Kapitola 6

Gravitace

Cíle

1. **Poznáte zákony pohybu planet, které na počátku 17. století objevil J. Kepler.**
2. **Seznámíte se s Newtonovým zákonem gravitace a pojmem gravitační pole.**
3. **Naučíte se používat gravitační zákon i Keplerovy zákony k řešení mnoha úloh, například o pohybu planet kolem slunce či pohybu družic kolem Země.**
4. **Dozvíte se, jak vypadá tíhové pole Země a také jak se gravitace projevuje v našem vesmíru.**

Víte, že…

Tycho Brahe sice ještě neznal dalekohled, používal však jiné důmyslené pomůcky. Například velké kovové úhloměry – tzv. kvadranty. Jeden vidíte na obrázku 6-1, dokázali byste popsat, jak se s takovým kvadrantem měřilo? Brahemu se podařilo určovat polohu objektů na obloze s přesností kolem 1 obloukové minuty.

Obrázek 6-1. Na rytině z roku 1598 je vyobrazen Tycho Brahe při práci v observaoři.

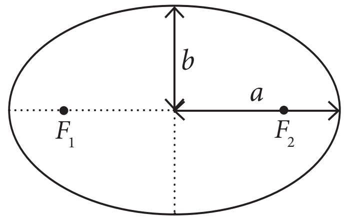
6.1. Keplerovy zákony pohybu planet

Říká se, že zákon gravitace objevil Newton když seděl pod jabloní a jablko ze stromu mu spadlo na hlavu. Tento příběh má k pravdě dost daleko. Ve skutečnosti byla cesta k objevení gravitačního zákona mnohem delší, a také zajímavější. Samotné studium pohybu těles na povrchu Země by k odhalení zákona gravitace určitě nestačilo. Bylo to přesné pozorování planet a následný objev zákonů, kterými se pohyb planet řídí, co umožnilo Newtonovi jeho velký objev.

Pohyby planet po obloze pozorovali astronomové již od starověku. Velice přesná pozorování, byť stále ještě bez použití dalekohledu, prováděl na konci 16. století dánský astronom **Tycho Brahe.** Podařilo se mu na nějaký čas získat přízeň Dánského krále, který mu věnoval ostrov Hven a zaplatil zde výstavbu největší astronomické observatoře své doby. Po dvacet let pak mohl Brahe zaznamenávat polohy planet a hvězd. V roce 1600 se Tycho Brahe přesunul do Prahy, kde se stal jeho asistentem **Johannes Kepler**. Kepler si dal za úkol pomocí matematiky a geometrie popsat pohyb planet kolem Slunce. V té době již mohl navázat na díla Galilea Galileiho nebo Mikuláše Koperníka, vyvracející teorii geocentrizmu, tedy že Země je v centru Vesmíru a kolem ní obíhá Slunce a ostatní planety. Kepler prováděl podrobnou analýzu Braheho přesných údajů (uvažte, že všechny složité výpočty musel dělat ručně) a výsledkem byly tři zákony pohybu planet. Dnes jsou známy jako **Keplerovy zákony:**

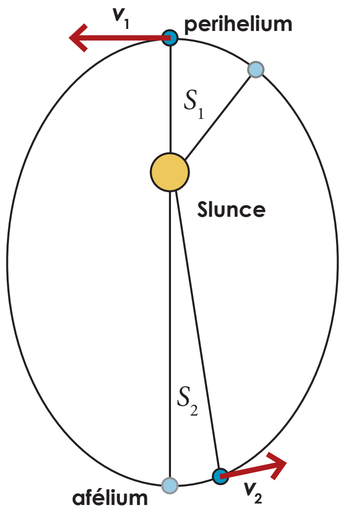
1. Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce.
2. Obsahy ploch opsaných průvodičem planety za jednotku času jsou konstantní.
3. Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je roven poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich drah.

První zákon popisuje tvar trajektorie planet. **Elipsa** je jedna ze základních geometrických křivek, je to jakási „protažená“ kružnice (viz obrázek 6-2). Elipsa má dvě ohniska, jejichž vzdálenost určuje tvar elipsy – „jak moc je protažená“. (S vlastnostmi elipsy se podrobněji seznámíte v matematice.) Důležité je, že elipsy, po kterých se pohybují planety, jsou „málo odlišné“ od kružnic. Přesnější představu získáme porovnáme-li nejmenší a největší vzdálenost Země od Slunce. V tzv. **periheliu** je Země Slunci nejblíž, konkrétně 147 miliónů km. Na opačné straně oběžné dráhy je Země v tzv. **aféliu**, její vzdálenost od Slunce je 152 miliónů km.



