j+(0-4)k=\mathbf{10i+11j-4k}=(\mathbf{10};\ \mathbf{11};\ \mathbf{-4})$$

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=x_1.y_1+x_2.y_2+x_3.y_3=(-1).2+2.0+3.5=-2+0+15=\mathbf{13}$$

Příklad 32 / strana 22

Jsou dány vektory $\vec{a}(-2;-4;1)$ a $\vec{b}(0;-3;8)$. Vypočítejte $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{a}$ a $\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\times\vec{b}$.

$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{a}$ nejprve vypočítáme $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 8 \end{vmatrix}=i\cdot\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 8 \end{vmatrix}-j\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}+k\cdot\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}=$$

$$=\left[-32-(-3)\right]i-(-16-0)j+(6-0)k=\mathbf{-29i+16j+6k}=(\mathbf{-29};\ \mathbf{16};\mathbf{6})$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{a}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -29 & 16 & 6 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix}=i\cdot\begin{vmatrix} 16 & 6 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}-j\cdot\begin{vmatrix} -29 & 6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}+k\cdot\begin{vmatrix} -29 & 16 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}=$$

$$=\left[16-(-24)\right]i-(-29+12)j+(116+32)k=\mathbf{40i+17j+148k}=(\mathbf{40};\mathbf{17};\mathbf{148})$$

$\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\times\vec{b}$ nejprve vypočítáme $\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$

$$\vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -3 & 8 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix}=i\cdot\begin{vmatrix} -3 & 8 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}-j\cdot\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}+k\cdot\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}=$$

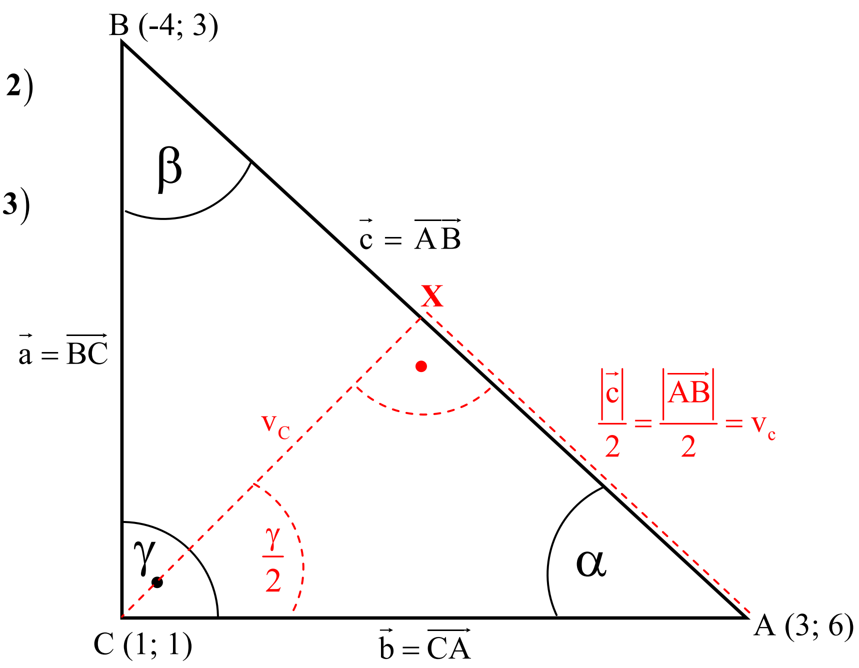
$$=\left[-3-(-32)\right]i-\left[0-(-16)\right]j+(0-6)k=\mathbf{29i-16j-6k}=(\mathbf{29};\mathbf{-16};\ \mathbf{-6})$$

$$\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 29 & -16 & -6 \\ 0 & -3 & 8 \end{vmatrix}=i\cdot\begin{vmatrix} -16 & -6 \\ -3 & 8 \end{vmatrix}-j\cdot\begin{vmatrix} 29 & -6 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}+k\cdot\begin{vmatrix} 29 & -16 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}=$$

$$=(-128-18)i-(232-0)j+(-87-0)k=\mathbf{-146i-232j-87k}=(\mathbf{-146;-232;-87})$$

Příklad 33 / strana 22

Pomocí vektorového počtu dokažte, že trojúhelník ABC, s vrcholy A (3; 6), B (-4; 3) a C (1; 1), je pravoúhlý a vypočtěte jeho obsah.



$A=(3;6), B=(-4;3), C=(1;1)$

$\vec{a}=\overrightarrow{BC}=C-B=(1-(-4);1-3)=(\mathbf{5;-2})$

$\vec{b}=\overrightarrow{CA}=A-C=(3-1;6-1)=(\mathbf{2;5})$

$\vec{c}=\overrightarrow{AB}=B-A=(-4-3;3-6)=(\mathbf{-7;-3})$

Důkaz, že je trojúhelník pravoúhlý provedeme s pomocí **Pythagorovy věty** $c^2=a^2+b^2$**.**

Nejprve zjistíme velikosti vektorů $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|$:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{5^2+(-2)^2}=\sqrt{\mathbf{29}}$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{b_x^2+b_y^2}=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{\mathbf{29}}$$

$$|\vec{c}|=\sqrt{c_x^2+c_y^2}=\sqrt{(-7)^2+(-3)^2}=\sqrt{\mathbf{58}}$$

$$|\vec{c}|>|\vec{a}| \text{ a } |\vec{c}|>|\vec{b}| \Rightarrow \vec{c}=\text{přepona}$$

Bude-li se $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$ pak je $\triangle ABC$ pravoúhlý.

$$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2 \qquad \left(\sqrt{29}\right)^2+\left(\sqrt{29}\right)^2=\left(\sqrt{58}\right)^2 \qquad 29+29=58 \quad \Rightarrow \mathbf{58=58}$$

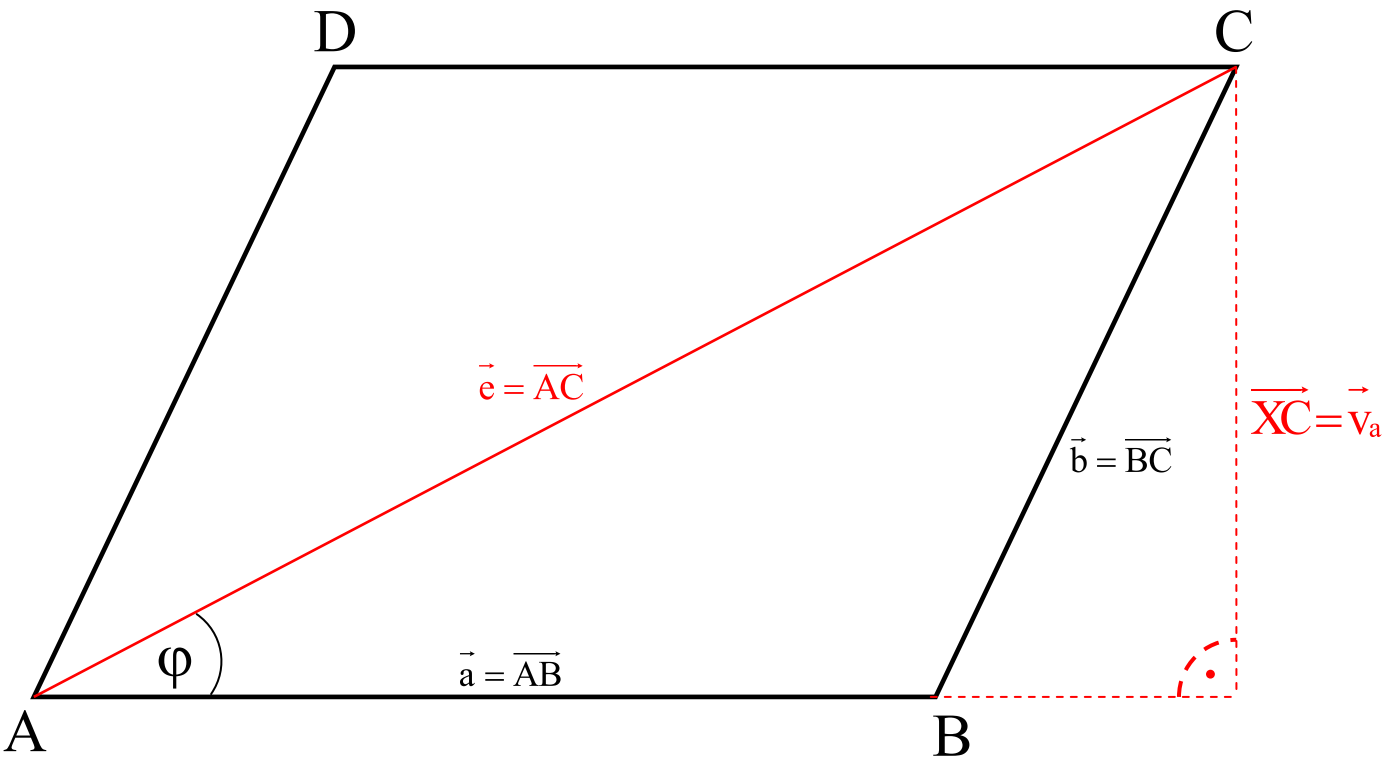
$$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2 \text{ a zároveň } |\vec{a}|=|\vec{b}| \Rightarrow \triangle ABC \text{ je pravoúhlý rovnoramenný} \Rightarrow \alpha=\beta=45°$$

$$\alpha=\frac{\gamma}{2}=45° \Rightarrow \triangle CAX \text{ je opět pravoúhlý rovnoramenný} \Rightarrow v_c=\frac{|\vec{c}|}{2}=\frac{|\overrightarrow{AB}|}{2}$$

$$S_\triangle=\frac{a\cdot v_a}{2}=\frac{b\cdot v_b}{2}=\frac{c\cdot v_c}{2} \quad\Rightarrow\quad S_\triangle=\frac{|\vec{c}|\cdot\frac{|\vec{c}|}{2}}{2}=\frac{\sqrt{58}.\frac{\sqrt{58}}{2}}{2}=\frac{\frac{\left(\sqrt{58}\right)^2}{2}}{2}=\frac{58}{4}=\mathbf{14,5}$$

Příklad 35 / strana 23

Určete obsah rovnoběžníku ABCD, je-li strana $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (3; -2; 1)$ a úhlopříčka



$\vec{e} = \overrightarrow{AC} = (5; -1; 3)$.

Nejprve vypočítáme úhel φ, který svírají strana $\vec{a}$ s úhlopříčkou $\vec{e}$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{e}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{e}|} = \frac{3.5+(-2).(-1)+1.3}{\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}.\sqrt{5^2+(-1)^2+3^2}} = \frac{15+2+3}{\sqrt{9+4+1}.\sqrt{25+1+9}} =$$

$$= \frac{20}{\sqrt{14}.\sqrt{35}} = 0{,}9035 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \mathbf{25°\ 22'} \qquad |\vec{a}| = \sqrt{14}; \ |\vec{e}| = \sqrt{35}$$

$$\sin\varphi = \frac{|\overrightarrow{XC}|}{|\vec{e}|} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{XC}| = |\vec{v}_a| = \sin\varphi\cdot|\vec{e}| = \sin 25°22'\cdot\sqrt{35} = \mathbf{2{,}5345}$$

$$S_{\square} = |\vec{a}|\cdot|\vec{v}_a| = \sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}\cdot 2{,}5345 = \sqrt{9+4+1}\cdot 2{,}5345 = \sqrt{14}\cdot 2{,}5345 \doteq \mathbf{9{,}483}$$

Příklad 36 / strana 23

Určete vnitřní úhly a plochu trojúhelníku ABC, je-li A (2; -4; 9), B (-1; -4; 5); C (6; -4; 6).

Nejprve z bodů A, B a C určíme vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ a $\overrightarrow{AC}$:

$$\vec{a} = \overrightarrow{BC} = C - B = (6-(-1); -4-(-4); 6-5) = (\mathbf{7};\mathbf{0};\mathbf{1})$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = C - A = (6-2; -4-(-4); 6-9) = (\mathbf{4};\mathbf{0};-\mathbf{3})$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1-2; -4-(-4); 5-9) = (-\mathbf{3};\mathbf{0};-\mathbf{4})$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|} = \frac{4.(-3)+0.0+(-3).(-4)}{\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}.\sqrt{(-3)^2+0^2+(-4)^2}} = \frac{-12+0+12}{\sqrt{16+0+9}.\sqrt{9+0+16}} =$$

$$= \frac{0}{\sqrt{25}.\sqrt{25}} = \mathbf{0} \qquad \alpha = \mathbf{90°} \qquad \Rightarrow \quad \triangle ABC \text{ je pravoúhlý}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|} = \frac{7.(-3)+0.0+1.(-4)}{\sqrt{7^2+0^2+1^2}.\sqrt{(-3)^2+0^2+(-4)^2}} =$$

$$= \frac{-21-4}{\sqrt{49+1}.\sqrt{9+16}} = \frac{-25}{\sqrt{50}.\sqrt{25}} = -\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} \qquad \beta = \mathbf{135°}$$

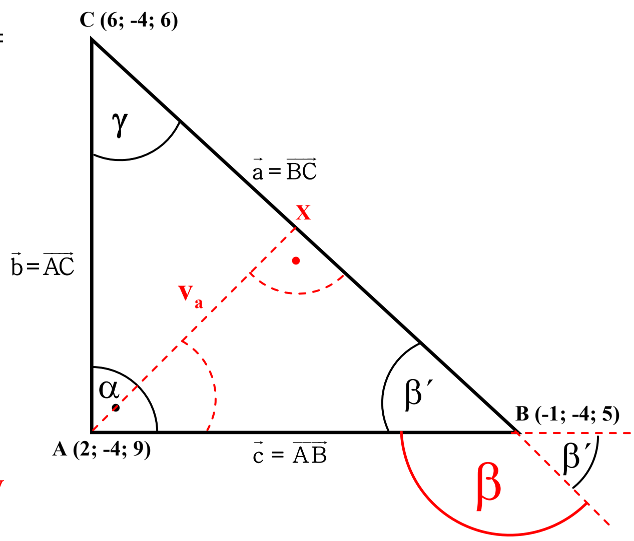
$$\beta = 135° \;\Rightarrow\; \beta = \text{je vnější úhel vektorů } \vec{a}, \vec{c}$$

$$\beta' = 180° - \beta = 180° - 135° = \mathbf{45°}$$

pro součet úhlů v $\triangle ABC$ platí: $\alpha + \beta' + \gamma = 180°$

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta' = 180° - 90° - 45° = \mathbf{45°}$$

$$\beta' = \gamma = 45° \;\Rightarrow\; \triangle ABC \text{ je pravoúhlý rovnoramenný}$$



$$S_\triangle = \frac{a\cdot v_a}{2} = \frac{b\cdot v_b}{2} = \frac{c\cdot v_c}{2} \quad \text{musíme vypočítat } v_a$$

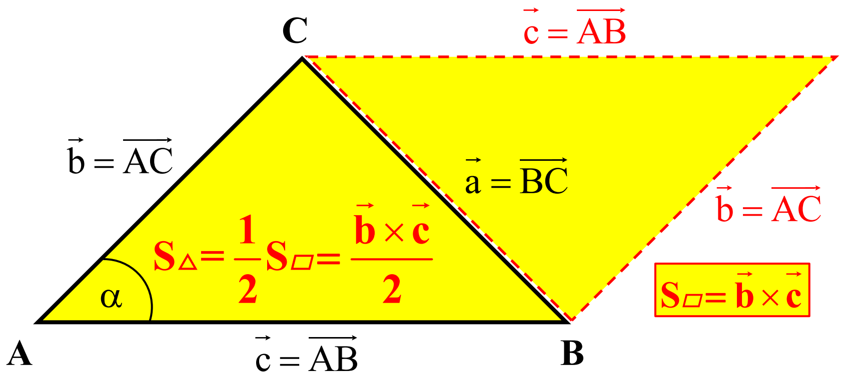
$$\sin\beta' = \frac{v_a}{|\vec{c}|} \quad \Rightarrow \quad v_a = \sin\beta' \cdot |\vec{c}|$$

$$v_a = \sin\beta' \cdot |\vec{c}| = \sin 45° \cdot \sqrt{25} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} \cdot \sqrt{\mathbf{25}}$$

$$S_\triangle = \frac{|\vec{a}|\cdot v_a}{2} = \frac{\sqrt{7^2+0^2+1^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{25}}{2} = \frac{\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{25}}{4} = \frac{50}{4} = \mathbf{12{,}5}$$

2. způsob výpočtu obsahu $\triangle ABC$:

Vektorový součin dvou vektorů je obsah rovnoběžníku, přičemž polovina obsahu rovnoběžníku je obsah trojúhelníku tvořený těmito vektory.



$$\vec{S}_\square = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0i - (-16-9)j - 0k =$$

$$= \mathbf{0i + 25j + 0k} = (\mathbf{0; 25; 0})$$

$$\left|\vec{S}_\square\right| = \sqrt{0 + 25^2 + 0} = \sqrt{25^2} = \mathbf{25}$$

$$S_\triangle = \frac{\left|\vec{S}_\square\right|}{2} = \frac{25}{2} = \mathbf{12{,}5}$$

Příklad 37 / strana 23

Vypočtěte obsah trojúhelníku určeného vektory **a** (3; -2; 1) a **b** (-2; 1; -1).

$$\vec{S}_\square = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (2-1)i - (-3+2)j +$$

$$+ (3-4)k = \mathbf{i + j - k} = (\mathbf{1; 1; -1})$$

$$\left|\vec{S}_\square\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{\mathbf{3}} \quad \Rightarrow \quad S_\triangle = \frac{\left|\vec{S}_\square\right|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{0{,}866}$$

Příklad 38 / strana 23

Určete plochu trojúhelníka určeného vrcholy A (1; -2; 3), B (2; 1; 0) a C (0; 2; 1).

$$\vec{b}=\overrightarrow{AC}=C-A=\left(0-1;2-(-2);1-3\right)=\left(\mathbf{-1};\mathbf{4};\mathbf{-2}\right)$$

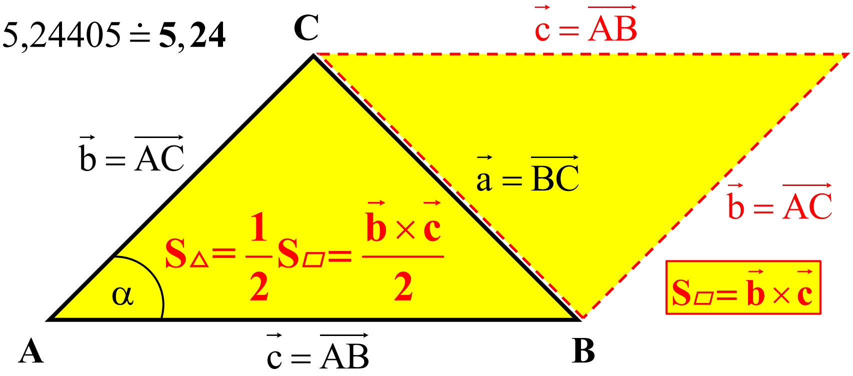
$$\vec{c}=\overrightarrow{AB}=B-A=\left(2-1;\,1-(-2);\,0-3\right)=\left(\mathbf{1};\,\mathbf{3};\,\mathbf{-3}\right)$$

$$\vec{S}_{\square}=\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}=i\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$=\left(-12-(-6)\right)i-\left(3-(-2)\right)j+\left(-3-4\right)k=\mathbf{-6i-5j-7k}=\left(\mathbf{-6};\mathbf{-5};\mathbf{-7}\right)$$

$$\left|\vec{S}_{\square}\right|=\sqrt{(-6)^2+(-5)^2+(-7)^2}=\sqrt{36+25+49}=\sqrt{110}$$

$$S_{\triangle}=\frac{\left|\vec{S}_{\square}\right|}{2}=\frac{\sqrt{110}}{2}=\frac{10{,}4881}{2}=5{,}24405\doteq\mathbf{5{,}24}$$