Obrázek 6-2. Parametry elipsy.
a .... **hlavní poloosa**
b .... **vedlejší poloosa**
F_1, F_2... **ohniska**

Druhý zákon upřesňuje, jak se planety po elipsách pohybují. Průvodič je úsečka spojující střed planety se středem Slunce. Při pohybu planety se délka průvodiče mění, ale obsahy ploch, které průvodič opíše za určitý čas zůstávají stejné. To znamená, že **se mění velikost rychlosti planety** (viz obrázek 6-3). V periheliu je rychlost největší a v aféliu nejmenší.



Obrázek 6-3. Pohyb planety kolem Slunce po elipse. V periheliu je rychlost planety největší, v aféliu nejmenší.

Třetí zákon se týká základních parametrů pohybu planety – oběžné doby (periody) T a délky hlavní poloosy a (viz obrázek 6-2). Můžeme ho zapsat jednoduše pro dvě planety pomocí veličin T a a. Jelikož planety se pohybují po elipsách málo odlišných od kružnic, je možné nahradit délku hlavní poloosy a střední vzdáleností planety od Slunce r (vztah potom bude platit přibližně). Matematicky pak můžeme třetí Keplerův zákon zapsat jako

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{a_1^3}{a_2^3} \qquad \text{nebo} \qquad \frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{r_1^3}{r_2^3}.$$

Protože vzdálenosti ve Sluneční soustavě jsou velké, zvolili astronomové pro tyto účely jako základní jednotku právě střední vzdálenost planety Země od Slunce. Tato délka se nazývá **astronomická jednotka**, značí se **AU** (astromonical unit). Platí

$$1\,\mathrm{AU} = r_Z = 150\cdot 10^6\,\mathrm{km}.$$

Podobně bude výhodné určovat dobu oběhu planety v rocích. Jednotku **1 rok** je opět nutné definovat přesně. Době oběhu Země kolem Slunce odpovídá přesně tzv. siderický rok, to je doba, za kterou se Slunce vrátí do stejné polohy na obloze vzhledem ke hvězdám. 1 rok = 365,256 dnů = $3{,}15581\cdot 10^7$ s.

Dosazujeme-li v astronomických jednotkách a rocích, můžeme jednoduše porovnáním s parametry pro Zemi ($r_Z = 1$ AU, $T_Z = 1$ rok) určit střední vzdálenost jakékoliv planety, známe-li její oběžnou dobu a obráceně.

Keplerovy zákony je možné použít nejen pro pohyb planet, ale pro každou sosutavu těles, která se pohybují v okolí centrálního tělesa, jehož hmotnost je mnohonásobně větší než je hmotnost obíhajících těles. Zákony můžeme použít například pro pohyb družic (včetně Měsíce) kolem Země.

Příklad 6-1

Střední vzdálenost planety Jupiter od Slunce je 5,20 AU. Vypočítejte jeho oběžnou dobu.

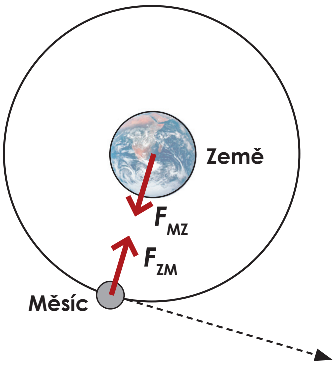
(a) Zapíšeme třetí Keplerův zákon a z něj vyjádříme neznámou T_1. Dostaneme

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{r_1^3}{r_2^3} \quad => \quad T_1^2=\frac{r_1^3}{r_2^3}T_2^2 \quad => \quad T_1=\sqrt{\frac{r_1^3}{r_2^3}}\,T_2.$$

Nyní dosadíme hodnoty pro Zemi $r_2 = 1$ AU, $T_2 = 1$ rok a Jupitera $r_1 = 5{,}20$ AU a dostaneme

$$T_1=\sqrt{\frac{5{,}20^3}{1}}\cdot 1\,\text{rok} = 11{,}9\,\text{roků}.$$

Oběžná doba Jupitera je 11,9 roků.



Obrázek 6-4. Kdybychom gravitaci „vypnuli", Měsíc by podle zákona setrvačnosti pokračoval v rovnoměrném pohybu v daném směru a od Země by se odpoutal. Gravitační síla je v tomto případě dostředivou silou.