Příklad 39 / strana 23

Jsou dány vektory **a** (3; 1; -2) a **b** (0; -2; 1). Určete vektor **c**, který je kolmý na rovinu, v níž leží vektory **a** a **b**. Určete úhel, který spolu svírají vektory **a** a **b** a plochu trojúhelníka vymezeného vektory **a** a **b**.

$$\vec{c}=\vec{S}_{\square}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 3 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=i\begin{vmatrix} 1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} 3 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} 3 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=(1-4)i-(3-0)j+(-6-0)=\mathbf{-3i-3j-6k}=(\mathbf{-3;-3;-6})$$

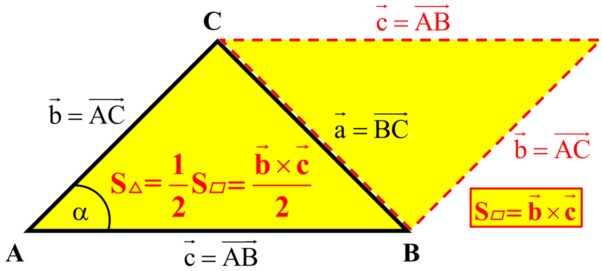
$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{3\cdot 0+1\cdot(-2)+(-2)\cdot 1}{\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{0^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{0-2-2}{\sqrt{9+1+4}\cdot\sqrt{4+1}}=$$

$$=\frac{-4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{5}}\doteq\mathbf{-0{,}4781}\qquad \varphi=\mathbf{118^\circ\ 33'}$$

$$S_{\triangle}=\frac{|\vec{S}_{\square}|}{2}=\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{2}=\frac{\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+(-6)^2}}{2}=\frac{\sqrt{9+9+36}}{2}=\frac{\sqrt{54}}{2}\doteq\mathbf{3{,}6742}$$

Příklad 40 / strana 23

Určete obsah, obvod a úhel α v $\triangle ABC$, je-li dáno: A (1; 1), B (3; 4) a C (-1; 4).



$$\vec{a}=\overrightarrow{BC}=C-B=(-1-3;\,4-4)=(\mathbf{-4;0})$$

$$\vec{b}=\overrightarrow{AC}=C-A=(-1-1;\,4-1)=(\mathbf{-2;\,3})$$

$$\vec{c}=\overrightarrow{AB}=B-A=(3-1;\,4-1)=(\mathbf{2;\,3})$$

$$|\vec{a}|=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-4)^2+0^2}=\sqrt{16}=\mathbf{4}$$

$$|\vec{b}|=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\mathbf{\sqrt{13}}$$

$$|\vec{c}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\mathbf{\sqrt{13}}$$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|}=\frac{-2\cdot 2+3\cdot 3}{\sqrt{(-2)^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{-4+9}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}}=$$

$$=\frac{5}{\left(\sqrt{13}\right)^2}=\mathbf{\frac{5}{13}}\doteq\mathbf{0{,}3846}\qquad \alpha=\mathbf{67^\circ\ 22'}$$

$$v_c=\sin\alpha.|\vec{b}|=\sin 112^\circ 37'\cdot\sqrt{13}=\mathbf{3{,}3283}$$

$$S_{\triangle}=\frac{|\vec{c}|.v_c}{2}=\frac{\sqrt{13}\cdot 3{,}3283}{2}\doteq\mathbf{6}$$

$$O_{\triangle}=|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|=\sqrt{13}+\sqrt{13}+4\doteq\mathbf{11{,}2}$$

Příklad 41 / strana 23

Vypočtěte pomocí vektorového součinu vektorového součinu plochu $\triangle ABC$, je-li A (3; -1; 5), B (2; 1; 4) a C (-3; 2; 1).

$$\vec{a} = \overrightarrow{BC} = C - B = (-3-2; 2-1; 1-4) = (\mathbf{-5}; \mathbf{1}; \mathbf{-3})$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = C - A = (-3-3;\ 2-(-1); 1-5) = (\mathbf{-6};\ \mathbf{3}; \mathbf{-4})$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2-3;\ 1-(-1); 4-5) = (\mathbf{-1};\ \mathbf{2};\ \mathbf{-1})$$

$$\vec{S}_{\square} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -5 & 1 & -3 \\ -6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4-(-9))i - (20-18)j + (-15+6)k = \mathbf{5i - 2j - 9k} = (\mathbf{5}; \mathbf{-2}; \mathbf{-9})$$

$$S_{\triangle} = \frac{|\vec{S}_{\square}|}{2} = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{2} = \frac{\sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-9)^2}}{2} = \frac{\sqrt{25+4+81}}{2} = \frac{\sqrt{110}}{2} = \frac{10{,}49}{2} \doteq \mathbf{5{,}245}$$

Příklad 44 / strana 24

Určete objem rovnoběžnostěnu, který je tvořen vektory **a** (3; 2; 1), **b** (-1; 2; 3) a **c** (1; -3; 2).

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \qquad \text{(smíšený součin vektorů, kde V je reálné číslo)}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (6-2)i - (9-(-1))j + (6-(-2))k = \mathbf{4i - 10j + 8k} = (\mathbf{4}; \mathbf{-10}; \mathbf{8})$$

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 4 \cdot 1 + (-10) \cdot (-3) + 8.2 = \mathbf{50}$$

Příklad 45 / strana 24

Určete objem trojbokého hranolu určeného vektory **a** (3; -2; 1), **b** (1; 3; -1) a **c** (1; 1; 5).

$$V_{\text{obecně}} = S_{\text{podstavy}} \cdot v$$

$$S_{\text{trojbokého hranolu}} = S_{\triangle} = \frac{S_{\square}}{2} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{2}$$

$$\vec{S}_{\square} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-3)i - (-3-1)j + (9+2)k = \mathbf{-i + 4j + 11k} = (\mathbf{-1; 4; 11})$$

$$\vec{S}_{\triangle} = \frac{\vec{S}_{\square}}{2} = \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}};\ \mathbf{2};\ \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{2}}\right)$$

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 + 2 \cdot 1 + \frac{11}{2} \cdot 5 = -\frac{1}{2} + 2 + \frac{55}{2} = \mathbf{29}$$

Příklad 46 / strana 24

Určete, zda vektory **a** (1; -3; 0), **b** (2; 1; -2) a **c** (-1; -4; -2) jsou lineárně závislé.

Pokud nejsou, vypočtěte objem čtyřstěnu, který určují.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & -7 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice **h = 3** a počet uvažovaných vektorů **n = 3** $\Rightarrow$ **h = n** $\Rightarrow$ **vektory jsou lineárně nezávislé**.

$$V_{\text{čtyřstěnu}} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{\mathbf{10}}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(b_x)^2 + (b_y)^2 + (b_z)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{\mathbf{9}}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{(c_x)^2 + (c_y)^2 + (c_z)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{\mathbf{21}}$$

φ_1 je úhel, který svírají vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$

φ_2 je úhel, který svírá vektor $\vec{c}$ s $(\vec{a} \times \vec{b})$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (6-0)i - (-2-0)j + (1-(-6))k =$$

$$= \mathbf{6i} + \mathbf{2j} + \mathbf{7k} = (\mathbf{6};\mathbf{2};\mathbf{7})$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 7^2} = \sqrt{36+4+49} = \sqrt{\mathbf{89}}$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{9}} = \frac{2-3}{9{,}4868} = -\frac{1}{9{,}4868} = \mathbf{-0{,}1054} \qquad \varphi_1 = \mathbf{96°03'}$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}{|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{6 \cdot (-1) + 2 \cdot (-4) + 7 \cdot (-2)}{\sqrt{89} \cdot \sqrt{21}} = -\frac{28}{43{,}2319} = \mathbf{-0{,}6477} \qquad \varphi_2 = \mathbf{130°21}$$

$$V_{\text{čtyřstěnu}} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{21} \cdot \sin(96°03') \cdot \cos(130°21')}{6} =$$

$$\frac{-27{,}9908}{6} = |-4{,}6651| \doteq \mathbf{4{,}7}$$

Příklad 48 / strana 24

Vypočtěte objem čtyřstěnu s vrcholy 0 (0; 0; 0), A (5; 2; 0), B (2; 5; 0) a C (1; 2; 4).

$$\vec{a} = \overrightarrow{0A} = A - 0 = (5-0;\ 2-0; 0-0) = (\mathbf{5};\mathbf{2};\mathbf{0})$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{0B} = B - 0 = (2-0; 5-0;\ 0-0) = (\mathbf{2};\mathbf{5};\mathbf{0})$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{0C} = C - 0 = (1-0; 2-0; 4-0) = (\mathbf{1};\mathbf{2};\mathbf{4})$$

$$V_{\text{čtyřstěnu}} = \frac{1}{6}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (0-0)i - (0-0)j + (25-4)k =$$

$$= \mathbf{0i} - \mathbf{0j} + \mathbf{21k} = (\mathbf{0};\ \mathbf{0};\ \mathbf{21})$$

$$V_{\text{čtyřstěnu}} = \frac{1}{6}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \frac{0\cdot 1 + 0\cdot 2 + 21\cdot 4}{6} = \frac{0+0+84}{6} = \mathbf{14}$$

Příklad 49 / strana 24

Určete objem jehlanu ABCO, je-li A (3; 2; 1), B (-1; -2; -3); C (0; 0; 5) a O (0; 0; 0).

$$V_{\text{jehlanu}} = \frac{1}{3}\cdot S_p \cdot v \qquad S_p = S_\triangle = \frac{S_\square}{2} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{2}$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{0A} = A - 0 = (3-0; 2-0; 1-0) = (\mathbf{3};\mathbf{2};\mathbf{1})$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{0B} = B - 0 = (-1-0; -2-0; -3-0) = (\mathbf{-1};\ \mathbf{-2};\ \mathbf{-3})$$

$$\vec{c} = \vec{v} = \overrightarrow{0C} = C - 0 = (0-0; 0-0; 5-0) = (\mathbf{0};\mathbf{0};\mathbf{5})$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-6-(-2))i - (-9-(-1))j + (-6-(-2))k = \mathbf{-4i} + \mathbf{8j} - \mathbf{4k} = (\mathbf{-4};\mathbf{8};\mathbf{-4})$$

$$S_p = S_\triangle = \frac{S_\square}{2} = \frac{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)}{2} = \left(-\frac{4}{2};\frac{8}{2};-\frac{4}{2}\right) = (\mathbf{-2};\mathbf{4};\ \mathbf{-2})$$

$$V_{\text{jehlanu}} = \frac{1}{3}\cdot S_p \cdot v = \frac{1}{3}\cdot\left[0\cdot(-2) + 0\cdot 4 + 5\cdot(-2)\right] = \frac{1}{3}\cdot(0+0-10) = \left|-\frac{10}{3}\right| = \frac{10}{3} = \mathbf{3{,}33}$$

Příklad 50 / strana 25

Vypočtěte moment síly $\vec{F}$ (3; 4; 2) [N] působící v bodě A (3; 1; 0) vzhledem k počátku a jeho velikost.

$$\vec{r} = \overrightarrow{0A} = A - 0 = (3-0;1-0;0-0) = (\mathbf{3};\mathbf{1};\mathbf{0})\,[\mathbf{m}]$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (2-0)i - (6-0)j + (12-3)k =$$

$$= \mathbf{2i - 6j + 9k} = (\mathbf{2};-\mathbf{6};\ \mathbf{9})\,[\mathbf{N}\cdot\mathbf{m}]$$

$$|\vec{M}| = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 9^2} = \sqrt{4+36+81} = \sqrt{121} = \mathbf{11\ N\cdot m}$$

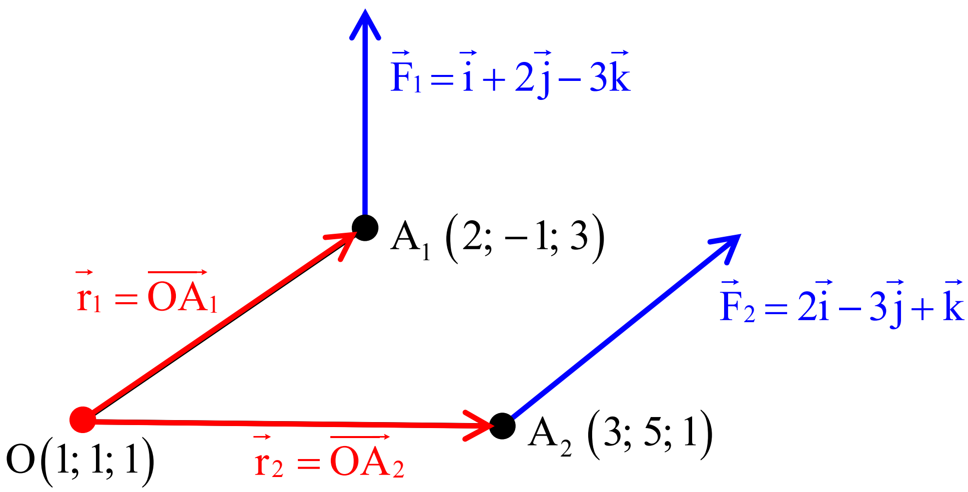
Příklad 51 / strana 25

Určete výsledný moment $\vec{M}$ síly $\vec{F}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}\,[\mathrm{N}]$, která působí v bodě A_1 (2; -1; 3) [m] a síly $\vec{F}_2 = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}\,[\mathrm{N}]$ s působištěm v bodě A_2 (3; 5; 1) [m] vzhledem k bodu O (1; 1; 1) [m].

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$\vec{M}_{12} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$



$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA}_1 = A_1 - O = (2-1;-1-1;3-1) = (\mathbf{1};-\mathbf{2};\ \mathbf{2})\,[\mathbf{m}]$$

$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{OA}_2 = A_2 - O = (3-1;\ 5-1;\ 1-1) = (\mathbf{2};\mathbf{4};\mathbf{0})\,[\mathbf{m}]$$

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (6-4)i - (-3-2)j + (2-(-2))k = \mathbf{2i + 5j + 4k} = (\mathbf{2};\mathbf{5};\mathbf{4})\,[\mathbf{N}\cdot\mathbf{m}]$$

$$\overrightarrow{M_2} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (4-0)i - (2-0)j + (-6-8)k = \mathbf{4i - 2j - 14k} = (\mathbf{4; -2; -14})\,[\mathbf{N \cdot m}]$$

$$\overrightarrow{M_{12}} = \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2} = \left(2+4;\ 5+(-2);\ 4+(-14)\right) = (\mathbf{6; 3; -10})\,[\mathbf{N \cdot m}]$$

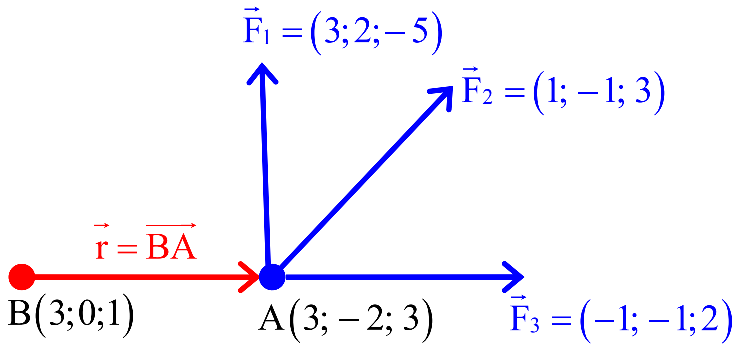
$$\left|\overrightarrow{M_{12}}\right| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-10)^2} = \sqrt{36+9+100} = \sqrt{145} = 12{,}0416 \doteq \mathbf{12\ N \cdot m}$$

Příklad 52 / strana 25

Na těleso působí tři síly $\vec{F}_1 = (3; 2; -5)\,[\mathrm{N}]$, $\vec{F}_2 = (1; -1; 3)\,[\mathrm{N}]$ a $\vec{F}_3 = (-1; -1; 2)\,[\mathrm{N}]$ v bodě A (3; -2; 3) [m]. Určete celkový moment sil vzhledem k bodu B (3; 0; 1) [m], jeho velikost a jeho směrové úhly.

$$\vec{F}_{123} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$\overrightarrow{M_{123}} = \vec{r} \times \vec{F}_{123}$$



$$\vec{r} = \overrightarrow{BA} = A - B = (3-3; -2-0; 3-1) = (\mathbf{0; -2; 2})\,[\mathbf{m}]$$

$$\vec{F}_{123} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \left(3+1+(-1);\ 2+(-1)+(-1);\ -5+3+2\right) = (\mathbf{3; 0; 0})\,[\mathbf{N}]$$

$$\overrightarrow{M_{123}} = \vec{r} \times \vec{F}_{123} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (0-0)i - (0-6)j + (0-(-6))k = \mathbf{6j + 6k} = (\mathbf{0; 6; 6})\,[\mathbf{N \cdot m}]$$

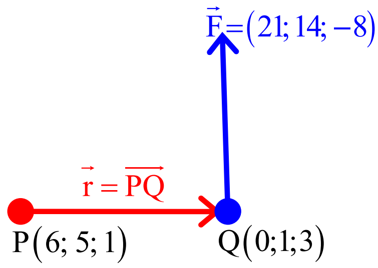
$$\left|\overrightarrow{M_{123}}\right| = \sqrt{0^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{0+36+36} = \sqrt{72} = 8{,}4853 \doteq \mathbf{8{,}5\ N \cdot m}$$

$$\cos\alpha = \frac{m_{123_x}}{\left|\overrightarrow{M_{123}}\right|} = \frac{0}{8{,}4853} = \mathbf{0} \qquad \alpha = \mathbf{90^\circ} \qquad \cos\beta = \frac{m_{123_y}}{\left|\overrightarrow{M_{123}}\right|} = \frac{6}{8{,}4853} \doteq 0{,}7071 \qquad \beta \doteq \mathbf{45^\circ}$$

$$\cos\gamma = \frac{m_{123_z}}{\left|\overrightarrow{M_{123}}\right|} = \frac{6}{8{,}4853} \doteq 0{,}7071 \qquad \gamma = \mathbf{45^\circ}$$

Příklad 53 / strana 25

Určete velikost a směr momentu síly $\vec{F}(21;14;-8)\,[\mathrm{N}]$, která působí v bodě Q (0; 1; 3) [m] vzhledem k P (6; 5; 1) [m].



$$\vec{r} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (0-6; 1-5; 3-1) = (\mathbf{-6; -4; 2})\,[\mathbf{m}]$$

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & -4 & 2 \\ 21 & 14 & -8 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 14 & -8 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 21 & -8 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} -6 & -4 \\ 21 & 14 \end{vmatrix} =$$

$$= (32-28)i - (48-42)j + (-84-(-84))k = \mathbf{4i - 6j + 0k} = (\mathbf{4; -6; 0})\,[\mathbf{N\cdot m}]$$

$$|\vec{M}| = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 0^2} = \sqrt{16+36+0} = \sqrt{52} = \mathbf{7{,}2111\ N\cdot m}$$

$$\cos\alpha = \frac{m_x}{|\vec{M}|} = \frac{4}{7{,}2111} \doteq \mathbf{0{,}5547} \qquad \alpha = \mathbf{56^\circ\,18'}$$

$$\cos\beta = \frac{m_y}{|\vec{M}|} = \frac{-6}{7{,}2111} \doteq \mathbf{-0{,}8321} \qquad \beta = \mathbf{146^\circ\,18'}$$

$$\cos\gamma = \frac{m_z}{|\vec{M}|} = \frac{0}{7{,}2111} = \mathbf{0} \qquad \gamma = \mathbf{90^\circ}$$