6.2. Newtonův gravitační zákon

Základní myšlenka, která vedla Newtona k objevu gravitačního zákona, byla docela jednoduchá. Jablko ze stromu a stejně tak všechna ostatní tělesa padají, protože je Země přitahuje. Nemělo by působení této přitažlivé síly pokračovat mnohem dál až k Měsíci, který by díky ní setrvával v kruhovém pohybu kolem Země? Kdyby totiž na Měsíc žádná síla nepůsobila, musel by podle zákona setvačnosti setrvávat v rovnoměrném přímočarém pohybu (viz obrázek 6-4). Stejnou silou by pak také Slunce přitahovalo planety. Nyní bylo třeba využít Keplerovy zákony pohybu planet. Newton matematicky odvodil, že pohybuje-li se planeta po elipse podle tří Keplerových zákonů, musí na ni Slunce působit silou, jejíž velikost je nepřímo úměrná druhé mocnicně vzdálenosti r Slunce a planety

$$F = \text{konst}\,\frac{1}{r^2}\,.$$

Ještě zbývalo vzít v úvahu zákon akce a reakce, podle něhož musí být silové působení mezi dvěma tělesy vždy vzájemné (viz obrázek 6-4), a předpoklad, že gravitační síla je přímo úměrná hmotnostem působících těles.

Tímto způsobem získal Newton **obecný vztah pro gravitační sílu**, který dnes nazýváme **Newtonův gravitační zákon**. Ten říká, že dva hmotné body o hmotnostech m_1, m_2 ve vzdálenosti r se vzájemně přitahují gravitační silou o velikosti

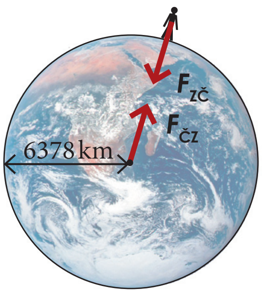
$$\boxed{F_G = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}.}$$

Konstanta G se nazývá **gravitační konstanta**. Její velikost je

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}}.$$

Hodnota gravitační konstanty určuje velikost gravitační síly pro dvě konkrétní částice v určité vzdálenosti. Budou-li například dvě kilogramová závaží ve vzdálenosti jeden metr, vyjde nám, že na sebe budou působit gravitační silou o velikosti $F_G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N}$. To je tak malá síla, že ji ani nedokážeme změřit. Gravitační síla mezi běžnými tělesy kolem nás je tak slabá, že její projevy vůbec nepozorujeme.

Gravitační zákon v uvedeném tvaru platí přesně jen pro hmotné body. Můžeme ho použít i na reálná tělesa, pokud jsou jejich vlastní rozměry zanedbatelné vzhledem k jejich vzálenosti. To je dobře splněno například pro Slunce a planety, ale rozhodně není splněno pro tělesa v blízkosti povrchu Země. Tento problém se dá naštěstí vyřešit velice jednoduše, protože Země má tvar koule. Dá se totiž dokázat, že **gravitační zákon platí** úplně stejně **i pro kulová tělesa** jako jsou planety a hvězdy (obecně sféricky symetrická tělesa). Místo vzálenosti hmotných bodů počítáme se vzdáleností středů koulí. Budeme-li chtít například určit gravitační sílu mezi člověkem a Zemí (viz. obrázek 6-5), budeme počítat se vzdáleností člověka (můžeme jej považovat za hmotný bod) a středu Země. Tato vzdálenost je přibližně rovna jednomu poloměru Země, což je 6378 km.



Obrázek 6-5. Vzájemné gravitační působení mezi člověkem a Zemí. Vzdálenost člověka od středu Země je přibližně 6378 km.

Zkusme nyní použít gravitační zákon pro výpočet síly, kterou je k Zemi přitahováno těleso o hmotnosti m. Označíme-li hmotnost Země m_Z a poloměr Země r_Z dostaneme

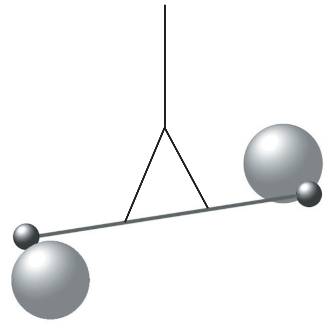
$$F_G = G\frac{m_Z m}{r_Z^2} = \frac{G\,m_Z}{r_Z^2}m\,.$$

Tento vztah můžeme porovnat se známým vztahem pro tíhovou sílu $F_G = mg$. Vidíme, že výraz Gm_Z/r_Z^2 by měl odpovídat gravitačnímu zrychlení g

$$g = \frac{G\,m_Z}{r_Z^2}\,.$$

Pomocí tohoto vztahu můžeme vypočítat **velikost gravitačního zrychlení** nejen na Zemi, ale i **na jakékoliv planetě**, známe-li její hmotnost a poloměr.