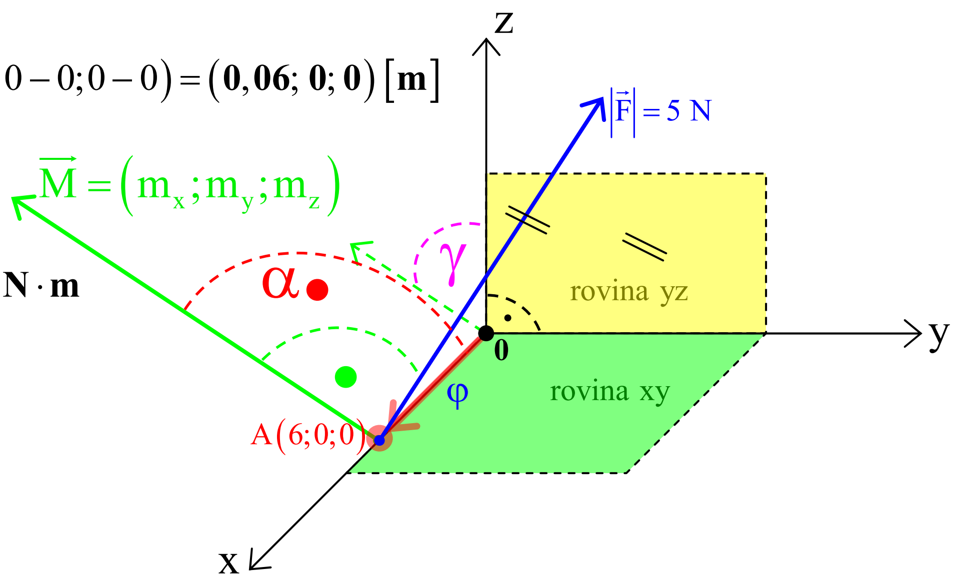
Příklad 54 / strana 25

Vypočítejte souřadnice a velikost momentu síly $\vec{F}$, která vychází z bodu A(6; 0; 0) [cm], vzhledem k počátku, je-li $|\vec{F}| = 5\ \mathrm{N}$ a úhel φ, který svírá síla $\vec{F}$ s rovinou xy je 60° v kladném směru osy z, přičemž síla $\vec{F}$ je rovnoběžná s rovinou yz.

$$\vec{r} = \overrightarrow{0A} = A - 0 = (0{,}06-0; 0-0; 0-0) = (\mathbf{0{,}06; 0; 0})\,[\mathbf{m}]$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{0{,}06^2} = \mathbf{0{,}06\ m}$$

$$|\vec{M}| = |\vec{r}|\cdot|\vec{F}| = 0{,}06\cdot 5 = \mathbf{0{,}3\ N\cdot m}$$



$\vec{M}$ svírá s osou x úhel $\alpha \Rightarrow$ z obr. $\alpha = 90°$, protože $\vec{M} \perp \vec{r}$

$$\cos\alpha = \frac{m_x}{|\vec{M}|} \quad \Rightarrow \quad m_x = \cos\alpha \cdot |\vec{M}| = \cos(90°) \cdot 0{,}3 = 0 \cdot 0{,}3 = \mathbf{0\ N \cdot m}$$

$\vec{M}$ svírá s osou y úhel $\beta \Rightarrow$ z obr. $\beta = \varphi + 90° = 60° + 90° = \mathbf{150°}$, protože $\vec{M} \perp \vec{F}$

$$\cos\beta = \frac{m_y}{|\vec{M}|} \quad \Rightarrow \quad m_y = \cos\beta \cdot |\vec{M}| = \cos(150°) \cdot 0{,}3 = -0{,}8660 \cdot 0{,}3 = \mathbf{-0{,}2598\ N \cdot m}$$

$\vec{M}$ svírá s osou z úhel $\gamma \Rightarrow \gamma = 60°$, protože $\gamma = \beta - 90° = 150° - 90° = \mathbf{60°}$

$$\cos\gamma = \frac{m_z}{|\vec{M}|} \quad \Rightarrow \quad m_z = \cos\gamma \cdot |\vec{M}| = \cos(60°) \cdot 0{,}3 = 0{,}5 \cdot 0{,}3 = \mathbf{0{,}15\ N \cdot m}$$

$$\vec{M} = (m_x;\ m_y;\ m_z) = (\mathbf{0};\ \mathbf{-0{,}2598};\ \mathbf{0{,}15})\ [\mathbf{N \cdot m}]$$

Příklad 55 / strana 25

Určete celkový moment síly a jeho velikost, jestliže na těleso působí síly

$\vec{F}_1(1; -2; 3)\,[\mathrm{N}]$ a $\vec{F}_2(3; 2; 0)\,[\mathrm{N}]$ v bodě B (2; 0; 2) [m] vzhledem k bodu

A (0; -1; 1) [m].

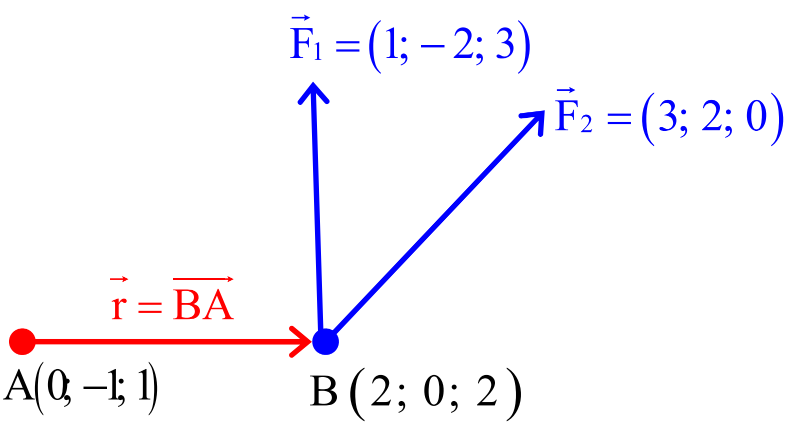
$$\vec{r} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2-0;\ 0-(-1);\ 2-1) = (\mathbf{2};\ \mathbf{1};\ \mathbf{1})\ [\mathbf{m}]$$

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (1+3;\ -2+2;\ 3+0) = (\mathbf{4};\mathbf{0};\mathbf{3})\ [\mathbf{N}]$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_{12} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = (3-0)i - (6-4)j + (0-4)k =$$

$$= \mathbf{3i - 2j - 4k} = (\mathbf{3};\ \mathbf{-2};\ \mathbf{-4})\ [\mathbf{N \cdot m}]$$

$$|\vec{M}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+4+16} = \sqrt{29} \doteq \mathbf{5{,}3852\ \ N \cdot m}$$



Limity

Příklad 6.1 / strana 39

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x}{x^2-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(x^2+3\right)}{x\cdot\left(x-2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3}{x-2}=\frac{0^2+3}{0-2}=-\mathbf{\frac{3}{2}}$$

Příklad 6.2 / strana 39

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}=\frac{2}{5}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{\sin x}=\frac{2}{5}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}=\frac{2}{5}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x\cdot\cos x}=\frac{2}{5}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\cos 0^\circ}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1}=\mathbf{\frac{2}{5}}$$

Příklad 6.3 / strana 39

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{3x}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\cos 0^\circ}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}=\mathbf{\frac{1}{3}}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Příklad 6.4 / strana 40

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+1\right)^3-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x^2+3x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x^2+3x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(x^2+3x+3\right)}{x}=\lim_{x\to 0}x^2+3x+3=0^2+3\cdot 0+3=\mathbf{3}$$

$\left(x+1\right)^3$ jsme rozložili podle vzorce $\left(a+b\right)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Příklad 6.5 / strana 40

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x+1)\cdot(x-1)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{x+1-2}{(x+1)\cdot(x-1)}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{x-1}{(x+1)\cdot(x-1)}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+1)}=\frac{1}{1+1}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

x^2-1 jsme rozložili podle vzorce $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$

Příklad 6.6 / strana 40

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$$ do rovnice dostadíme $x=t^3$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{t^3}-1}{\sqrt{t^3}-1}=\lim_{x\to1}\frac{t-1}{\sqrt{t^3}-1}\cdot\frac{\sqrt{t^3}+1}{\sqrt{t^3}+1}=\lim_{x\to1}\frac{(t-1).\left(\sqrt{t^3}+1\right)}{\left(\sqrt{t^3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{t^3}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(t-1).\left(\sqrt{t^3}+1\right)}{t^3-1}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(t-1)\cdot\left(\sqrt{t^3}+1\right)}{(t-1)\cdot\left(t^2+t+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{t^3}+1\right)}{\left(t^2+t+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{t^3}+1\right)}{t.(t+1+1)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt[3]{x}\cdot\left(\sqrt[3]{x}+1+1\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1}+1\right)}{\sqrt[3]{1}\cdot\left(\sqrt[3]{1}+1+1\right)}=\frac{1+1}{1\cdot(1+1+1)}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

$x=t^3 \Rightarrow t=\sqrt[3]{x}$

Příklad 6.8 / strana 40

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=3\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=3\cdot1=\mathbf{3}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Příklad 6.9 / strana 40

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=2\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}=2\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=2\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{(x+2)-2}=2\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{x}=2\cdot\lim_{x\to0}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)=$$

$$=2\cdot\left(\sqrt{0+2}+\sqrt{2}\right)=2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)=2\cdot\left(2\sqrt{2}\right)=\mathbf{4\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Příklad 6.10 / strana 40

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\cdot \sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)}{x.\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{x.\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\sin^2 x}{x.\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x.\sin x}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x.\sin x}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\sin x}{x.\sin x}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2\cdot 1=\mathbf{2}$$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ $\qquad$ $\sin^2 x+\cos^2 x=1 \;\Rightarrow\; 1-\cos^2 x=\sin^2 x$

Příklad 6.12 / strana 40

$$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg} t}{\sin 2t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sin t}{\cos t}}{2\cdot\sin t\cdot\cos t}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\sin t\cdot\cos^2 t}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\cos^2 t}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\cos 0^\circ\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1)^2}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

Derivace

Příklad 7.1 / strana 41

Určete derivaci funkce $y = x^4 - 3x^2 - 5x + 6$:

$$y = x^4 - 3x^2 - 5x + 6$$
$$y' = \mathbf{4x^3 - 6x - 5}$$

Příklad 7.2 / strana 41

Určete derivaci funkce $y = x^2 \cdot (x - 1)$:

$$y = x^2 \cdot (x - 1) \qquad (u.v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$
$$y' = 2x \cdot (x - 1) + x^2 = \mathbf{3x^2 - 2x}$$

Příklad 7.3 / strana 41

Určete derivaci funkce $y = x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3}$:

$$y = x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3} = x^2 \cdot x^{\frac{3}{4}} \qquad (u.v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$
$$y' = 2x \cdot x^{\frac{3}{4}} + x^2 \cdot \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} = 2x^{\left(1+\frac{3}{4}\right)} + \frac{3}{4} x^{\left(2-\frac{1}{4}\right)} = 2x^{\frac{7}{4}} + \frac{3}{4} x^{\frac{7}{4}} = \mathbf{\frac{11}{4} x^{\frac{7}{4}}}$$

Příklad 7.4 / strana 41

Určete derivaci funkce $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$:

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = x^{-1} + x^{-2} + x^{-3}$$
$$y' = -x^{(-1-1)} - 2x^{(-2-1)} - 3x^{(-3-1)} = -x^{-2} - 2x^{-3} - 3x^{-4} = \mathbf{-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}}$$

Příklad 7.5 / strana 41

Určete derivaci funkce $y = \cos 2x + \sin^2 x$:

$$y = \cos 2x + \sin^2 x$$
$$y' = -\sin 2x \cdot 2 + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = -\sin 2x \cdot 2 + \sin 2x =$$
$$= \sin 2x \cdot \left[(-1) \cdot 2 + 1\right] = \sin 2x \cdot (-1) = \mathbf{-\sin 2x}$$

Příklad 7.6 / strana 41

Určete derivaci funkce $y = x \cdot (\ln x) - x$:

$$y = x \cdot (\ln x) - x \qquad y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$
$$y' = \left[(1 \cdot \ln x) + \left(x \cdot \frac{1}{x}\right)\right] - 1 = \left(\ln x + \frac{x}{x}\right) - 1 = \ln x + 1 - 1 = \mathbf{\ln x}$$

Příklad 7.7 / strana 41

Určete derivaci funkce $y = \frac{1}{2}\sin(3x-2)$:

$$y = \frac{1}{2}\sin(3x-2) \qquad \sin(3x-2) \text{ je funkce složená}$$
$$y' = \frac{1}{2}\left[\cos(3x-2) \cdot 3\right] = \mathbf{\frac{3}{2}\cos(3x-2)}$$

Příklad 7.8 / strana 42

Určete derivaci funkce $y = \frac{2x^2-1}{3x+4}$:

$$y = \frac{2x^2-1}{3x+4} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$
$$y' = \frac{(2 \cdot 2x) \cdot (3x+4) - (2x^2-1) \cdot 3}{(3x+4)^2} = \frac{4x \cdot (3x+4) - 3 \cdot (2x^2-1)}{(3x+4)^2} =$$
$$= \frac{12x^2 + 16x - (6x^2-3)}{(3x+4)^2} = \frac{12x^2 + 16x - 6x^2 + 3}{(3x+4)^2} = \frac{6x^2 + 16x + 3}{(3x+4)^2} = \mathbf{\frac{6x^2+16x+3}{9x^2+24x+16}}$$

Příklad 7.9 / strana 42

Určete derivaci funkce $y = \dfrac{2x^2}{(2-x)^2}$:

$$y = \frac{2x^2}{(2-x)^2} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2} \qquad \text{přičemž } (2-x)^2 \text{ je funkce složená}$$

$$y' = \frac{\left[(2\cdot 2x).(2-x)^2\right] - \left[2x^2\cdot 2(2-x)\cdot(-1)\right]}{\left[(2-x)^2\right]^2} = \frac{\left[(4x).(2-x)^2\right] - \left[4x^2\cdot(2-x)\cdot(-1)\right]}{(2-x)^4} =$$

$$= \frac{\left[(4x).(4-4x+x^2)\right] - \left[-4x^2\cdot(2-x)\right]}{(2-x)^4} = \frac{\left[16x-16x^2+4x^3\right] - \left[-8x^2+4x^3\right]}{(2-x)^4} =$$

$$= \frac{16x-16x^2+4x^3+8x^2-4x^3}{(2-x)^4} = \frac{16x-8x^2}{(2-x)^4} = \frac{8x\cdot(2-x)}{(2-x)^4} = \frac{\mathbf{8x}}{(\mathbf{2-x})^3}$$

Příklad 7.10 / strana 42

Určete derivaci funkce $y = \dfrac{1-2x^2}{(1-2x)^2}$:

$$y = \frac{1-2x^2}{(1-2x)^2} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2} \qquad \text{přičemž } (1-2x)^2 \text{ je funkce složená}$$

$$y' = \frac{\left[(-4x)\cdot(1-2x)^2\right] - \left[(1-2x^2)\cdot 2\cdot(1-2x)\cdot(-2)\right]}{\left[(1-2x)^2\right]^2} =$$

$$= \frac{\left[(-4x)\cdot(1-2x)\cdot(1-2x)\right] - \left[(1-2x^2)\cdot 2\cdot(1-2x)\cdot(-2)\right]}{(1-2x)^4} =$$

$$\frac{(1-2x)\cdot\left\{\left[(-4x)\cdot(1-2x)\right] - \left[(1-2x^2)\cdot 2\cdot(-2)\right]\right\}}{(1-2x)^4} =$$

$$= \frac{\left[(-4x)\cdot(1-2x)\right] - \left[(-4)(1-2x^2)\right]}{(1-2x)^3} = \frac{(-4x+8x^2) - (-4+8x^2)}{(1-2x)^3} =$$

$$= \frac{-4x+8x^2+4-8x^2}{(1-2x)^3} = \frac{4-4x}{(1-2x)^3} = \frac{\mathbf{4\cdot(1-x)}}{(\mathbf{1-2x})^3}$$

Příklad 7.11 / strana 42

Určete derivaci funkce $y=\sqrt{1+\sqrt{x}}$:

$$y=\sqrt{1+\sqrt{x}}=\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ je funkce složená}$$

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4\cdot\sqrt{1+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}}=\frac{1}{4\cdot\sqrt{x+x^{\frac{3}{2}}}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\cdot\sqrt{x+x\cdot\sqrt{x}}}}$$

Příklad 7.12 / strana 42

$$y=x\cdot\sqrt{x^2-1}=x\cdot\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (u.v)'=u'\cdot v+u\cdot v' \qquad \text{přičemž } \left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}} \text{ je funkce složená}$$

$$y'=\left[1\cdot\sqrt{x^2-1}\right]+\left[x\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\right]=\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}x\cdot 2x\cdot\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\sqrt{x^2-1}+x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x^2-1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right).\left(\sqrt{x^2-1}\right)+x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2-1+x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{\mathbf{2x^2-1}}{\mathbf{\sqrt{x^2-1}}}$$

Určete derivaci funkce $y=x\cdot\sqrt{x^2-1}$:

Příklad 7.13 / strana 42

Určete derivaci funkce $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$:

$$y=\frac{1+e^x}{1-e^x} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$y'=\frac{\left[e^x\cdot\left(1-e^x\right)\right]-\left[\left(1+e^x\right)\cdot\left(-e^x\right)\right]}{\left(1-e^x\right)^2}=\frac{e^x\cdot\left(1-e^x\right)+e^x\cdot\left(1+e^x\right)}{\left(1-e^x\right)^2}=$$

$$=\frac{e^x-\left(e^x\right)^2+e^x+\left(e^x\right)^2}{\left(1-e^x\right)^2}=\frac{\mathbf{2e^x}}{\mathbf{\left(1-e^x\right)^2}}$$

Příklad 7.14 / strana 42

Určete derivaci funkce $y=\sqrt{1-x}$:

$$y=\sqrt{1-x}=(1-x)^{\frac{1}{2}} \qquad (1-x)^{\frac{1}{2}} \text{ je funkce složená}$$

$$y'=\frac{1}{2}\cdot(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\cdot\sqrt{1-x}}}$$

Příklad 7.15 / strana 42

Určete derivaci funkce $y=x^2\cdot\log_3 x$:

$$y=x^2\cdot\log_3 x \qquad (u.v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

$$y'=(2x\cdot\log_3 x)+\left(x^2\cdot\frac{1}{x\cdot\ln a}\right)=2x\cdot\log_3 x+\frac{x}{\ln 3}=x\cdot\log_3 x^2+\frac{x}{\ln 3}=\mathbf{x}\cdot\left(\mathbf{\log_3 x^2}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\ln 3}}\right)$$

Příklad 7.16 / strana 42

Určete derivaci funkce $y=\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$:

$$y=\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=\ln(\operatorname{tg}0,5x)$$

$$y'=\frac{1}{\operatorname{tg}0,5x}\cdot\frac{1}{\cos^2 0,5x}=\frac{1}{\frac{\sin 0,5x}{\cos 0,5x}}\cdot\frac{1}{\cos^2 0,5x}=\frac{\cos 0,5x}{\sin 0,5x}\cdot\frac{1}{\cos^2 0,5x}=$$

$$=\frac{1}{\sin 0,5x\cdot\cos 0,5x}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\sin x}} \qquad \sin 2x=\sin x\cdot\cos x \quad\Rightarrow\quad \sin 0,5x\cdot\cos 0,5x=\sin x$$

Příklad 7.17 / strana 43

Určete derivaci funkce $y=\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg}x$:

$$y=\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg}x \qquad \frac{1}{\cos x}=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$y'=\frac{0.\cos x-1\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\sin x+1}{\cos^2 x}=\frac{\sin x+1}{1-\sin^2 x}=\frac{\sin x+1}{1-(\sin x)^2}=$$

$$=\frac{\sin x+1}{(1-\sin x)\cdot(1+\sin x)}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-\sin x}}$$

$1-(\sin x)^2$ jsme rozložili podle vzorce $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$

Příklad 7.18 / strana 43

Určete derivaci funkce $y=\ln\frac{e^x}{x^2+1}$:

$$y'=\frac{1}{\frac{e^x}{x^2+1}}\cdot\frac{\left[e^x\cdot(x^2+1)\right]-\left[e^x\cdot 2x\right]}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1}{e^x}\cdot\frac{e^x\cdot(x^2+1-2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x\cdot(x^2+1)\cdot(x^2-2x+1)}{e^x\cdot(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{e^x\cdot(x^2+1)\cdot(x^2-2x+1)}{e^x\cdot(x^2+1)\cdot(x^2+1)}=\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}=\frac{\mathbf{(x-1)^2}}{\mathbf{x^2+1}}$$

x^2-2x+1 je vzorec $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$y=\ln\frac{e^x}{x^2+1}$ je složená funkce, kde $\frac{e^x}{x^2+1}=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$

Příklad 7.19 / strana 43

Určete derivaci funkce $y=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$:

$$y=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\qquad\qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$y'=\frac{\left[\cos x\cdot(\sin x+\cos x)\right]-\left[\sin x\cdot(\cos x-\sin x)\right]}{(\sin x+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{\left(\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x\right)-\left(\sin x\cdot\cos x-\sin^2 x\right)}{(\sin x+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x-\sin x\cdot\cos x+\sin^2 x}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sin^2 x+2\cdot\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x}=\frac{1}{1+2\cdot\sin x\cdot\cos x}=\mathbf{\frac{1}{1+\sin 2x}}$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1\qquad\qquad 2\cdot\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$$

Příklad 7.20 / strana 43

Určete derivaci funkce $y=\sqrt{4x-1}+\operatorname{arccotg}\sqrt{4x-1}$:

$$y=\sqrt{4x-1}+\operatorname{arccotg}\sqrt{4x-1}=(4x-1)^{\frac{1}{2}}+\operatorname{arccotg}(4x-1)^{\frac{1}{2}}\qquad (u+v)'=u'+v'$$

$\sqrt{4x-1}$ je funkce složená; $\operatorname{arccotg}\sqrt{4x-1}$ je dvojitá složená funkce

$$y'=\left[\frac{1}{2}\cdot(4x-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4\right]+\left[\frac{-1}{1+\left(\sqrt{4x-1}\right)^2}\cdot\frac{1}{2}(4x-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4\right]=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4x-1}}-\frac{2}{\sqrt{4x-1}\cdot\left[1+\left(\sqrt{4x-1}\right)^2\right]}=\frac{2}{\sqrt{4x-1}}-\frac{2}{\sqrt{4x-1}\cdot(1+4x-1)}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4x-1}}-\frac{2}{\sqrt{4x-1}\cdot 4x}=\frac{2\cdot 4x-2}{4x\cdot\sqrt{4x-1}}=\frac{8x-2}{4x\cdot\sqrt{4x-1}}=\frac{2\cdot(4x-1)}{4x\cdot\sqrt{4x-1}}=$$

$$=\frac{(4x-1)}{2x\cdot\sqrt{4x-1}}\cdot\frac{\sqrt{4x-1}}{\sqrt{4x-1}}=\frac{(4x-1)\cdot\sqrt{4x-1}}{2x\cdot\sqrt{4x-1}\cdot\sqrt{4x-1}}=\frac{(4x-1)\cdot\sqrt{4x-1}}{2x\cdot\left(\sqrt{4x-1}\right)^2}=$$

$$=\frac{(4x-1)\cdot\sqrt{4x-1}}{2x\cdot(4x-1)}=\mathbf{\frac{\sqrt{4x-1}}{2x}}$$

Příklad 7.21 / strana 43

Určete derivaci funkce $y=\frac{1-\cos x}{1+\sin x}$:

$$y=\frac{1-\cos x}{1+\sin x} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$y'=\frac{\left[0-(-\sin x)\right]\cdot\left[1+\sin x\right]-\left[(1-\cos x)\cdot(0+\cos x)\right]}{(1+\sin x)^2}=$$

$$=\frac{\sin x\cdot(1+\sin x)-\left[(1-\cos x)\cdot\cos x\right]}{(1+\sin x)^2}=\frac{\sin x+\sin^2 x-\left(\cos x-\cos^2 x\right)}{(1+\sin x)^2}=$$

$$=\frac{\sin x+\sin^2 x-\cos x+\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+\sin x-\cos x}{(1+\sin x)^2}=\frac{\mathbf{1+\sin x-\cos x}}{\mathbf{(1+\sin x)^2}}$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

Příklad 7.22 / strana 43

Určete derivaci funkce $y=x^2\cdot\ln x$:

$$y=x^2\cdot\ln x \qquad (u.v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

$$y'=2\cdot x\cdot\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=2\cdot x\cdot\ln x+x=x\cdot(2\ln x+1)=\mathbf{x\cdot\left(\ln x^2+1\right)}$$

Příklad 7.23 / strana 43

Určete derivaci funkce $y=\frac{x^2+4}{e^x}$:

$$y=\frac{x^2+4}{e^x} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$y'=\frac{\left(2x\cdot e^x\right)-\left[\left(x^2+4\right)\cdot e^x\right]}{\left(e^x\right)^2}=\frac{e^x\cdot\left(2x-x^2-4\right)}{\left(e^x\right)^2}=\frac{\mathbf{-x^2+2x-4}}{\mathbf{e^x}}$$

Příklad 7.24 / strana 43

Určete derivaci funkce $y=\ln\frac{x-2}{(x-3)^2}$:

$y = \ln \frac{x-2}{(x-3)^2}$ jde o složenou funkci, přičemž $\frac{x-2}{(x-3)^2}$ je $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$$y' = \frac{1}{\frac{x-2}{(x-3)^2}} \cdot \frac{\left[1 \cdot (x-3)^2\right] - \left[(x-2) \cdot 2 \cdot (x-3) \cdot 1\right]}{\left[(x-3)^2\right]^2} = \frac{(x-3)^2}{x-2} \cdot \frac{(x-3)^2 - 2 \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{1}{x-2} \cdot \frac{(x-3)^2 - 2 \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{(x-3)^2} = \frac{(x-3) \cdot \left[(x-3) - 2 \cdot (x-2)\right]}{(x-2) \cdot (x-3)^2} = \frac{x-3-2x+4}{(x-2) \cdot (x-3)} =$$

$$= \frac{\mathbf{1-x}}{\mathbf{(x-2) \cdot (x-3)}}$$

Příklad 7.25 / strana 43

Určete derivaci funkce $y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$:

$y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ je funkce složená, příčemž $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ je $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$$y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \ln \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$y' = \frac{1}{\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}} \cdot \frac{\left[\frac{1}{2}\cdot(1+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]-\left[(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)\right]}{\left[(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]^2} =$$

$$= \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\left[\frac{1}{2}\cdot(1+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]-\left[-\frac{1}{2}\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]}{\left[(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]^2} =$$

$$= \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\frac{1}{2}\cdot\left\{\left[(1+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]-\left[-1\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]\right\}}{\left[(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]^2} =$$

$$= \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\left[\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]+\left[(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\right]}{2\cdot\left[(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]^2} =$$

$$= \frac{\color{red}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}+\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}}{2\cdot\color{red}{\left[(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]^2}} = \frac{\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}+\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}}{2\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}+(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}}}{2\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\dfrac{1-x+1+x}{(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}}}{2\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{2}{(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}}}{2\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\color{green}{2}}{\color{green}{2}\cdot\color{red}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}\cdot\color{blue}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\cdot\color{red}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}\cdot\color{blue}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}} =$$

$$= \frac{1}{\color{red}{(1+x)\cdot(1-x)}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-x^2}} \qquad \color{red}{(1+x)\cdot(1-x) = \mathbf{1-x^2} \text{ podle } (a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2}$$

Příklad 7.26 / strana 43

Určete derivaci funkce $y = e^{\sin 2x}$:

$y = e^{\sin 2x}$ jde o složenou funkci

$y' = e^{\sin 2x} \cdot 2 \cdot \cos 2x = \mathbf{2 \cdot \cos 2x \cdot e^{\sin 2x}}$ $\qquad (e^{2x})' = e^{2x} \cdot 2$

Příklad 7.27 / strana 44

Určete derivaci funkce $y = \sqrt{1 + \operatorname{tg} 2x}$:

$y = \sqrt{1 + \operatorname{tg} 2x} = (1 + \operatorname{tg} 2x)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ je funkce složená

$$y' = \frac{1}{2} \cdot (1 + \operatorname{tg} 2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} 2x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} = \mathbf{\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} 2x} \cdot \cos^2 2x}}$$

Příklad 7.28 / strana 44

Určete derivaci funkce $y = x \cdot \sqrt{x^2 - 1}$:

$y = x \cdot \sqrt{x^2 - 1} = x \cdot (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad (u.v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$y' = 1 \cdot \sqrt{x^2 - 1} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \sqrt{x^2 - 1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} \cdot \sqrt{x^2 - 1} + x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \frac{x^2 - 1 + x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \mathbf{\frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}}$$

Příklad 7.30 / strana 44

Určete derivaci funkce $y = x^2 \cdot \operatorname{tg} x$:

$y = x^2 \cdot \operatorname{tg} x$ $\qquad (u.v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$y' = 2x \cdot \operatorname{tg} x + x^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2x \cdot \sin x}{\cos x} + \frac{x^2}{\cos^2 x} = \frac{2 \cdot x \cdot \sin x \cdot \cos x + x^2}{\cos^2 x} = \mathbf{\frac{x \cdot \sin 2x + x^2}{\cos^2 x}}$$

$2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$

Příklad 7.31 / strana 44

Určete derivaci funkce $y=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\operatorname{arctg}x$:

$$y=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\operatorname{arctg}x=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}+\operatorname{arctg}x$$

$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ je funkce složená

$$y'=\frac{1}{\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}}\cdot\frac{\left[\frac{1}{2}\cdot(1+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]-\left[(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)\right]}{\left[(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]^2}+\frac{1}{1+x^2}=$$

$$=\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\left[\frac{1}{2}\cdot(1+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]-\left[-\frac{1}{2}\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]}{\left[(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]^2}+\frac{1}{1+x^2}=$$

$$=\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot\left\{\left[(1+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]-\left[-1\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]\right\}}{\left[(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]^2}+\frac{1}{1+x^2}=$$

$$=\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\left[\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]+\left[(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\right]}{2\cdot\left[(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]^2}+\frac{1}{1+x^2}=$$

$$=\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}+\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}}{2\cdot\left[(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]^2}+\frac{1}{1+x^2}=\frac{\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}+\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}}{2\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{1+x^2}=$$

$$=\frac{\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}+(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}}}{2\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{1+x^2}=\frac{\frac{1-x+1+x}{(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}}}{2\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{1+x^2}=$$

$$=\frac{\dfrac{2}{(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}}}{2\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{1+x^2}=\frac{2}{2\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{1+x^2}=$$

$$=\frac{1}{(1+x)\cdot(1-x)}+\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1+x^2}=\frac{1+x^2+1-x^2}{(1-x^2)\cdot(1+x^2)}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1-x^4}}$$

Příklad 7.32 / strana 44

Určete derivaci funkce $y=\sin^2(\cos 3x)$:

$y=\sin^2(\cos 3x)$ je trojitě složená!!!

$$y'=2\cdot\sin(\cos 3x)\cdot\cos(\cos 3x)\cdot(-\sin 3x)\cdot 3=(\mathbf{-3\cdot\sin 3x})\cdot\mathbf{\sin(2\cdot\cos 3x)}$$

$2\cdot\sin(\cos 3x)\cdot\cos(\cos 3x)=\mathbf{\sin(2\cdot\cos 3x)}$ podle $2\cdot\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$

Příklad 7.33 / strana 44

Určete derivaci funkce $y=\sqrt{\sin^2 x}$:

$y=\sqrt{\sin x^2}=\left(\sin x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ je složená funkce

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\left(\sin x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos x^2\cdot 2x=\frac{1}{\sqrt{\sin x^2}}\cdot x\cdot\cos x^2=\frac{\mathbf{x\cdot\cos x^2}}{\mathbf{\sqrt{\sin x^2}}}$$

Příklad 7.34 / strana 45

Určete derivaci funkce $y=\sin\sqrt{1+x^2}$:

$y=\sin\sqrt{1+x^2}=\sin\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ je funkce složená

$$y'=\cos\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\cos\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot x=\frac{\mathbf{x\cdot\cos\sqrt{1+x^2}}}{\mathbf{\sqrt{1+x^2}}}$$

Příklad 8.1 / strana 45

Určete první a druhou derivaci funkce $y = x^2 \cdot e^{-x}$:

$$y = x^2 \cdot e^{-x} \qquad (u.v)' = u'\cdot v + u \cdot v'$$

$$y' = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} = \mathbf{e^{-x} \cdot \left(2x - x^2\right)}$$

$$y' = e^{-x} \cdot \left(2x - x^2\right) \qquad (u.v)' = u'\cdot v + u \cdot v'$$

$$y'' = e^{-x} \cdot (-1) \cdot \left(2x - x^2\right) + e^{-x} \cdot (2 - 2x) = e^{-x} \cdot (2 - 2x) - e^{-x} \cdot \left(2x - x^2\right) =$$

$$= e^{-x} \cdot \left(2 - 2x - 2x + x^2\right) = \mathbf{e^{-x} \cdot \left(x^2 - 4x + 2\right)}$$

Příklad 8.2 / strana 45

Určete první a druhou derivaci funkce $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$:

$$y = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad \text{je funkce složená, příčemž } \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \text{ je } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$y = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} = \ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$y' = \frac{1}{\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}} \cdot \frac{\left[\frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}\right] - \left[(1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1)\right]}{\left[(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]^2} =$$

$$= \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\left[\frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}\right] - \left[-\frac{1}{2} \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]}{\left[(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]^2} =$$

$$= \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \left\{\left[(1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}\right] - \left[-1 \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]\right\}}{\left[(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]^2} =$$

$$=\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\left[\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]+\left[(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\right]}{2\cdot\left[(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]^2}=$$

$$=\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}+\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}}{2\cdot\left[(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]^2}=\frac{\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}+\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}}{2\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}+(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}}}{2\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1-x+1+x}{(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}}}{2\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{\frac{2}{(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}}}{2\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{2\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{1}{(1+x)\cdot(1-x)}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-x^2}}\qquad (1+x)\cdot(1-x)=\mathbf{1-x^2}\text{ podle }(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

$$y'=\frac{1}{1-x^2}\qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$y''=\frac{\left[0\cdot(1-x^2)\right]-\left[1\cdot(-2x)\right]}{(1-x^2)^2}=\frac{\mathbf{2x}}{\mathbf{(1-x^2)^2}}$$

Příklad 8.3 / strana 45

Určete první a druhou derivaci funkce $y=\ln\frac{e^x}{x^2+1}$:

$$y=\ln\frac{e^x}{x^2+1}\qquad \text{je složená funkce, kde }\frac{e^x}{x^2+1}=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$y' = \frac{1}{\frac{e^x}{x^2+1}} \cdot \frac{\left[e^x \cdot (x^2+1)\right] - \left[e^x \cdot 2x\right]}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1}{e^x} \cdot \frac{e^x \cdot (x^2+1-2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x \cdot (x^2+1) \cdot (x^2-2x+1)}{e^x \cdot (x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{e^x \cdot (x^2+1) \cdot (x^2-2x+1)}{e^x \cdot (x^2+1) \cdot (x^2+1)} = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1} = \frac{\mathbf{(x-1)^2}}{\mathbf{x^2+1}}$$

x^2-2x+1 je vzorec $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$

$$y' = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$, kde $(x-1)^2$ je funkce složená

$$y'' = \frac{\left[2 \cdot (x-1) \cdot 1 \cdot (x^2+1)\right] - \left[(x-1)^2 \cdot 2x\right]}{(x^2+1)^2} = \frac{2 \cdot (x-1) \cdot \left[(x^2+1) - x \cdot (x-1)\right]}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot (x-1) \cdot (x^2+1-x^2+x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2 \cdot (x-1) \cdot (x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{\mathbf{2 \cdot (x^2-1)}}{\mathbf{(x^2+1)^2}}$$

Příklad 8.5 / strana 45

Určete první a druhou derivaci funkce $y = \arccos\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$:

$$y = \arccos\sqrt{\frac{1}{1+x^2}} = \arccos\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$ jde o funkci složenou $\frac{1}{1+x^2} = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left\{\frac{\left[0 \cdot (1+x^2)\right] - 2x}{(1+x^2)^2}\right\} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1+x^2}}} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-1}{\sqrt{\frac{1+x^2-1}{1+x^2}}} \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{-x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \left[-\frac{x \cdot \sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^2}\right] = \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} \cdot \frac{x \cdot \sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \cdot \frac{x \cdot \sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+x^2}}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1+x^2}{\left(1+x^2\right)\cdot\left(1+x^2\right)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+x^2}}$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$$

$$y'' = \frac{\left[0\cdot\left(1+x^2\right)\right]-\left(1\cdot 2x\right)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{\mathbf{-2x}}{\left(\mathbf{1+x^2}\right)^{\mathbf{2}}}$$

Příklad 8.6 / strana 45

Určete první a druhou derivaci funkce $y = \dfrac{e^x}{x^2}$:

$$y = \frac{e^x}{x^2} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$$

$$y' = \frac{\left(e^x\cdot x^2\right)-\left(e^x\cdot 2x\right)}{\left(x^2\right)^2} = \frac{e^x\cdot x\cdot\left(x-2\right)}{x^4} = \mathbf{e^x}\cdot\frac{\mathbf{(x-2)}}{\mathbf{x^3}}$$

$$y' = e^x\cdot\frac{(x-2)}{x^3} \qquad (u.v)' = u'\cdot v + u\cdot v',\ \text{přičemž}\ \frac{(x-2)}{x^3}\ \text{podle}\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$$

$$y'' = e^x\cdot\frac{(x-2)}{x^3} + e^x\cdot\frac{\left(1\cdot x^3\right)-\left[(x-2)\cdot 3x^2\right]}{\left(x^3\right)^2} = e^x\cdot\left[\frac{(x-2)}{x^3} + \frac{x^3-3x^2\cdot(x-2)}{x^6}\right] =$$

$$= e^x\cdot\left[\frac{(x-2)}{x^3} + \frac{x^3-3x^3+6x^2}{x^6}\right] = e^x\cdot\frac{x^3\cdot(x-2)+x^3-3x^3+6x^2}{x^6} =$$

$$= e^x\cdot\frac{x^4-2x^3+x^3-3x^3+6x^2}{x^6} = e^x\cdot\frac{x^4-4x^3+6x^2}{x^6} = e^x\cdot\frac{x^2\cdot\left(x^2-4x+6\right)}{x^6} = \mathbf{e^x}\cdot\frac{\mathbf{x^2-4x+6}}{\mathbf{x^4}}$$