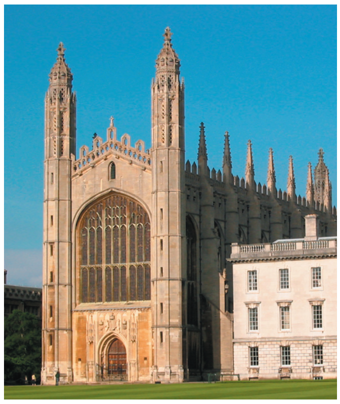
Vraťme se však ještě naposled do historie. Uvedený vztah pro gravitační zrychlení na povrchu planety by mohl dobře posloužit k určení hodnoty gravitační konstanty G. V Newtonově době ale nebyla známá hmotnost Země, proto ani Newton nemohl **určit hodnotu gravitační konstanty** (mohl ručit pouze hodnotu součinu Gm_Z). Změřit hodnotu G se podařilo až v roce 1798, tedy víc jak 100 let po objevu gravitačního zákona, dalšímu Angličanovi **Henrymu Cavendishovi**. Sestrojil velmi citlivou aparaturu (viz obrázek 6-6), která umožňovala změřit velikost gravitační síly mezi velkými olověnými koulemi, jejichž hmotnosti i vzálenosti znal. Změřené hodnoty pak mohl dosadit do gravitačního zákona a vyjádřit neznámou G. Změření velikosti gravitační konstanty pak umožňovalo získat ještě jeden neméně důležitý výsledek. Ze vztahu pro velikost gravitačního zrychlení na povrchu Země, mohl Cavendish jenoduše vyjádřit **hmotnost Země**. Proto bývá Cavendishův pokus často nazýván „vážení Země“, přestože šlo o měření gravitační konstanty.



Obrázek 6-6. Princip Cavendishova experimentu. Dvě menší olověné koule byly připevněny na tyči vyvážené na pevném vlákně. Po přiblížení velkých olověných koulí se tyč rozkývala. Z periody vzniklých kmitů určil Cavendish velikost gravitační síly mezi koulemi.

Víte, že…

Henry Cavendish po sobě zanechal značný majetek, který byl v roce 1871 použit k založení a vybavení Cavendishovy Laboratoře na univerzitě v Cambridge. Laboratoř se stala centrem světové fyziky a zůstává jím dodnes. Pracovali zde například J. C. Maxwell nebo E. Rutheford a může se pochlubit třeba objevem protonu a elektronu, nebo z moderní doby například objevem struktury DNA.



Obrázek 6-7. Univerzita v Cambridge byla založena v 13. století a patří mezi nejstarší v evropě.

Příklad 6-2

Henry Cavendish ve svém pokusu použil olověné koule o hmotnostech 730 kg a 158 kg. Vypočtěte jak velkou gravitační silou na sebe tyto koule působí, jestliže jejich středy se nachází ve vzdálenosti 48 cm.

Převedeme jednotky na základní (48 cm = 0,48 m) a dosadíme do Newtonova gravitačního zákona

$$F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{730.158}{(0{,}48)^2}\ \mathrm{N} = 0{,}240\ \mathrm{mN}.$$

Koule na sebe působí gravitační silou $F_G = 0{,}240$ mN.

Příklad 6-3

Vypočítejte hmotnost Země s použitím veličin, které měl Henry Cavendish k dispozici: gravitační konstanta $G = 6{,}7\cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}}$, poloměr Země $r_Z = 6378$ km a gravitační zrychlení $g = 9{,}8\,\mathrm{ms^{-2}}$.

Použijeme vztah pro velikost gravitačního zrychlení, ze kterého vyjádříme neznámou m_Z (poloměr Země nezapomeneme převést na metry: $r_Z = 6378\,\mathrm{km} = 6{,}378\cdot 10^6\,\mathrm{m}$).

$$g = \frac{G\,m_Z}{r_Z^2} \quad => \quad m_Z = \frac{r_Z^2 g}{G} = \frac{(6{,}378\cdot 10^6)^2\cdot 9{,}8}{6{,}7\cdot 10^{-11}}\ \mathrm{kg} = 5{,}9.10^{24}\ \mathrm{kg}.$$

Ze zadaných údajů vyjde hmotnost Země $5{,}9\cdot 10^{24}$ kg. Hmotnost Země byla zpřesněna až ve 20. století na $5{,}9725\cdot 10^{24}$ kg.