Příklad 9 / strana 45

Určete první, druhou a třetí derivaci funkce $y = x^2\cdot e^x$:

$$y = x^2\cdot e^x \qquad (u.v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$y' = 2x\cdot e^x + x^2\cdot e^x = \mathbf{e^x}\cdot\left(\mathbf{x^2+2x}\right)$$

$y' = e^x \cdot \left(x^2 + 2x\right)$ $\qquad (u.v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$y'' = e^x \cdot \left(x^2 + 2x\right) + e^x \cdot (2x + 2) = e^x \cdot \left(x^2 + 2x + 2x + 2\right) = \mathbf{e^x \cdot \left(x^2 + 4x + 2\right)}$

$y'' = e^x \cdot \left(x^2 + 4x + 2\right)$ $\qquad (u.v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$y''' = e^x \cdot \left(x^2 + 4x + 2\right) + e^x \cdot (2x + 4) = e^x \cdot \left(x^2 + 4x + 2 + 2x + 4\right) = \mathbf{e^x \cdot \left(x^2 + 6x + 6\right)}$

Neurčitý integrál

Příklad 1 / strana 54

Vypočtěte:

$$\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$$

$$\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int\frac{(1-x)^2}{x^2} = \int\frac{1-2x+x^2}{x^2}dx = \int\frac{1}{x^2}dx - \int\frac{2x}{x^2}dx + \int\frac{x^2}{x^2}dx =$$

$$= \int x^{-2}dx - 2\int\frac{1}{x}dx + \int dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - 2\ln|x| + x + c = \frac{x^{-1}}{-1} - \ln x^2 + x + c =$$

$$= \mathbf{x - \frac{1}{x} - \ln x^2 + c}$$

Příklad 2 / strana 54

Vypočtěte:

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = \int\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}dx \qquad \text{substituční metoda} \Rightarrow t = 1+\sqrt{x+1} = 1+(x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dt}{dx} = 0 + \frac{1}{2}\cdot(x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1 = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x+1}} \quad \Rightarrow \quad dx = 2\cdot\sqrt{x+1}\,dt \ \text{ dosadíme za } \mathbf{t} \text{ a za } \mathbf{dx}$$

$$\int\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}dx = \int\frac{2\cdot\sqrt{x+1}}{t}dt \qquad 1+\sqrt{x+1} = t \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x+1} = t-1 \ \text{ pro dvojnásobek platí}$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\sqrt{x+1} = 2\cdot(t-1) \qquad \text{místo } 2\cdot\sqrt{x+1} \ \text{ dosadíme } \ 2\cdot(t-1)$$

$$\int\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}dx = \int\frac{2\cdot\sqrt{x+1}}{t}dt = \int\frac{2\cdot(t-1)}{t}dt = \int\frac{2t-2}{t}dt = \int\frac{2t}{t}dt - \int\frac{2}{t}dt =$$

$$= 2\int dt - 2\int\frac{1}{t}dt = 2\cdot t - 2\cdot\ln|t| + c = \mathbf{2\cdot\left(1+\sqrt{x+1}\right) - \ln\left|1+\sqrt{x+1}\right|^2 + c}$$

Příklad 3 / strana 55

Vypočtěte:

$$\int 2x\cdot e^{x^2}dx \qquad \text{volíme metodu substituční}$$

$$\int 2x\cdot e^{x^2}dx \quad \Rightarrow \quad \text{za exponent } x^2 \text{ dosadíme } t \qquad t = x^2$$

$t = x^2$ zderivujeme t $\Rightarrow \frac{dt}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dt}{2x}$ dosadíme výrazu

$$\int 2x \cdot e^t \frac{dt}{2x} = \int e^t dt = e^t + c = \mathbf{e^{x^2} + c}$$

Příklad 4 / strana 55

Vypočtěte:

$\int x \cdot e^x dx$ jde o součin $\Rightarrow$ počítáme pomocí metody per partes

$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = e^x \quad u = e^x \quad v = x \quad v' = 1$

$$\int x \cdot e^x dx = e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1 \cdot dx = \left(e^x \cdot x - e^x\right) + c = \mathbf{e^x \cdot (x - 1) + c}$$

Příklad 5 / strana 55

Vypočtěte:

$\int x^2 \cdot e^x dx$ jde o součin, řešíme metodou per partes

$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = e^x \quad u = e^x \quad v = x^2 \quad v' = 2x$

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x\,dx = x^2 \cdot e^x - 2\int e^x \cdot x\,dx =$$

opět metoda per partes $\Rightarrow \quad u' = e^x \quad u = e^x \quad v = x \quad v' = 1$

$$= x^2 \cdot e^x - 2\int x \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot \left(e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1 \cdot dx\right) =$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2 \cdot \left(e^x \cdot x - e^x\right) + c = x^2 \cdot e^x - 2e^x \cdot x + 2e^x + c =$$

$$= \mathbf{e^x \cdot \left(x^2 - 2x + 2\right) + c}$$

Příklad 6 / strana 55

Vypočtěte:

$\int 2x \cdot \sin x\, dx$ jde o součin, řešíme metodou per partes

$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = \sin x \quad u = -\cos x \quad v = 2x \quad v' = 2$

$$\int 2x \cdot \sin x\, dx = -\cos x \cdot 2x - \int -2 \cdot \cos x\, dx = -2x \cdot \cos x + 2\int \cos x\, dx =$$

$$= \mathbf{-2x \cdot \cos x + 2 \cdot \sin x + c}$$

Příklad 7 / strana 55

Vypočtěte:

$\int x^2 \cdot \sin x \, dx$ jde o součin, řešíme metodou per partes

$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = \sin x \quad u = -\cos x \quad v = x^2 \quad v' = 2x$

$$\int x^2 \cdot \sin x \, dx = -\cos x \cdot x^2 - \int -\cos x \cdot 2x \, dx = -\cos x \cdot x^2 - \int -2x \cdot \cos x \, dx =$$

$= -\cos x \cdot x^2 + 2\int x \cdot \cos x =$ opět per partes $u' = \cos x \quad u = \sin x \quad v = x \quad v' = 1$

$$= -\cos x \cdot x^2 + 2 \cdot \left(\sin x \cdot x - \int \sin x \cdot 1 \cdot dx\right) = -\cos x \cdot x^2 + 2 \cdot (\sin x \cdot x + \cos x) + c =$$

$$= \mathbf{-x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x + c}$$

Příklad 8 / strana 55

Vypočtěte:

$\int x \cdot \cos x \, dx$ jde o součin, řešíme metodou per partes

$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = \cos x \quad u = \sin x \quad v = x \quad v' = 1$

$$\int x \cdot \cos x \, dx = \sin x \cdot x - \int \sin x \cdot 1 \cdot dx = \sin x \cdot x - \int \sin x \, dx = \mathbf{x \cdot \sin x + \cos x + c}$$

Příklad 9 / strana 55

Vypočtěte:

$\int x^2 \cdot \cos x \, dx$ jde o součin, řešíme metodou per partes

$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = \cos x \quad u = \sin x \quad v = x^2 \quad v' = 2x$

$$\int x^2 \cdot \cos x \, dx = \sin x \cdot x^2 - \int \sin x \cdot 2x \, dx = \sin x \cdot x^2 - 2\int \sin x \cdot x \, dx =$$

opět per partes $u' = \sin x \quad u = -\cos x \quad v = x \quad v' = 1$

$$= \sin x \cdot x^2 - 2\int \sin x \cdot x \, dx = \sin x \cdot x^2 - 2 \cdot \left(-\cos x \cdot x - \int -\cos x \cdot 1 \cdot dx\right) =$$

$$= \sin x \cdot x^2 - 2 \cdot \left(-\cos x \cdot x + \int \cos x \, dx\right) = \sin x \cdot x^2 - 2 \cdot (-\cos x \cdot x + \sin x) + c =$$

$$= \mathbf{x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2\sin x + c}$$

Příklad 10 / strana 56

Vypočtěte:

$$\int x \cdot e^{2x}\,dx \qquad \text{jde o součin, řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \qquad u' = e^{2x} \quad u = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \quad v = x \quad v' = 1$$

$$\int e^{2x} = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \ \Rightarrow\ \text{odvozeno ze substituční metody } t = 2x \quad \frac{dt}{dx} = 2 \ \Rightarrow\ dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int e^{t} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^{t} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot e^{t} = \mathbf{\frac{1}{2} \cdot e^{2x}} \qquad \text{obecně tedy platí} \qquad \int e^{k \cdot x} = \mathbf{\frac{1}{k} \cdot e^{k \cdot x}}$$

$$\int x \cdot e^{2x}\,dx = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot x - \int \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot 1 \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot x - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + c =$$

$$= \mathbf{\frac{1}{2} \cdot e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + c}$$

Příklad 11 / strana 56

Vypočtěte:

$$\int \sin x \cdot \cos x\,dx \qquad \text{jde o součin, řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = \cos x \quad u = \sin x \quad v = \sin x \quad v' = \cos x$$

$$\int \sin x \cdot \cos x\,dx = \sin x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot \cos x\,dx \qquad /+\int \sin x \cdot \cos x\,dx$$

$$2\int \sin x \cdot \cos x\,dx = \sin x \cdot \sin x + c \qquad /2$$

$$\int \sin x \cdot \cos x\,dx = \frac{\sin x \cdot \sin x}{2} + c = \mathbf{\frac{\sin^2 x}{2} + c}$$

Příklad 12 / strana 56

Vypočtěte:

$$\int \mathrm{tg}^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \sin^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$u' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad u = \mathrm{tg}\,x \qquad v = \sin^2 x \qquad v' = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 2\sin x$$

$$\int \mathrm{tg}^2 x\,dx = \mathrm{tg}\,x \cdot \sin^2 x - \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x\,dx = \mathrm{tg}\,x \cdot \sin^2 x - 2\int \sin^2 x\,dx =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \sin^2 x - 2\int \sin x \cdot \sin x\,dx = \frac{\sin^3 x}{\cos x} - 2\int \sin x \cdot \sin x\,dx \qquad \text{znovu per partes}$$

$u' = \sin x \quad u = -\cos x \quad v = \sin x \quad v' = \cos x$

$$\int \sin^2 x\,dx = -\cos x\cdot\sin x - \int -\cos x\cdot\cos x\,dx = -\cos x\cdot\sin x + \int \cos^2 x\,dx =$$

$$= -\cos x\cdot\sin x + \int\left(1-\sin^2 x\right)dx = -\cos x\cdot\sin x + \int dx - \int \sin^2 x\,dx =$$

$$= -\cos x\cdot\sin x + x - \int \sin^2 x\,dx \qquad /+\int \sin^2 x\,dx \qquad \text{dostáváme rovnici}$$

$$2\int \sin^2 x\,dx = -\cos x\cdot\sin x + x \qquad /:2$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{-\cos x\cdot\sin x + x}{2} \qquad \text{za } \int \sin^2 x\,dx \text{ dosadíme do předchozí rovnice}$$

$$\int \mathrm{tg}^2 x\,dx = \mathrm{tg}\,x\cdot\sin^2 x - \int \frac{\sin x}{\cos x}\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x\,dx = \mathrm{tg}\,x\cdot\sin^2 x - 2\int \sin^2 x\,dx =$$

$$= \frac{\sin^3 x}{\cos x} - 2\int \sin x\cdot\sin x\,dx = \frac{\sin^3 x}{\cos x} - 2\cdot\frac{-\cos x\cdot\sin x + x}{2} + c = \frac{\sin^3 x}{\cos x} + \cos x\cdot\sin x - x + c =$$

$$= \frac{\sin^3 x + \cos x\cdot\cos x\cdot\sin x}{\cos x} - x + c = \frac{\sin^3 x + \cos^2 x\cdot\sin x}{\cos x} - x + c =$$

$$= \frac{\sin x\cdot\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}{\cos x} - x + c = \mathrm{tg}\,x\cdot 1 - x + c = \mathbf{tg\,x - x + c}$$

$$\frac{\sin x}{\cos} = \mathrm{tg}\,x \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Příklad 13 / strana 56

Vypočtěte:

$$\int \cos^3 x\,dx$$

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos x\cdot\cos^2 x\,dx \qquad \text{jde o součin, řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u\cdot v' \qquad u' = \cos x \quad u = \sin x \quad v = \cos^2 x \quad v' = 2\cos x\cdot(-\sin x)$$

$$\int \cos x\cdot\cos^2 x\,dx = \sin x\cdot\cos^2 x - \int \sin x\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)\,dx =$$

$$= \sin x\cdot\cos^2 x - \int \sin x\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)\,dx = \sin x\cdot\cos^2 x + 2\int \sin^2 x\cdot\cos x\,dx =$$

$$= \sin x\cdot\cos^2 x + 2\int \cos x\cdot\left(1-\cos^2 x\right)dx = \sin x\cdot\cos^2 x + 2\int\left(\cos x - \cos^3 x\right)dx =$$

$$= \sin x\cdot\cos^2 x + 2\int \cos x\,dx - 2\int \cos^3 x\,dx = \sin x\cdot\cos^2 x + 2\cdot\sin x - 2\int \cos^3 x\,dx$$

$$3\int \cos^3 x\,dx = \sin x\cdot\cos^2 x + 2\sin x + c = \sin x\cdot\left(1-\sin^2 x\right) + 2\sin x + c = \sin x - \sin^3 x + 2\sin x + c$$

$$3\int \cos^3 x\,dx = 3\sin x - \sin^3 x + c \quad /:3 \quad \Rightarrow \qquad \int \cos^3 x\,dx = \mathbf{\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c}$$

Příklad 14 / strana 56

Vypočtěte:

$$\int \sin^2 x\ dx$$

$$\int \sin^2 x\ dx = \int \sin x \cdot \sin x\ dx \qquad \text{jde o součin, řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \qquad u' = \sin x \quad u = -\cos x \quad v = \sin x \quad v' = \cos x$$

$$\int \sin x \cdot \sin x\ dx = -\cos x \cdot \sin x - \int -\cos x \cdot \cos x\ dx =$$

$$= -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x\ dx = -\cos x \cdot \sin x + \int \left(1 - \sin^2 x\right) dx =$$

$$= -\cos x \cdot \sin x + \int dx - \int \sin^2 x\ dx =$$

$$= -\cos x \cdot \sin x + \int dx - \int \sin^2 x\ dx$$

$$2\int \sin^2 x\ dx = -\cos x \cdot \sin x + \int dx \quad / : 2 \quad \Rightarrow \quad \int \sin^2 x\ dx = \frac{1}{2}\left(\mathbf{x} - \mathbf{\cos x} \cdot \mathbf{\sin x}\right) + \mathbf{c}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

Příklad 15 / strana 56

Vypočtěte:

$$\int \cos^2 x\ dx$$

$$\int \cos^2 x\ dx = \int \cos x \cdot \cos x\ \ dx \qquad \text{jde o součin, řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \qquad u' = \cos x \quad u = \sin x \quad v = \cos x \quad v' = -\sin x$$

$$\int \cos^2 x\ dx = \sin x \cdot \cos x - \int \sin x \cdot \left(-\sin x\right) dx = \sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x\ dx =$$

$$= \sin x \cdot \cos x + \int \left(1 - \cos^2 x\right) dx = \sin x \cdot \cos x + \int dx - \int \cos^2 x\ dx \quad / + \int \cos^2 x\ dx$$

$$2\int \cos^2 x\ dx = \sin x \cdot \cos x + \int dx \quad / : 2 \quad \Rightarrow \quad \int \cos^2 x\ dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\mathbf{x} + \mathbf{\sin x} \cdot \mathbf{\cos x}\right) + \mathbf{c}$$

Příklad 16 / strana 57

Vypočtěte:

$$\int e^{\sin x} \cdot \cos x\ dx \qquad \text{exponent obsahuje goniometrickou funkci} \Rightarrow \text{substituční metoda}$$

$$\sin x = t \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dx} = \cos x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{\cos x} \qquad \text{za dx dosadíme do výrazu}$$

$$\int e^t \cdot \cos x\ \frac{dt}{\cos x} = \int e^t dt = e^t + c = \mathbf{e^{sinx}} + \mathbf{c}$$

Příklad 17 / strana 57

Vypočtěte:

$\int x^2 \cdot \cos x \, dx$ jde o součin, řešíme metodou per partes

$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = \cos x \quad u = \sin x \quad v = x^2 \quad v' = 2x$

$$\int x^2 \cdot \cos x \, dx = \sin x \cdot x^2 - \int \sin x \cdot 2x \, dx = \sin x \cdot x^2 - 2\int \sin x \cdot x \, dx$$

opět per partes $\quad u' = \sin x \quad u = -\cos x \quad v = x \quad v' = 1$

$$\int x^2 \cdot \cos x \, dx = \sin x \cdot x^2 - 2 \cdot \left(-\cos x \cdot x - \int -\cos x \cdot 1 dx\right) =$$

$$= \sin x \cdot x^2 - 2 \cdot \left(-\cos x \cdot x + \int \cos x \, dx\right) = \left[\sin x \cdot x^2 - 2 \cdot \left(-\cos x \cdot x + \sin x\right)\right] + c =$$

$$= \mathbf{\sin x \cdot x^2 + 2x \cdot \cos x - 2\sin x + c}$$

Příklad 18 / strana 57

Vypočtěte:

$\int \sin \sqrt{x} \, dx$ řešíme substituční metodou

$$t = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{dt}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{dt}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = dt \cdot 2\sqrt{x}$$

$dx = dt \cdot 2\sqrt{x}$ z předchozího víme, že $\sqrt{x} = t \Rightarrow dx = dt \cdot 2t$

$\int \sin \sqrt{x} \, dx = \int \sin t \cdot 2t \, dt = 2\int t \cdot \sin t \, dt =$ řešíme metodou per partes

$u' = \sin t \quad u = -\cos t \quad v = t \quad v' = 1$

$$= 2 \cdot \left(-\cos t \cdot t - \int -\cos t \cdot 1 \, dt\right) = 2 \cdot \left(-\cos t \cdot t + \int \cos t \, dt\right) = 2 \cdot \left(-\cos t \cdot t + \sin t\right) + c =$$

$$= \mathbf{2 \cdot \left(\sin\sqrt{x} - \sqrt{x} \cdot \cos\sqrt{x}\right) + c}$$

Příklad 19 / strana 57

Vypočtěte:

$\int \sin x \cdot \sqrt{\cos x} \, dx = \int \sin x \cdot (\cos x)^{\frac{1}{2}} dx$ řešíme substituční metodou

$$t = (\cos x)^{\frac{1}{2}} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} \cdot (\cos x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\sin x) \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{-\frac{1}{2} \cdot (\cos x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin x} =$$

$$= \frac{dt}{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(\cos x)^{\frac{1}{2}}}\cdot\sin x} = -\frac{dt}{\frac{\sin x}{2\cdot\sqrt{\cos x}}} = -\frac{2\cdot\sqrt{\cos x}\,dt}{\sin x} = -\frac{2\cdot t\,dt}{\sin x} \quad \text{dosadíme do výrazu}$$

$$\int \sin x\cdot\sqrt{\cos x}\,dx = \int \sin x\cdot t\cdot\left(-\frac{2\cdot t}{\sin x}\right)dt = -2\int t\cdot t\,dt = -2\int t^2\,dt = -2\frac{t^3}{3}+c =$$

$$= -\frac{2}{3}t^3 + c = -\frac{2}{3}\cdot\left[(\cos x)^{\frac{1}{2}}\right]^3 + c = -\frac{2}{3}\cdot(\cos x)^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{2}}\cdot\sqrt{\mathbf{\cos^3 x}} + \mathbf{c}$$