Víte, že…

Ve Vesmíru existují objekty s tak obrovskou hustotou, že velikost gravitačního zrychlení v jejich nejbližším okolí nedovoluje žádnému hmotnému tělesu, ani světlu uniknout z jejich gravitačního pole. Proto tyto objekty dostaly název Černé díry.

V roce 1915 objevil Albert Einstein novou teorii gravitace – obecnou teorii relativity, kde dokázal, že takový objekt může teoreticky existovat. Astrofyzikové pak přišli na to, že černá díra může skutečně vzniknout zhroucením hvězdy mnohonásobně větší než Slunce.

6.3. Gravitační pole

Už v kapitole o zákonech pohybu jsme poznali, že některé síly působí jen při kontaktu těles (tření, odpor vzduchu,...), jiné **působí na dálku**. Pro lepší popis sil působících na dálku vymysleli fyzikové pojem **silové pole**. Silové pole se vždy váže k určité konkrétní síle, v případě gravitační síly proto mluvíme o gravitačním poli. Gravitační pole obklopuje každé hmotné těleso. Znalost gravitačního pole vybraného tělesa nám umožňuje říci, jakou silou by toto těleso působilo na jakékoliv jiné hmotné těleso umístěné v jeho okolí.

Chceme-li zjistit, jak vypadá gravitační pole nějakého hmotného tělesa o hmotnosti M (například Země), můžeme to udělat takto. Vezmeme malé zkušební těleso o hmotnosti m (například závaží) a umístíme jej do libovolného bodu prostoru. Z Newtonova gravitačního zákona můžeme určit sílu $\boldsymbol{F_G}$, jakou Země na závaží působí. Nyní stačí vydělit sílu $\boldsymbol{F_G}$ hmotností zkušebního tělesa m a dostaneme veličinu, popisující gravitační pole v daném bodě. Tato veličina se nazývá **intenzita gravitačního pole** nebo také **gravitační zrychlení** a značí se $\boldsymbol{a_G}$. Je to **vektorová** veličina a pro její velikost platí

$$\boxed{a_G = \frac{F_G}{m} = G\frac{M}{r^2}.}$$

Jednotkou intenzity gravitačního pole je $\mathrm{Nkg^{-1} = ms^{-2}}$, což je zároveň jednotka zrychlení, proto se používá označení gravitační zrychlení. Pokud do gravitačního pole umístíme jakékoliv těleso, na které nepůsobí žádné další síly, bude se pohybovat se zrychlením $\boldsymbol{a_G}$.

Zabývejme se nyní podrobněji vlastnostmi gravitačního pole Země. Dosadíme-li do vztahu pro gravitační zrychlení za M hmotnost Země $5.97\cdot10^{24}$ kg, za r poloměr Země 6378 km a hodnotu gravitační konstanty G, dostaneme přibližnou hodnotu gravitačního zrychlení na povrchu Země

$$a_G = G\frac{M}{r_Z^2} = 6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{5{,}97\cdot10^{24}}{(6378\cdot10^3)^2}\,\mathrm{ms^{-2}} = 9{,}83\,\mathrm{ms^{-2}}.$$

Budeme-li se od Země vzdalovat, bude **gravitační zrychlení klesat s druhou mocninou vzdálenosti** od středu Země (ve vzorci dělíme r^2). Například ve vzdálenosti $2r_Z$ od středu Země, což odpovídá výšce 6378 km nad povrchem, bude gravitační zrychlení poloviční, v trojnásobné vzdálenosti to bude jedna devítina, v desetinásobné vzdálenosti jedna setina, atd. Velikost gravitačního zrychlení v různých výškách nad povrhem Země je vypočítána v tabulce vlevo. Teoreticky gravitační pole nikde nekončí, ovšem ve velkých vzdálenostech je již tak slabé, že jej nedokážeme změřit.

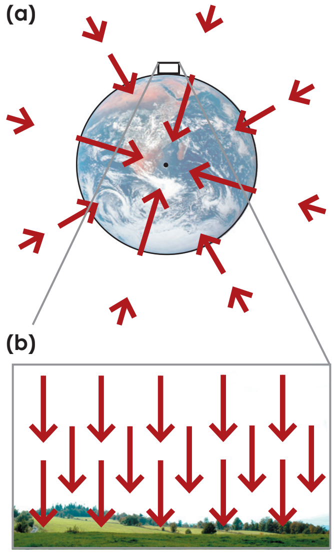
Gravitační zrychlení je vektor, jehož směr je vždy určen směrem gravitační síly. Země má přibližně tvar koule a vektor $\boldsymbol{a_G}$ proto vždy směřuje do středu Země – centra gravitační síly. Pro tento tvar gravitačního pole používáme název **centrální gravitační pole**. Centrální gravitační pole je typické nejen pro naši Zemi (viz obrázek 6-8a), ale všechna kulová vesmírná tělesa – planety, hvězdy, měsíce.