Příklad 20 / strana 57

Vypočtěte:

$$\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3}dx$$

$$\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3}dx = \int \frac{x^4+2x^2+1}{x^3}dx = \int \frac{x^4}{x^3}dx + \int \frac{2x^2}{x^3}dx + \int \frac{1}{x^3}dx =$$

$$= \int x\,dx + 2\int \frac{1}{x}dx + \int x^{-3}dx = x^2 + 2\ln|x| + \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2}} + \mathbf{\ln x^2} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2x^2}} + \mathbf{c}$$

Příklad 21 / strana 57

Vypočtěte:

$$\int e^x\cdot\cos x\,dx \quad \text{jde o součin, řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u\cdot v' \qquad u' = e^x \qquad u = e^x \qquad v = \cos x \qquad v' = -\sin x$$

$$= e^x\cdot\cos x - \int e^x\cdot(-\sin x)dx = e^x\cdot\cos x + \int e^x\cdot\sin x\,dx \qquad \text{opět per partes}$$

$$u' = e^x \qquad u = e^x \qquad v = \sin x \qquad v' = \cos x$$

$$= e^x\cdot\cos x + e^x\cdot\sin x - \int e^x\cdot\cos x\,dx \qquad /+\int e^x\cdot\cos x\,dx \quad \text{dostáváme výraz}$$

$$2\int e^x\cdot\cos x\,dx = e^x\cdot\cos x + e^x\cdot\sin x + c = e^x\cdot(\sin x+\cos x)+c \qquad /:2$$

$$\int e^x\cdot\cos x\,dx = \frac{\mathbf{e^x}}{\mathbf{2}}\cdot(\mathbf{\sin x}+\mathbf{\cos x})+\mathbf{c}$$

Příklad 22 / strana 57

Vypočtěte:

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx \quad \text{jde o součin, řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \qquad u' = \sin x \quad u = -\cos x \qquad v = e^x \qquad v' = e^x$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = -\cos x \cdot e^x - \int -\cos x \cdot e^x \, dx = -\cos x \cdot e^x + \int \cos x \cdot e^x \, dx = \quad \text{opět per partes}$$

$$u' = \cos x \quad u = \sin x \qquad v = e^x \qquad v' = e^x$$

$$= -\cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x - \int \sin x \cdot e^x \, dx \qquad /+\int \sin x \cdot e^x \, dx \qquad \text{dostaváme výraz}$$

$$2\int e^x \cdot \sin x \, dx = -\cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x + c = e^x \cdot (\sin x - \cos x) + c \quad /:2$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = -\cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x + c = \mathbf{\frac{e^x}{2} \cdot (\sin x - \cos x) + c}$$

Příklad 23 / strana 57

Vypočtěte:

$$\int \frac{dx}{2x+5} \qquad \text{řešíme metodou substituční}$$

$$t = 2x+5 \quad \frac{dt}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{dt}{2} \quad \text{dosadíme}$$

$$\int \frac{dx}{2x+5} = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2}\ln t + c = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + c = \ln|2x+5|^{\frac{1}{2}} + c = \mathbf{\ln\sqrt{|2x+5|} + c}$$

Příklad 24 / strana 58

Vypočtěte:

$$\int x \cdot \ln^2 x \, dx \quad \text{jde o součin, řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \qquad u' = x \quad u = \frac{x^2}{2} \qquad v = \ln^2 x \qquad v' = 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\int x \cdot \ln^2 x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \int x \cdot \ln x \, dx = \text{ opět per partes}$$

$$u' = x \quad u = \frac{x^2}{2} \qquad v = \ln x \qquad v' = \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2}\int x \, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c = \mathbf{\frac{x^2}{2} \cdot \left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2} \right) + c}$$

Příklad 25 / strana 58

Vypočtěte:

$\int \frac{x^2}{1-x^3} dx$ řešíme pomocí substituční metody

$t = 1 - x^3 \quad \frac{dt}{dx} = -3x^2 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{-3x^2}$ dosadíme do výrazu

$$\int \frac{x^2}{t} \cdot \frac{dt}{-3x^2} = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{3} \ln t + c = \mathbf{-\frac{1}{3} \ln\left|1 - x^3\right| + c}$$

Příklad 26 / strana 58

Vypočtěte:

$\int \sin(3x-5)\, dx$ řešíme metodou substituční

$t = 3x - 5 \quad \frac{dt}{dx} = 3 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{3}$ dosadíme do výrazu

$$\int \sin(3x-5)\, dx = \int \sin t \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int \sin t\, dt = \frac{1}{3} \cdot (-\cos t) + c =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \cos t + c = \mathbf{-\frac{1}{3} \cdot \cos(3x-5) + c}$$

Příklad 27 / strana 58

Vypočtěte:

$\int \frac{\sin x}{1-\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \sin x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ řešíme metodou per partes

$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad u = \operatorname{tg} x \quad v = \sin x \quad v' = \cos x$

$$\int \frac{\sin x}{1-\sin^2 x} dx = \operatorname{tg} x \cdot \sin x - \int \operatorname{tg} x \cdot \cos x\, dx = \operatorname{tg} x \cdot \sin x - \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x\, dx =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \sin x - \int \sin x\, dx = \frac{\sin^2 x}{\cos x} - (-\cos x) + c = \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x + c =$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos x \cdot \cos x}{\cos x} + c = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} + c = \mathbf{\frac{1}{\cos x} + c}$$

Příklad 28 / strana 58

Vypočtěte:

$$\int \frac{2x+7}{x^2-x-2}dx \qquad \text{řešíme pomocí parciálních zlomků}$$

Nejprve vypočítáme kořeny kvadratické rovnice:

$$x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\langle{}^{2}_{-1} \quad \Rightarrow \quad x_1=2;\ x_2-1 \quad \Rightarrow \quad \overbrace{(x-2)}^{A}\cdot\overbrace{(x+1)}^{B}$$

$$\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+1)}=\frac{A\cdot(x+1)+B\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x+1)}=\frac{Ax+A+Bx-2B}{(x-2)\cdot(x+1)}=\frac{Ax+Bx+A-2B}{(x-2)\cdot(x+1)}=$$

$$=\frac{x\cdot(A+B)+A-2B}{(x-2)\cdot(x+1)} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2x+7}{x^2-x-2}$$

$A+B=2$ řešíme soustavu rovnic $\Rightarrow B=2-A$ dosadíme do 2. rovnice

$\underline{A-2B=7}$ $\quad A-2\cdot(2-A)=7 \quad A-4+2A=7 \quad 3A=11 \quad \Rightarrow \quad A=\mathbf{\frac{11}{3}}$

$B=2-A$ dosadíme za A: $\quad B=2-\frac{11}{3}=-\mathbf{\frac{5}{3}}$ za A a B dosadíme a zintegrujeme

$$\int \frac{2x+7}{x^2-x-2}dx=\int \frac{A}{(x-2)}dx+\int \frac{B}{(x+1)}dx=\int \frac{\frac{11}{3}}{(x-2)}dx+\int \frac{-\frac{5}{3}}{(x+1)}dx=$$

$$=\frac{11}{3}\int \frac{1}{(x-2)}dx-\frac{5}{3}\int \frac{1}{(x+1)}dx=\mathbf{\frac{11}{3}\cdot \ln|x-2|-\frac{5}{3}\cdot \ln|x+1|+c}$$

Příklad 29 / strana 58

Vypočtěte:

$$\int (\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x)dx$$

$$\int (\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x)dx=\int\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx+\int \frac{\cos x}{\sin x}dx= \qquad \text{2x subst. metoda}$$

v $\int \frac{\sin x}{\cos x}dx$ nahradíme $a=\cos x$ a v $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$ nahradíme $b=\sin x$

$$\frac{da}{dx}=-\sin x \Rightarrow dx=\frac{da}{-\sin x} \qquad \frac{db}{dx}=\cos x \Rightarrow dx=\frac{db}{\cos x}$$

$$= \int \frac{\sin x}{a} \cdot \frac{da}{-\sin x} + \int \frac{\cos x}{b} \cdot \frac{db}{\cos x} = -\int \frac{1}{a} da + \int \frac{1}{b} db = -\ln|a| + \ln|b| + c =$$

$$= \ln|b| - \ln|a| + c = \ln|\sin x| - \ln|\cos x| + c = \ln\left|\frac{\sin x}{\cos x}\right| + c = \mathbf{\ln|tg\,x| + c}$$

$$\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \ln|\sin x| - \ln|\cos x| = \ln\left|\frac{\sin x}{\cos x}\right|$$

Příklad 30 / strana 58

Vypočtěte:

$$\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$$

$$\int \frac{x}{\sin^2 x} dx = \int x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx = \quad \text{řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \qquad u' = \frac{1}{\sin^2 x} \qquad u = -\mathrm{cotg}\ x \qquad v = x \qquad v' = 1$$

$$= \int x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{cotg}\, x \cdot x - \int -\mathrm{cotg}\, x \cdot 1 \cdot dx = -\mathrm{cotg}\, x \cdot x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx =$$

$$\text{subst. metoda} \quad t = \sin x \quad \frac{dt}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos x}$$

$$= -\mathrm{cotg}\, x \cdot x + \int \frac{\cos x}{t} \cdot \frac{dt}{\cos x} = -\mathrm{cotg}\, x \cdot x + \int \frac{1}{t} dt = -\mathrm{cotg}\, x \cdot x + \ln|t| + c =$$

$$= \mathbf{\ln|\sin x| - cotg\, x \cdot x + c}$$

Příklad 31 / strana 59

Vypočtěte:

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx \qquad \text{řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \qquad u' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad u = \mathrm{tg}\, x \qquad v = x \qquad v' = 1$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg}\, x \cdot x - \int \mathrm{tg}\, x \cdot 1\, dx = \mathrm{tg}\, x \cdot x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx =$$

$$\text{substituční metoda} \quad t = \cos x \quad \frac{dt}{dx} = -\sin x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{-\sin x}$$

$$= \operatorname{tg} x \cdot x - \int \frac{\sin x}{t} \cdot \frac{dt}{-\sin x} = \operatorname{tg} x \cdot x + \int \frac{1}{t} dt = \operatorname{tg} x \cdot x + \ln|t| + c =$$

$$= \mathbf{tg\, x + \ln|\cos x| + c}$$

Příklad 32 / strana 59

Vypočtěte:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \qquad \text{řešíme substituční metodou}$$

$$t = 1 - x^2 \qquad \frac{dt}{dx} = -2x \;\Rightarrow\; dx = \frac{dt}{-2x}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{dt}{-2x} = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} dt = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{t} + c = -\sqrt{\mathbf{1 - x^2}} + \mathbf{c}$$

Příklad 33 / strana 59

Vypočtěte:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \qquad \text{řešíme substituční metodou}$$

$$t = 1 + x^2 \qquad \frac{dt}{dx} = 2x \;\Rightarrow\; dx = \frac{dt}{2x}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} dt = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{t} + c = \sqrt{\mathbf{1 + x^2}} + \mathbf{c}$$

Příklad 34 / strana 59

Vypočtěte:

$$\int t\cdot e^{t^2}dt \qquad \text{řešíme metodou substituční}$$

$$x=t^2 \qquad \frac{dx}{dt}=2t \quad \Rightarrow \quad dt=\frac{dx}{2t}$$

$$\int t\cdot e^{x}\frac{dx}{2t}=\frac{1}{2}\int e^{x}dx=\frac{1}{2}e^{x}=\mathbf{\frac{e^{t^2}}{2}+c}$$

Příklad 35 / strana 59

Vypočtěte:

$$\int x\cdot \ln^2 x\,dx \qquad \text{jde o součin, řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v=uv-\int u\cdot v' \qquad u'=x \quad u=\frac{x^2}{2} \qquad v=\ln^2 x \qquad v'=2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}$$

$$\int x\cdot \ln^2 x\,dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x-\int\frac{x^2}{2}\cdot 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x-\int x\cdot\ln x\,dx= \text{opět per partes}$$

$$u'=x \quad u=\frac{x^2}{2} \qquad v=\ln x \qquad v'=\frac{1}{x}$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+c=\mathbf{\frac{x^2}{2}\cdot\left(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2}\right)+c}$$

Příklad 36 / strana 59

Vypočtěte:

$$\int\frac{dx}{x^2-1}=\int\frac{1}{x^2-1}dx \qquad \text{řešíme pomocí parciálních zlomků}$$

$$x^2-1=(x+1)\cdot(x-1) \qquad \text{podle} \quad a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$$

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}=\frac{A\cdot(x-1)+B\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{Ax-A+Bx+B}{(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{Ax+Bx-A+B}{(x+1)\cdot(x-1)}=$$

$$=\frac{x\cdot(A+B)+B-A}{(x+1)\cdot(x-1)} \qquad \text{dostáváme soustavu rovnic}$$

$A+B=0 \quad \Rightarrow \quad A=-B \quad$ dosadíme do 2. rovnice

$\underline{B-A=1}$ po dosazení dostáváme: $B+B=1 \quad 2B=1 \quad \Rightarrow B=\frac{1}{2}; \quad A=-B \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{1}{2}$

$$\int \frac{dx}{x^2-1}=\int \frac{A}{x+1}dx+\int \frac{B}{x-1}dx=\int \frac{-\frac{1}{2}}{x+1}dx+\int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}dx=-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+c=\ln|x-1|^{\frac{1}{2}}-\ln|x+1|^{\frac{1}{2}}+c=$$

$$=\ln\sqrt{|x-1|}-\ln\sqrt{|x+1|}+c=\ln\frac{\sqrt{|x-1|}}{\sqrt{|x+1|}}+c=\mathbf{ln}\sqrt{\left|\frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{x+1}}\right|}+\mathbf{c}$$

$$\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \ln\sqrt{|x-1|}-\ln\sqrt{|x+1|}=\ln\frac{\sqrt{|x-1|}}{\sqrt{|x+1|}}$$

Příklad 37 / strana 59

Vypočtěte:

$$\int \frac{5}{x^2+x-6}dx$$ řešíme pomocí parciálních zlomků

Nejprve vypočítáme kořeny kvadratické rovnice x^2+x-6:

$$x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot -6}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=$$

$$=\frac{-1\pm 5}{2}=\left\langle {}^{2}_{-3} \right. \quad \Rightarrow \quad x_1=2 \quad x_2=-3 \quad \Rightarrow \quad \overbrace{(x-2)}^{A}\cdot\overbrace{(x+3)}^{B}$$

$$\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+3)}=\frac{A\cdot(x+3)+B\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x+3)}=\frac{Ax+3A+Bx-2B}{(x-2)\cdot(x+3)}=\frac{Ax+Bx+3A-2B}{(x-2)\cdot(x+3)}=$$

$$=\frac{x\cdot(A+B)+3A-2B}{(x-2)\cdot(x+3)}$$ dostáváme soustavu rovnic:

$A+B=0 \quad \Rightarrow \quad A=-B \quad$ dosadíme do 2. rovnice

$\underline{3A-2B=5}$ po dosazení dosáváme: $-3B-2B=5 \quad -5B=5 \Rightarrow B=-1$

za B dosadíme do 1. rocnice: $A=-B \quad \Rightarrow \quad A=1$

$$\int \frac{5}{x^2+x-6}dx=\int \frac{A}{(x-2)}dx+\int \frac{B}{(x+3)}dx=\int \frac{1}{(x-2)}dx+\int \frac{-1}{(x+3)}dx=$$

$$= \int \frac{1}{(x-2)}dx - \int \frac{1}{(x+3)}dx = \ln|x-2| - \ln|x+3| + c = \mathbf{\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + c}$$

$$\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \ln|x-2| - \ln|x+3| = \mathbf{\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|}$$

Příklad 39 / strana 60

Vypočtěte:

$$\int \frac{2}{x^2-3x+2}dx \qquad \text{řešíme pomocí parciálních zlomků}$$

Nejprve zjistíme kořeny kvadratické rovnice x^2-3x+2:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} =$$

$$= \frac{3 \pm 1}{2} = \langle^{2}_{1} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2; \quad x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \overbrace{(x-2)}^{A} \cdot \overbrace{(x-1)}^{B}$$

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A\cdot(x-1) + B\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x-1)} = \frac{Ax - A + Bx - 2B}{(x-2)\cdot(x-1)} = \frac{Ax + Bx - A - 2B}{(x-2)\cdot(x-1)} =$$

$$= \frac{x\cdot(A+B) - A - 2B}{(x-2)\cdot(x-1)} \qquad \text{dostáváme soustavu rovnic:}$$

$A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B$ za A dosadíme do 2. rovnice

$\underline{-A - 2B = 2}$ po dosazení: $B - 2B = 2 \quad -B = 2 \quad \Rightarrow \quad B = -2$

do 1. rovnice dosadíme za B: $A = -B \quad \Rightarrow \quad A = 2$

$$\int \frac{2}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{A}{x-2}dx + \int \frac{B}{x-1}dx = \int \frac{2}{x-2}dx + \int \frac{-2}{x-1}dx = 2\int \frac{1}{x-2}dx - 2\int \frac{1}{x-1}dx =$$

$$= 2\ln|x-2| - 2\ln|x-1| + c = \ln|x-2|^2 - \ln|x-1|^2 + c = \ln\left|\frac{(x-2)^2}{(x-1)^2}\right| + c = \mathbf{\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|^2 + c}$$

Příklad 40 / strana 60

Vypočtěte:

$$\int \frac{3-2x}{x^2-5x+6}dx \qquad \text{řešíme pomocí parciálních zlomků}$$

Nejprve vypočítáme kořeny kvadratické rovnice x^2-5x+6:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} =$$

$$= \frac{5 \pm 1}{2} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right. \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3; \quad x_2 = 2 \quad \Rightarrow \overbrace{(x-3)}^{A} \cdot \overbrace{(x-2)}^{B}$$

$$\frac{A}{(x-3)} \cdot \frac{B}{(x-2)} = \frac{A \cdot (x-2) + B \cdot (x-3)}{(x-3)\cdot(x-2)} = \frac{Ax - 2A + Bx - 3B}{(x-3)\cdot(x-2)} = \frac{Ax + Bx - 2A - 3B}{(x-3)\cdot(x-2)} =$$

$$= \frac{x \cdot (A+B) - 2A - 3B}{(x-3)\cdot(x-2)} \qquad \text{dostáváme soustavu rovnic:}$$

$$A + B = -2 \quad \Rightarrow \quad A = -2 - B \qquad \text{dosadíme do 2. rovnice}$$

$$\underline{-2A - 3B = 3} \qquad \text{po dosazení } -2\cdot(-2-B) - 3B = 3 \quad 4 + 2B - 3B = 3 \quad \Rightarrow B = 1$$

$$A + B = -2 \qquad \text{za B dosadíme: } \quad A + 1 = -2 \quad \Rightarrow A = -3$$

$$\int \frac{3-2x}{x^2 - 5x + 6} dx = \int \frac{A}{(x-3)} dx + \int \frac{B}{(x-2)} dx = \int \frac{-3}{(x-3)} dx + \int \frac{1}{(x-2)} dx =$$

$$= -3 \int \frac{1}{(x-3)} dx + \int \frac{1}{(x-2)} dx = -3 \ln|x-3| + \ln|x-2| + c = \ln|x-2| - \ln|x-3|^3 + c =$$

$$= \mathbf{ln} \left| \frac{\mathbf{x-2}}{(\mathbf{x-3})^3} \right| + \mathbf{c}$$

$$k \cdot \ln x = \ln x^k \quad \Rightarrow \quad 3\ln|x-3| = \ln|x-3|^3$$

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \ln|x-2| - \ln|x-3|^3 = \mathbf{ln} \left| \frac{\mathbf{x-2}}{(\mathbf{x-3})^3} \right|$$