Často sledujeme projevy gravitačního pole jen v malé části prostoru blízko povrchu Země. V tabulce vlevo vidíte, že na Mt. Everestu je a_G jen o $0{,}03\,\mathrm{ms^{-2}}$

Velikost gravitačního zrychlení v různých vzdálenostech *h* od povrchu Země.

kde	a_G
hladina moře **h = 0 km**	$9{,}83\,\mathrm{ms^{-2}}$
Mt. Everest **h = 9 km**	$9{,}80\,\mathrm{ms^{-2}}$
oběžná dráha raketoplánu **h = 400 km**	$8{,}70\,\mathrm{ms^{-2}}$
komunikační družice **h = 36 000 km**	$0{,}23\,\mathrm{ms^{-2}}$
Měsíc **h = 380 000 km**	$0{,}003\,\mathrm{ms^{-2}}$

menší než na hladině moře. Podobné je to se směrem gravitačního zrychlení. Vzhledem k obrovským rozměrům Země se budou v oblasti o rozměrech řádově několika kilometrů vektory gravitačního zrychlení jen nepatrně odlišovat od rovnoběžných. Proto můžeme pro takovouto oblast na povrchu Země s velkou přesností použít model **homogenního gravitačního pole**. V homogenním gravitačním poli mají vektory gravitačního zrychlení ve všech bodech stejnou velikost i směr (viz obrázek 6-8b).



Obrázek 6-8.
(a) Centrální gravitační pole. Všechny vektory gravitačního zrychlení směřují do jednoho bodu a jejich velikost klesá s druhou mocninou vzdálenosti.
(b) Homogenní gravitační pole. Gravitační zrychlení má ve všech bodech prostoru stejnou velikost i směr.

Příklad 6-4

Vypočítejte gravitační zrychlení na povrchu Země, způsobené gravitačním polem Měsíce, jehož hmotnost je $m_M = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg, a obíhá ve ve vzdálenosti $d = 384\,000$ km od Země.

Dosadíme do vztahu pro velikost gravitačního zrychlení a dostaneme

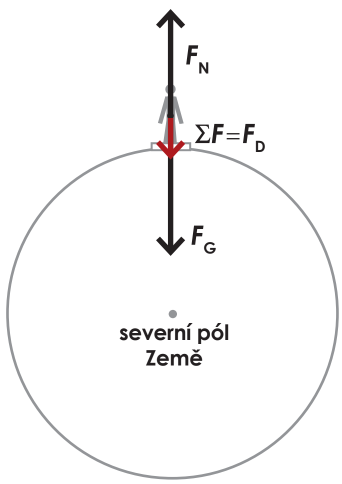
$$a_G = G\,\frac{m_M}{d^2} = 6{,}67.10^{-11}\,\frac{7{,}35.10^{22}}{(3{,}84.10^8)^2}\,\mathrm{ms^{-2}} = 3{,}3.10^{-5}\,\mathrm{ms^{-2}}.$$

Gravitační pole Měsíce je na Zemi je poměrně slabé, $a_G = 3{,}3.10^{-5}$ ms^{-2}. Přesto můžeme pozorovat jeho výrazné projevy na Zemi – příliv a odliv. Může za to tzv. slapová síla. To je síla, působící na tělesa v nehomogenním gravitačním poli. V případě Země působí Měsíc na její přivrácenou stranu větší silou než na odvrácenou a tím dochází k deformaci jejího povrchu (dmutí mořské hladiny).

6.4. Tíhové pole Země

Dosud jsme nerozlišovali mezi pojmy tíhové zrychlení a gravitační zrychlení případně tíhová síla a gravitační síla. Nyní si ukážeme, jaký je mezi nimi rozdíl. V předchozím odstavci jsme vypočítali, že gravitační zrychlení na povrchu Země je $a_G = 9{,}83$ ms^{-2}. Při přesném měření bychom však na různých místech povrchu Země naměřili jiné hodnoty zrychlení volně padajících těles. V praxi se místní tíhové zrychlení měří například pomocí kyvadla. Mohli bychom jej jednoduše určit také pomocí přesné digitální váhy. Váha totiž neměří hmotnost tělesa, ale velikost **tíhové síly** *mg*, tedy síly, jakou vážené těleso působí na váhu. **Tíhové zrychlení** je určeno právě velikostí tíhové síly. Pokusme se vysvětlit, proč se místní tíhové zrychlení liší od gravitačního zrychlení a také vypočítat, jak je tato odchylka velká.