Určitý integrál

Příklad 1 / strana 64

Vypočtěte:

$$\int_{-1}^{1}\left(x^3-3x^2+1\right)dx=\int_{-1}^{1}x^3\,dx-\int_{-1}^{1}3x^2\,dx+\int_{-1}^{1}1\,dx=\int_{-1}^{1}x^3\,dx-3\int_{-1}^{1}x^2\,dx+\int_{-1}^{1}dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1}-3\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\left[x\right]_{-1}^{1}=\frac{1^4}{4}-3\cdot\frac{1^3}{3}+1^1-\left(\frac{(-1)^4}{4}-3\cdot\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^1\right)=$$

$$=\frac{1}{4}-1+1-\left(\frac{1}{4}+1-1\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\mathbf{0}$$

Příklad 2 / strana 64

Vypočtěte:

$$\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx$$

$$\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_{0}^{\pi}=-\cos(\pi)-\left[-\cos(0)\right]=--1-(-1)=1+1=\mathbf{2}$$

Příklad 3 / strana 64

Vypočtěte:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\cos x\,dx \qquad \text{řešíme metodou per partes}$$

$$\int_{a}^{b}u'\cdot v=\left[u\cdot v\right]_{a}^{b}-\int_{a}^{b}u\cdot v' \qquad u'=\cos x \quad u=\sin x \quad v=x \quad v'=1$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\cos x\,dx=\left[\sin x\cdot x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{a}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot 1\,dx=\left[\sin x\cdot x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\left[-\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\left[\sin x\cdot x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\left[\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left[\sin(0)\cdot 0+\cos(0)\right]=$$

$$=1\cdot\frac{\pi}{2}+0-\left[1\cdot 0+1\right]=\mathbf{\frac{\pi}{2}-1}$$

Příklad 4 / strana 65

Vypočtěte:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx \qquad \text{řešíme metodou per partes}$$

$$\int_a^b u' \cdot v = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u \cdot v' \qquad u' = \sin x \quad u = -\cos x \quad v = \cos^2 x \quad v' = -2 \cdot \cos x \cdot \sin x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx = \left[-\cos x \cdot \cos^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x \cdot (-2 \cdot \cos x \cdot \sin x) \, dx =$$

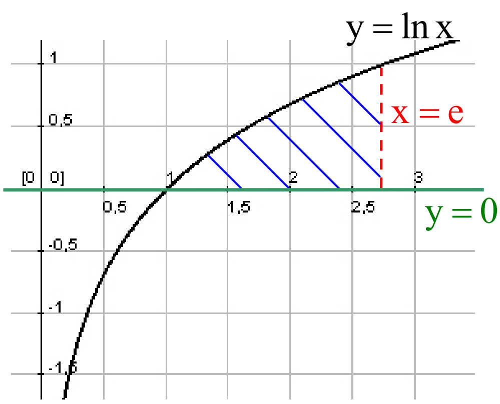
$$= \left[-\cos^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx \qquad / + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$$

$$3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx = \left[-\cos^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad / : \mathbf{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx = \frac{\left[-\cos^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}{3} = \frac{-\cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3} - \left[\frac{-\cos^3(0)}{3}\right] = -\frac{0}{3} - \left[-\frac{1}{3}\right] = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

Příklad 5 / strana 65

Vypočtěte obsah obrazce vymezeného křivkami $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$.



Z obrázku jsou patrny meze **1** a **e**,

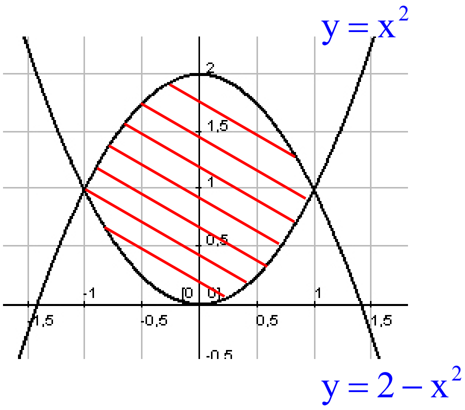
$$S = \int_1^e \ln x \, dx = \int_1^e 1 \cdot \ln x \, dx = \qquad \text{použijeme metodu per partes}$$

$$= [x \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = [x \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e dx = [x \cdot \ln x]_1^e - [x]_1^e =$$

$$= [e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1] - [e - 1] = e \cdot 1 - 0 - e + 1 = \mathbf{1}$$

Příklad 6 / strana 65

Vypočtěte obsah obrazce vymezeného křivkami $y=x^2$, $y=2-x^2$.



Zjistíme meze tak, že porovnáme obě rovnice:

$$y=y \Rightarrow \quad x^2=2-x^2 \qquad 2x^2=2 \qquad x^2=1 \quad \Rightarrow \quad x=\left\langle \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}\right.$$

$$\int_{-1}^{1} y-y\,dx=\int_{-1}^{1} y\,dx-\int_{-1}^{1} y\,dx=\int_{-1}^{1} x^2\,dx-\int_{-1}^{1} 2-x^2\,dx=$$

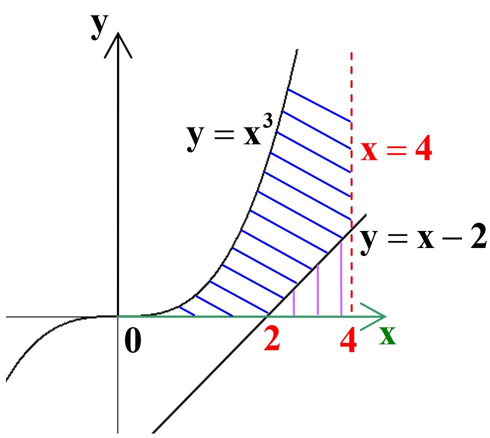
$$=\int_{-1}^{1} x^2\,dx-\left(\int_{-1}^{1} 2\,dx-\int_{-1}^{1} x^2\,dx\right)=\int_{-1}^{1} x^2\,dx-\int_{-1}^{1} 2\,dx+\int_{-1}^{1} x^2\,dx=$$

$$=2\int_{-1}^{1} x^2\,dx-2\int_{-1}^{1} dx=2\cdot\left\{\int_{-1}^{1} x^2\,dx-\int_{-1}^{1} dx\right\}=2\cdot\left\{\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}-[x]_{-1}^{1}\right\}=$$

$$=2\cdot\left\{\left[\frac{1^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right]-[1-(-1)]_{-1}^{1}\right\}=2\cdot\left\{\left[\frac{1}{3}-\frac{-1}{3}\right]-2\right\}==2\cdot\left\{\frac{2}{3}-2\right\}=2\cdot\frac{2-3\cdot 2}{3}=$$

$$2\cdot\frac{2-6}{3}=2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{8}{3}=\left|-2\frac{2}{3}\right|=\mathbf{2\frac{2}{3}}\ \textbf{j.o.}$$

Příklad 7 / strana 65



Vypočtěte obsah obrazce vymezeného křivkami

$y=x^3$, $y=2-x^2$, $x=4$ a osou x.

Musíme vypočítat plochu S, která je vyšrafovaná modře. Nejprve vypočteme celkovou plochu S_1 pod křivkou $\mathbf{x^3}$ v mezích od **0** do **4** a od ní odečteme plochu S_2 pod přímkou **x-2** v mezích od **2** do **4**, která je vyšrafovaná fialově.

$$S_1=\int_0^4 x^3\,dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4=\frac{4^4}{4}-\frac{0^4}{4}=\frac{256}{4}-0=\mathbf{64}\ \textbf{j.o.}$$

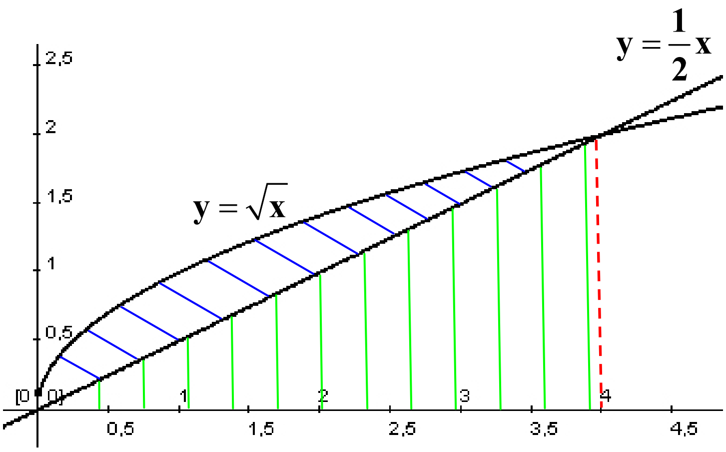
$$S_2=\int_2^4 x-2\,dx=\int_2^4 x\,dx-\int_2^4 2\,dx=\int_2^4 x\,dx-2\int_2^4 dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4-2\cdot[x]_2^4=\left(\frac{4^2}{2}-\frac{2^2}{2}\right)-2\cdot(4-2)=(8-2)-2\cdot 2=6-4=\mathbf{2}\ \text{j.o.}$$

$$S=S_1-S_2=64-2=\mathbf{62}\ \text{j.o.}$$

Příklad 8 / strana 65

Vypočtěte obsah obrazce vymezeného křivkami $y=\sqrt{x},\quad y=\frac{1}{2}x$.



Nejprve si musíme vypočítat meze:

$$\sqrt{x}=\frac{1}{2}x \qquad x=\left(\frac{1}{2}x\right)^2$$

$$x=\frac{1}{4}x^2 \qquad x=\frac{x^2}{4}$$

$$4x=x^2 \qquad x^2-4x=0$$

$$x\cdot(x-4)=0 \quad\Rightarrow\quad x=0,\quad x=4$$

Musíme vypočítat plochu S vymezenou křivkami $y=\sqrt{x},\ y=\frac{1}{2}x$, která je vyšrafovaná modře. Tu vypočteme tak, že od celé plochy S_1 pod křivkou $y=\sqrt{x}$ v mezích od **0** do **4** odečteme plochu S_2 pod křivkou $y=\frac{1}{2}x$ v mezích od **0** do **4.**

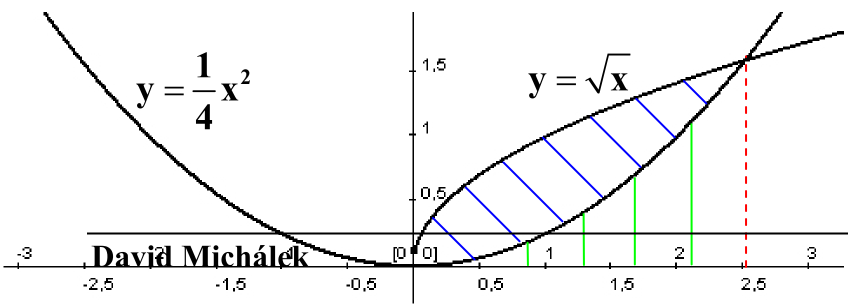
$$S_1=\int_0^4\sqrt{x}\,dx=\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\left[\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}\right]_0^4=\frac{2}{3}\sqrt{4^3}-\frac{2}{3}\sqrt{0^3}=\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}}\ \text{j.o.}$$

$$S_2=\int_0^4\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^4 x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 8=\mathbf{4}\,\text{j.o.}$$

$$S=S_1-S_2=\frac{16}{3}-4=\frac{16-12}{3}=\frac{4}{3}=\mathbf{1\frac{1}{3}}\ \text{j.o.}$$

Příklad 9 / strana 65

Vypočtěte obsah obrazce vymezeného křivkami $y=\sqrt{x},\quad y=\frac{1}{4}x^2$.



Nejprve zjistíme meze:

$$\sqrt{x} = \frac{1}{4}x^2 \quad / : \sqrt{x} \quad / \cdot 4$$

$$4 = \frac{x^2}{\sqrt{x}} \qquad 4 = \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$4 = x^2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} \qquad 4 = x^{2-\frac{1}{2}} \qquad 4 = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{4^2} = \mathbf{\sqrt[3]{16}}$$

Musíme vypočítat plochu S vymezenou křivkami $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{4}x^2$, která je vyšrafovaná modře. Tu vypočteme tak, že od celé plochy S_1 pod křivkou v mezích od **0** do $\mathbf{\sqrt[3]{16}}$ musíme odečíst plochu S_2 pod křivkou $y = \frac{1}{4}x^2$, která je vyšrafovaná zeleně.

$$S_1 = \int_0^{\sqrt[3]{16}} x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt[3]{16}} = \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^{\sqrt[3]{16}} = \left[\frac{2\cdot\sqrt[3]{16}}{3}\right]_0^{\sqrt[3]{16}} = \frac{2\cdot\left(\sqrt[3]{16}\right)^{\frac{3}{2}}}{3} - 0 = \frac{2\cdot 16^{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}}}{3} =$$

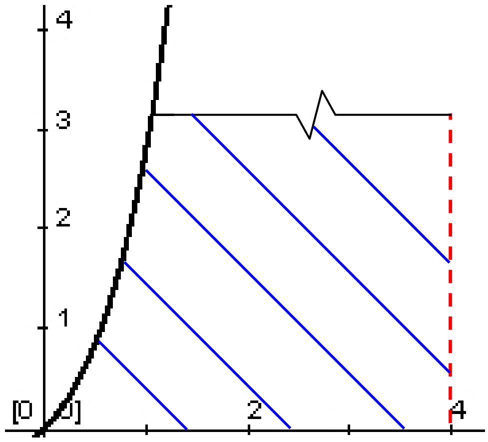
$$= \frac{2\cdot 16^{\frac{1}{2}}}{3} = \frac{2\cdot\sqrt{16}}{3} = \frac{2\cdot 4}{3} = \mathbf{\frac{8}{3}}\ \mathbf{j.o.}$$

$$S_2 = \int_0^{\sqrt[3]{16}} \frac{1}{4}x^2\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt[3]{16}} x^2\,dx = \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt[3]{16}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{16}\right)^3}{3} - 0 = \frac{1}{4}\cdot\frac{16^{\frac{1}{3}\cdot 3}}{3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{16}{3} = \mathbf{\frac{4}{3}}\ \mathbf{j.o.}$$

$$S = S_1 - S_2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3} = \mathbf{1\frac{1}{3}}\ \mathbf{j.o.}$$

Příklad 10 / strana 65

Vypočtěte obsah obrazce vymezeného křivkami $y = 0$, $y = x \cdot e^x$, pro $x \in (0; 4)$.



$$x \in (0;\,4) \quad \Rightarrow \quad \text{meze}\left\langle \begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix} \right.$$

$$S = \int_0^4 x \cdot e^x \, dx \qquad \text{metoda per partes} \quad \int_a^b u' \cdot v = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u \cdot v'$$

$$u' = e^x \qquad u = e^x \qquad v = x \qquad v' = 1$$

$$S = \int_0^4 x \cdot e^x \, dx = \left[x \cdot e^x\right]_0^4 - \int_0^4 1 \cdot e^x \, dx = \left[x \cdot e^x\right]_0^4 - \int_0^4 e^x \, dx =$$

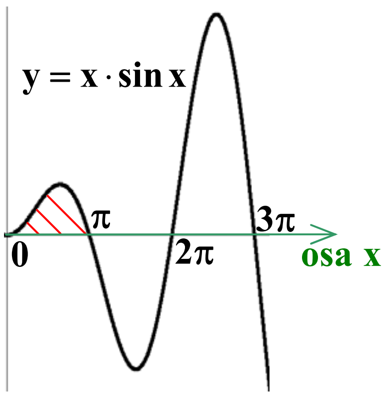
$$= \left[x \cdot e^x\right]_0^4 - \left[e^x\right]_0^4 = \left(4 \cdot e^4 - 0 \cdot e^0\right) - \left(e^4 - e^0\right) =$$

$$= 4 \cdot e^4 - e^4 + 1 = \mathbf{3e^4 + 1}$$

Příklad 11 / strana 66

Vypočtěte plochu vymezenou křivkou

$y = x \cdot \sin x$ a osou x pro $x \in \langle 0; \pi \rangle$.



$$S = \int_0^\pi x \cdot \sin x \, dx \qquad \text{řešíme metodou per partes}$$

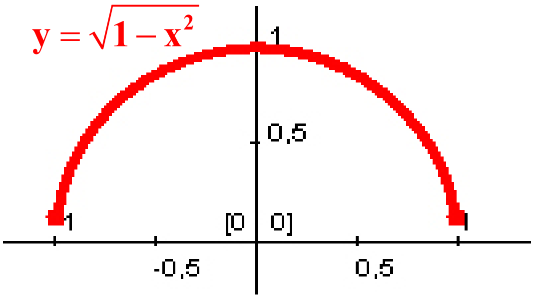
$$\int_a^b u' \cdot v = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u \cdot v' \qquad u' = \sin x \qquad u = -\cos x \qquad v = x \qquad v' = 1$$

$$S = \int_0^\pi x \cdot \sin x \, dx = [-x \cdot \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos x \, dx = [-x \cdot \cos x]_0^\pi +$$

$$+ \int_0^\pi \cos x \, dx = [-x \cdot \cos x]_0^\pi + [\sin x]_0^\pi = (-\pi \cdot (-1) - 0 \cdot 1) + (0 - 0) = \boldsymbol{\pi}$$

Příklad 12 / strana 66

Vypočtěte délku křivky $y = \sqrt{1 - x^2}$ pro $x \in (-1;\, 1)$.



$$s=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx \qquad (y')^2=\left[\frac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\right]^2=$$

$$=\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2=\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{1-x^2}}$$

$$s=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\left[\arcsin x\right]_{-1}^{1}=\arcsin 1-\arcsin(-1)=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{\pi}$$

Příklad 13 / strana 66

Vypočtěte délku křivky $y=\dfrac{2+x^6}{8x^2}$ pro $x\in(1;\,2)$.

$$s=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx \qquad \left[\left(\frac{2+x^6}{8x^2}\right)'\right]^2=\left[\frac{6x^5\cdot 8x^2-\left(2+x^6\right)\cdot 16x}{\left(8x^2\right)^2}\right]^2=\left[\frac{-12x^5}{64x^4}\right]^2=$$

$$=\left[\frac{48x^7-32x-16x^7}{64x^4}\right]^2=\left[\frac{32x^7-32x}{64x^4}\right]^2=\left[\frac{32x\cdot\left(x^6-1\right)}{64x^4}\right]^2=\left[\frac{x^6-1}{2x^3}\right]^2=\frac{\mathbf{\left(x^6-1\right)^2}}{\mathbf{4x^6}}$$

$$s=\int_1^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{x^6-1}{2x^3}\right)^2}\,dx=\int_1^2\sqrt{1+\frac{(x^6-1)^2}{4x^6}}\,dx=\int_1^2\sqrt{1+\frac{(x^6-1)^2}{4x^6}}\,dx=$$

$$=\int_1^2\sqrt{1+\frac{x^{12}-2x^6+1}{4x^6}}\,dx=\int_1^2\sqrt{\frac{4x^6+x^{12}-2x^6+1}{4x^6}}\,dx=\int_1^2\sqrt{\frac{x^{12}+2x^6+1}{4x^6}}\,dx=$$

$$=\int_1^2\sqrt{\frac{x^{12}+2x^6+1}{4x^6}}\,dx=\int_1^2\sqrt{\frac{(x^6+1)^2}{4x^6}}\,dx=\int_1^2\frac{\sqrt{(x^6+1)^2}}{\sqrt{4x^6}}\,dx=\int_1^2\frac{x^6+1}{2x^3}\,dx=\int_1^2\frac{x^6}{2x^3}\,dx+\int_1^2\frac{1}{2x^3}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{x^6}{x^3}\,dx+\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{x^3}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2 x^3\,dx+\frac{1}{2}\int_1^2 x^{-3}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2+\frac{1}{2}\cdot\left[-\frac{x^{-2}}{2}\right]_1^2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2^4}{4}-\frac{1^4}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2^{-2}}{2}--\frac{1^{-2}}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}=\frac{15}{8}+\frac{3}{16}=\mathbf{\frac{33}{16}}$$

Funkce dvou a více proměnných

Příklad 6 / strana 76

Vyjádřete bod A[6; 3; 2] v cylindrických a sférických souřadnicích.