Hlavním důvodem je **rotace Země** kolem své osy. Každé těleso na povrchu Země (není-li přesně na pólu) se tak pohybuje po kružnici o poloměru daném zeměpisnou šířkou s periodou 24 hodin. Důsledkem toho je, že vztažná soustava spojená se povrchem Země není inerciální. Pro započítání vlivu rotace je nutné podívat se na situaci z hlediska inerciální vztažné soustavy spojené se středem Země. Zkusme popsat situaci člověka, stojícího na váze, který se nachází na rovníku. Tento člověk vykonává pohyb po kružnici o poloměru $r_Z = 6378$ km obvodovou rychlostí $v = 2\pi r_Z / T = 2\pi \cdot 6378 \cdot 10^3\,\mathrm{m} / (24\,\mathrm{h} \cdot 3600\,\mathrm{s}) = 464\,\mathrm{ms^{-1}}$. Na člověka působí gravitační síla $\boldsymbol{F}_G$, jejíž velikost je $F_G = m a_G$, kde m je hmotnost člověka. Pak na něj působí váha kolmou tlakovou silou $\boldsymbol{F}_N$, jejíž velikost určuje údaj na váze, platí proto $F_N = mg$. Nyní je třeba vzít v úvahu, že člověk není v klidu, ale pohybuje se po kružnici. Proto výslednice gravitační a kolmé tlakové síly nemůže být nulová, ale musí tvořit dostředivou sílu, jejíž velikost je $F_D = mv^2/ r_Z$.



Obrázek 6-9.
Silový diagram pro člověka, stojícího na rovníku.

Silový diagram této situace ukazuje obrázek 6-9. Z něj vidíme, že pro velikosti sil musí platit

$$F_D = F_G - F_N \quad \Rightarrow \quad m\frac{v^2}{r_Z} = m a_G - m g \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{r_Z} = a_G - g \quad \Rightarrow \quad g = a_G - \frac{v^2}{r_Z}.$$

Po dosazení dostaneme, že tíhové zrychlení g na rovníku bude

$$g = 9{,}83\,\mathrm{ms^{-2}} - \frac{(464\,\mathrm{ms^{-1}})^2}{6378\cdot 10^3\,\mathrm{m}} = 9{,}83\,\mathrm{ms^{-2}} - 0{,}03\,\mathrm{ms^{-2}}.$$

Tím jsme vypočítali vliv rotace Země na tíhové zrychlení na rovníku. Směrem k pólům se velikost dostředivé síly zmenšuje a s ním i vliv rotace Země na tíhové zrychlení.

Kromě rotace Země má na místní tíhové zrychlení vliv ještě **nepravidelný tvar Země**. Planeta je mírně zploštělá, vzdálenost ke středu Země na rovníku je 6378 km zatímco na pólech jen 6357 km. Při ještě přesnějším měření bychom zjistili další odchylky v rámci jednotlivých kontinetů a oceánů, způsobené různou tlou3ťkou zemské kůry. Přesným výzkumem gravitačního pole Země se zabývá obor zvaný gravimetrie.

Hodnoty tíhového zrychlení se pohybují mezi $g = 9{,}78\,\mathrm{ms^{-2}}$ na rovníku a $g = 9{,}83\,\mathrm{ms^{-2}}$ na pólech. V České republice je $g = 9{,}81\,\mathrm{ms^{-2}}$. Vidíme, že odchylky nejsou velké, ve většině případů můžeme počítat se zaokrouhlenou hodnotou $g = 9{,}8\,\mathrm{ms^{-2}}$.

Víte, že…

První umělá družice Země se jmenovala Sputnik a byla vypuštěna na oběžnou dráhu v roce 1957.

Od té doby se pro družice nacházely stále nové úkoly a jejich význam i počet rychle rostl. Dnes obíhá kolem naší planety přes osm set družic.

Kromě vojenských (například špionážních) máme řadu vědeckých družic (třeba Hubbleův vesmírný dalekohled), navigační družice (například pro navigační systém GPS), a také meteorologické či telekomunikační družice.