Cylindrické souřadnice:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} \doteq \mathbf{6{,}7}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{3}{6} = \mathbf{26^\circ\ 33'}$$

$$z = z = \mathbf{2} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{A}\left[\mathbf{6{,}7};\ \mathbf{26^\circ\ 33'};\ \mathbf{2}\right]$$

Sférické souřadnice:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = \mathbf{7}$$

$$\vartheta = \operatorname{ar}\cos \frac{z}{r} = \operatorname{ar}\cos \frac{2}{7} = \mathbf{73^\circ\ 23'}$$

$$\varphi = \operatorname{arc}\operatorname{tg} \frac{y}{x} = \operatorname{arc}\operatorname{tg} \frac{3}{6} = \mathbf{26^\circ\ 33'} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\left[\mathbf{7};\ \mathbf{73^\circ 23'};\ \mathbf{26^\circ 33'}\right]$$

Příklad 7 / strana 76

Vyjádřete bod B, který má sférické souřadnice $r = 2;\ \vartheta = 45^\circ;\ \varphi = 30^\circ$, v kartézských souřadnicích.

Kartézské souřadnice:

$$x = r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi = 2 \cdot \sin\left(45^\circ\right) \cdot \cos\left(30^\circ\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \doteq \mathbf{1{,}22}$$

$$y = r \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi = 2 \cdot \sin\left(45^\circ\right) \cdot \sin\left(30^\circ\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} \doteq \mathbf{0{,}71}$$

$$z = r \cdot \cos\vartheta = 2 \cdot \cos\left(45^\circ\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\mathbf{2}} \doteq \mathbf{1{,}41} \qquad \Rightarrow \mathbf{B}\left[\mathbf{1{,}22};\ \mathbf{0{,}71};\ \mathbf{1{,}41}\right]$$

Příklad 8 / strana 76

Vyjádřete bod B, který má sférické souřadnice $r = 3;\ \vartheta = 60^\circ;\ \varphi = 30^\circ$, v kartézských souřadnicích.

Kartézské souřadnice:

$$x = r\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\varphi = 3\cdot\sin(60°)\cdot\cos(30°) = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{2{,}25}$$

$$y = r\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\varphi = 3\cdot\sin(60°)\cdot\sin(30°) = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} \doteq \mathbf{1{,}3}$$

$$z = r\cdot\cos\vartheta = 3\cdot\cos(60°) = 3\cdot\frac{1}{2} = \mathbf{1{,}5} \qquad \Rightarrow\ \mathbf{B}\left[\mathbf{2{,}25;\ 1{,}3;\ 1{,}5}\right]$$

Příklad 9 / strana 76

Určete první parciální derivaci funkce $z = 3x^2y + e^{xy}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y + e^{xy} = 6xy + e^{xy}\cdot y = \mathbf{y}\cdot\left(\mathbf{6x + e^{xy}}\right) \qquad \left(e^{2x}\right)' = 2.e^{2x} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy} = e^{xy}\cdot y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y + e^{xy} = 3x^2 + e^{xy}\cdot x = \mathbf{x}\cdot\left(\mathbf{3x + e^{xy}}\right) \qquad \left(e^{2x}\right)' = 2.e^{2x} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy} = e^{xy}\cdot x$$

Příklad 10 / strana 76

Určete první parciální derivaci funkce $z = \frac{x-y}{x+y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-y}{x+y} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2},$$

kde $u = x - y;\quad u' = \frac{\partial u}{\partial x} = x - y = 1 - 0 = 1;\quad v = x + y \quad v' = \frac{\partial v}{\partial x} = 1 + 0 = 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-y}{x+y} = \frac{1\cdot(x+y) - (x-y)\cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{x+y-x+y}{(x+y)^2} = \frac{\mathbf{2y}}{\mathbf{(x+y)^2}}$$

!!! $u' = \frac{\partial u}{\partial x} = x - y = 1 - 0 = 1 \Rightarrow$ je-li y samotné v součtu nebo rozdílu,

bereme jej jako konstantu!!!

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x-y}{x+y} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2},$$

kde $u = x - y;\quad u' = \frac{\partial u}{\partial y} = x - y = 0 - 1 = -1;\quad v = x + y \quad v' = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 + 1 = 1$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x-y}{x+y} = \frac{-1\cdot(x+y) - (x-y)\cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{-x-y-x+y}{(x+y)^2} = \frac{\mathbf{-2x}}{\mathbf{(x+y)^2}}$$

Příklad 11 / strana 77

Určete první parciální derivaci funkce $z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$.

$z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ je funkce složená, $(\operatorname{arc\,tg} a)' = \frac{1}{1+a^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{0 \cdot x - y \cdot 1}{x^2} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{\mathbf{-y}}{\mathbf{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1 \cdot x - y \cdot 0}{x^2} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{x}{x^2} = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x^2+y^2}}$$

Příklad 12 / strana 77

Určete první parciální derivaci funkce $z = \frac{x \cdot y}{x-y}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x \cdot y}{x-y}$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$,

kde $u = x \cdot y$; $u' = \frac{\partial u}{\partial x} = x \cdot y = 1 \cdot y = y$; $v = x - y$ $v' = \frac{\partial v}{\partial x} = 1 - 0 = 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x \cdot y}{x-y} = \frac{y \cdot (x-y) - x \cdot y \cdot 1}{(x-y)^2} = \frac{xy - y^2 - xy}{(x-y)^2} = \frac{\mathbf{-y^2}}{\mathbf{(x-y)^2}}$$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x \cdot y}{x-y}$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$,

kde $u = x \cdot y$; $u' = \frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot y = x \cdot 1 = x$; $v = x - y$ $v' = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 - 1 = -1$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x \cdot y}{x-y} = \frac{x \cdot (x-y) - x \cdot y \cdot (-1)}{(x-y)^2} = \frac{x^2 - xy + xy}{(x-y)^2} = \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{(x-y)^2}}$$

Příklad 13 / strana 77

Určete $\frac{dz}{dx}$ pro funkci $z = e^{u-2v}$, kde $u = \sin x$, $v = x^3$.

$z = e^{u-2v}$ do výrazu dosadíme za **u** a za **v** a zderivujeme

$$\frac{dz}{dx} = e^{\sin x - x^3} = \mathbf{e^{\sin x - 2x^3} \cdot \left(\cos x - 6x^2\right)} \qquad e^{k\cdot x} = e^{k\cdot x}\cdot\left(k\cdot x\right)' = e^{k\cdot x}\cdot k$$

Příklad 14 / strana 77

Určete $\frac{dz}{dt}$ pro funkci $z = x^2 + xy^2$, kde $x = e^{2t}$, $y = \sin t$.

$z = x^2 + xy^2$ do výrazu dosadíme za **x** a za **y**

$$\frac{dz}{dt} = \left(e^{2t}\right)^2 + e^{2t}\cdot\sin^2 t = 2\cdot e^{2t}\cdot e^{2t}\cdot 2 + e^{2t}\cdot 2\cdot\sin^2 t + e^{2t}\cdot 2\cdot\sin t\cdot\cos t =$$

$$= \mathbf{2e^{2t}\cdot\left(2e^{2t} + \sin^2 t\right) + e^{2t}\cdot\sin 2t}$$

$$2\cdot\sin x\cdot\cos x = \sin 2x \qquad \Rightarrow \qquad 2\cdot\sin t\cdot\cos t = \sin 2t$$

Příklad 15 / strana 77

Určete $\frac{dz}{dt}$ pro funkci $z = e^{xy}\cdot\ln\left(x+y\right)$, kde $x = 2t^2$, $y = 1 - 2t^2$.

$z = e^{xy}\cdot\ln\left(x+y\right)$ do výrazu dosadíme za **x** a za **y**

$$\frac{dz}{dt} = e^{xy}\cdot\ln\left(x+y\right) = e^{2t^2\cdot\left(1-2t^2\right)}\cdot\ln\left(2t^2+1-2t^2\right) = e^{2t^2\cdot\left(1-2t^2\right)}\cdot\ln\left(1\right) = e^{2t^2\cdot\left(1-2t^2\right)}\cdot 0 = \mathbf{0}$$

Příklad 16 / strana 77

Určete první a druhé parciální derivace (včetně smíšené) funkce

$z = 4x^3 - 2y^2 + 3xy^2 + 5y^3$.

1. parciální derivace z podle x: $\frac{\partial z}{\partial x} = 12x^2 - 0 + 3y^2 + 0 = \mathbf{12x^2 + 3y^2}$

2. parciální derivace z podle x: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 24x + 0 = \mathbf{24x}$

1. parciální derivace z podle y: $\frac{\partial z}{\partial y} = 0 - 4y + 6xy + 15y^2 = \mathbf{-4y + 6xy + 15y^2}$

2. parciální derivace z podle y: $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \mathbf{-4 + 6x + 30y}$

$$\text{smíšená parciální derivace podle x}: \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = -4y + 6xy + 15y^2 = 0 + 6y + 0 = \mathbf{6y}$$

$$\text{smíšená parciální derivace podle y}: \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = 12x^2 + 3y^2 = \mathbf{6y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = \mathbf{6y}$$

Smíšenou parciální derivaci podle x určíme jako **parciální derivaci 1. parciální derivace podle y**.

Smíšenou parciální derivaci podle y určíme jako **parciální derivaci 1. parciální derivace podle x**.

Smíšené parciální derivace podle x a y jsou si rovny!!! $\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}$

Příklad 17 / strana 78

Určete první a druhé parciální derivace (včetně smíšené) funkce

$z = x^3y^2 + 2x^2y^3 - xy$.

$$\text{1. parciální derivace z podle x}: \frac{\partial z}{\partial x} = \mathbf{3x^2y^2 + 4xy^3 - y}$$

$$\text{2. parciální derivace z podle x}: \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2 + 4y^3 - 0 = \mathbf{6xy^2 + 4y^3}$$

$$\text{1. parciální derivace z podle y}: \frac{\partial z}{\partial y} = \mathbf{2x^3y + 6x^2y^2 - x}$$

$$\text{2. parciální derivace z podle y}: \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 + 12x^2y - 0 = \mathbf{2x^3 + 12x^2y}$$

$$\text{smíšená parciální derivace podle x}: \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \mathbf{6x^2y + 12xy^2 - 1}$$

$$\text{smíšená parciální derivace podle y}: \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = \mathbf{6x^2y + 12xy^2 - 1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = \mathbf{6x^2y + 12xy^2 - 1}$$

Příklad 18 / strana 78

Určete první a druhé parciální derivace (včetně smíšené) funkce $z = xy + \frac{x}{y}$.

Nejprve si určíme derivaci zlomku : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

a) ∂ podle x $\quad u = x \quad u' = 1 \quad v = y \quad v' = 0$

$$\frac{\partial\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial x} = \frac{1 \cdot y - x \cdot 0}{y^2} = \frac{y}{y^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}}$$

b) ∂ podle y $\quad u = x \quad u' = 0 \quad v = y \quad v' = 1$

$$\frac{\partial\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial y} = \frac{0 \cdot y - x \cdot 1}{y^2} = -\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y^2}}$$

1. parciální derivace z podle x : $\frac{\partial z}{\partial x} = \mathbf{y} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}}$

2. parciální derivace z podle x : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 + 0 = \mathbf{0} \qquad \frac{\partial\left(\frac{1}{y}\right)}{\partial x} = \frac{0 \cdot y + 1 \cdot 0}{y^2} = \frac{0}{y^2} = \mathbf{0}$

1. parciální derivace z podle y : $\frac{\partial z}{\partial y} = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y^2}}$

2. parciální derivace z podle y : $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 - \frac{0 \cdot y^2 - x \cdot 2y}{y^4} = 0 - \frac{-2xy}{y^4} = \frac{\mathbf{2x}}{\mathbf{y^3}}$

smíšená parciální derivace podle x : $\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = 1 - \frac{1 \cdot y^2 - x \cdot 0}{y^4} = 1 - \frac{y^2}{y^4} = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y^2}}$

smíšená parciální derivace podle y : $\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = 1 + y^{-2} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y^2}} \qquad \left(\frac{1}{y}\right)' = \left(y^{-1}\right)' = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y^2}}$$

Příklad 19 / strana 78

Určete první a druhé parciální derivace (včetně smíšené) funkce $z = e^{xy}$.

1. parciální derivace z podle x: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \mathbf{e^{xy} \cdot y}$ $\qquad \left(e^{k\cdot a}\right)' = e^{k\cdot a} \cdot (k \cdot a)' = e^{k\cdot a} \cdot k$

2. parciální derivace z podle x: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{xy} \cdot y \cdot y + e^{xy} \cdot 0 = \mathbf{e^{xy} \cdot y^2}$

1. parciální derivace z podle y: $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \mathbf{e^{xy} \cdot x}$ $\qquad$ smíšená derivace $\Rightarrow (u.v)' = u'\cdot v + u \cdot v'$

2. parciální derivace z podle y: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{xy} \cdot x \cdot x + e^{xy} \cdot 0 = \mathbf{e^{xy} \cdot x^2}$

smíšená parciální derivace podle x: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = e^{xy} \cdot y \cdot x + e^{xy} \cdot 1 = \mathbf{e^{xy} \cdot (xy + 1)}$

smíšená parciální derivace podle y: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = e^{xy} \cdot x \cdot y + e^{xy} \cdot 1 = \mathbf{e^{xy} \cdot (xy + 1)}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = \mathbf{e^{xy} \cdot (xy + 1)}$$

Příklad 20 / strana 78

Určete první a druhé parciální derivace (včetně smíšené) funkce

$z = x^2y^3 - xy^2 + x^2y + 5$.

1. parciální derivace z podle x: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 - y^2 + 2xy + 0 = \mathbf{2xy^3 - y^2 + 2xy}$

2. parciální derivace z podle x: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^3 - 0 + 2y = \mathbf{2y^3 + 2y}$

1. parciální derivace z podle y: $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2 - 2xy + x^2 + 0 = \mathbf{3x^2y^2 - 2xy + x^2}$

2. parciální derivace z podle y: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^2y - 2x + 0 = \mathbf{6x^2y - 2x}$

smíšená parciální derivace podle x: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \mathbf{6xy^2 - 2y + 2x}$

smíšená parciální derivace podle y: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = \mathbf{6xy^2 - 2y + 2x}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = \mathbf{6xy^2 - 2y + 2x}$$

Příklad 21 / strana 78

Určete první a druhé parciální derivace (včetně smíšené) funkce

$z = xy^4 - y \cdot \ln x - 5x^3y^3 + 1.$

1. parciální derivace z podle x: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y^4 - \left(0 \cdot \ln x + y \cdot \dfrac{1}{x}\right) - 15x^2y^3 + 0 = \mathbf{y^4 - \dfrac{y}{x} - 15x^2y^3}$

2. parciální derivace z podle x: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 - \dfrac{0 \cdot x - y \cdot 1}{x^2} - 30xy^3 = \mathbf{\dfrac{y}{x^2} - 30xy^3}$

1. parciální derivace z podle y: $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 4xy^3 - (1 \cdot \ln x - y \cdot 0) - 15x^3y^2 + 0 =$

$= \mathbf{4xy^3 - \ln x - 15x^3y^2}$

2. parciální derivace z podle y: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12xy^2 - 0 - 30x^3y = \mathbf{12xy^2 - 30x^3y}$

smíšená parciální derivace podle x: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \mathbf{4y^3 - \dfrac{1}{x} - 45x^2y^2}$

smíšená parciální derivace podle y: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = 4y^3 - \left(\dfrac{x - y \cdot 0}{x^2}\right) - 45x^2y^2 = \mathbf{4y^3 - \dfrac{1}{x} - 45x^2y^2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = \mathbf{4y^3 - \frac{1}{x} - 45x^2y^2}$$

Příklad 22 / strana 79

Určete první a druhé parciální derivace (včetně smíšené) funkce $z = \ln\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

$$z = \ln\sqrt{\frac{x}{y}} = \ln\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} = \ln\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{funkce je složená, kde } \frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$$

$$1.\ \text{parciální derivace z podle x}: \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}} \cdot \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\cdot 0}{\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}}{y} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}\cdot y} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-1}}{2} = \frac{x^{-1}\cdot y^0}{2} = \mathbf{\frac{1}{2x}}$$

$$2.\ \text{parciální derivace z podle x}: \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{2x}\right)' = \left(2x^{-1}\right)' = -2x^{-2} = \mathbf{\frac{-1}{2x^2}}$$

$$1.\ \text{parciální derivace z podle y}: \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}} \cdot \frac{0\cdot y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\cdot \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}}{\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}}{y} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}\cdot y} = -\frac{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{-1}}{2} = -\frac{x^0\cdot y^{-1}}{2} = \mathbf{\frac{-1}{2y}}$$

$$2.\ \text{parciální derivace z podle y}: \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{-1}{2y}\right)' = \left(-2y^{-1}\right)' = 2y^{-2} = \mathbf{\frac{1}{2y^2}}$$

$$\text{smíšená parciální derivace podle x}: \frac{\partial^2 z}{\partial y\cdot\partial x} = \left(2y^{-2}\right)' = \mathbf{0}$$

$$\text{smíšená parciální derivace podle y}: \frac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y} = \left(-2x^{-2}\right)' = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\cdot\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y} = \mathbf{0}$$

Příklad 25 / strana 79

Dokažte, že platí: $\frac{\partial^2 z}{\partial y\cdot\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y}$ pro funkci $z = xy\cdot\ln\frac{y}{x}$.

1. parciální derivace z podle x: $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \ln\frac{y}{x} + xy \cdot \frac{1}{\frac{y}{x}} \cdot \frac{0 \cdot x - y \cdot 1}{x^2} = y \cdot \ln\frac{y}{x} + xy \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{-y}{x^2} =$

$= y \cdot \ln\frac{y}{x} + \frac{-x^2 \cdot y^2}{x^2 \cdot y} = \mathbf{y \cdot \ln\frac{y}{x} - y}$

smíšená derivace podle y: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = 1 \cdot \ln\frac{y}{x} + y \cdot \frac{1}{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1 \cdot x - y \cdot 0}{x^2} - 1 = \ln\frac{y}{x} + y \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{x^2} - 1 =$

$= \ln\frac{y}{x} + 1 - 1 = \mathbf{\ln\frac{y}{x}}$

1. parciální derivace z podle y: $\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \ln\frac{y}{x} + xy \cdot \frac{1}{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1 \cdot x - y \cdot 0}{x^2} = x \cdot \ln\frac{y}{x} + xy \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{x^2} =$

$= \mathbf{x \cdot \ln\frac{y}{x} + x}$

smíšená derivace podle x: $\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = 1 \cdot \ln\frac{y}{x} + x \cdot \frac{1}{\frac{y}{x}} \cdot \frac{0 \cdot x - y \cdot 1}{x^2} + 1 = \ln\frac{y}{x} + x \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{-y}{x^2} + 1 =$

$= \ln\frac{y}{x} - 1 + 1 = \mathbf{\ln\frac{y}{x}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = \mathbf{\ln\frac{y}{x}}$

Použitá literatura:

[1] Tesař, J.: Sbírka úloh z matematiky pro fyziky, PF Jihočeská univerzita České Budějovice

OBSAH