Obrázek 6-10. Největší umělou družicí Země je v současné době mezinárodní kosmická stanice ISS.

6.5. Pohyb těles v gravitačním poli Země

Pohybuje-li se těleso v blízkosti povrchu Země, nachází se **v homogenním gravitačním poli**. Tento druh pohybu jsme již podrobně prozkoumali v kapitolách o přímočarém (volný pád) a křivočarém pohybu (šikmý vrh). Víme, že těleso, na které působí jen gravitační síla, **se bude pohybovat po přímce nebo části paraboly**.

Zbývá nám vyřešit problém pohybu těles ve větší vzdálenosti od povrchu Země, **v centrálním gravitačním poli**. Typickým příkladem je **pohyb družic**. Co o jejich pohybu víme? Družice se pohybují po kružnicích v různé výšce nad povrchem Země. Ke svému pohybu nepotřebují žádný vlastní pohon. Jedná se tedy o pohyb po kružnici, kde gravitační síla je potřebnou dostředivou silou. I na tento případ jsme už narazili při zkoumání dostředivé síly v kapitole Zákony pohybu. Odstavec o pohybu družice si znovu přečtěte.

Pohyb družice jsme tehdy popisovali jen kvalitativně. Nyní vypočítáme, jakou rychlostí se musí družice pohybovat, aby obíhala Zemi po kružnici o daném poloměru r. Gravitační síla musí být dostředivou silou, platí

$$F_D = F_G \quad \Rightarrow \quad m\frac{v^2}{r} = G\frac{m m_Z}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = G\frac{m_Z}{r}.$$

Získali jsme hledaný vztah mezi oběžnou rychlostí a poloměrem kruhové trajektorie družice. Tento vztah můžeme ještě upravit do praktičtějšího tvaru tím, že poloměr kružnice r nahradíme součtem poloměru Země r_Z a výšky družice nad povrchem h ($r = r_Z + h$). Součin Gm_Z pak můžeme vyjádřit ze vztahu pro gravitační zrychlení na povrchu Země jako $Gm_Z = a_G r_Z^2$. Dohromady tak dostaneme

$$v^2 = G\frac{m_Z}{r} = a_G \frac{r_Z^2}{r_Z + h} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{a_G \frac{r_Z^2}{r_Z + h}}.$$

Vidíme, že velikost **kruhové rychlosti** nezávisí na hmotnosti tělesa, ale jen na jeho **výšce nad povrchem**. Ze vztahu je také vidět, že s rostoucí výškou h se velikost kruhové rychlosti zmenšuje. Největší kruhová rychlost, kterou by se muselo pohybovat těleso obíhající v nulové výšce, se nazývá **první kosmická rychlost**. Dosazením $h = 0$ snadno zjistíme, že velikost první kosmické (kruhové) rychlosti je $v_K = \sqrt{g r_Z} = 7{,}9\,\mathrm{km s^{-1}}$.

Příklad 6-5

Družice, která vysílá signál satelitní televize nebo meteorologická družice musí stále setrvávat nad určitým bodem vzhledem k povrchu Země. Tento druh oběžné dráhy se nazývá geostacionární. Vypočítejte, v jaké výšce musí geostacionární družice obíhat.

Aby se družice vzhledem k povrchu Země nepohybovala, musí obíhat se stejnou periodou, jako je perioda otáčení Země $T = 24$ hodin. Její rychlost proto musí mít velikost $v = 2\pi(r_Z + h)/T$. Zároveň musí být splněna podmínka

$$v = \sqrt{a_G \frac{r_Z^2}{r_Z + h}}.$$

Porovnáním obou vztahů dostaneme rovnici

$$2\pi\frac{(r_Z + h)}{T} = \sqrt{a_G \frac{r_Z^2}{r_Z + h}} \quad \Rightarrow \quad \frac{4\pi^2}{T^2}(r_Z + h)^2 = a_G \frac{r_Z^2}{r_Z + h} \quad \Rightarrow \quad (r_Z + h)^3 = \frac{a_G r_Z^2 T^2}{4\pi^2},$$

z níž vyjádříme $(r_Z + h)$ a dosadíme za $T = 24\,\mathrm{h} = 24 \cdot 3\,600\,\mathrm{s} = 86\,400\,\mathrm{s}$

$$(r_Z + h) = \sqrt[3]{\frac{a_G r_Z^2 T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{9{,}8.(6378.10^3)^2\, 86\,400^2}{4\pi^2}} = 42{,}2 \cdot 10^6\,\mathrm{m}.$$

Hledaná výška geostacionární družice nad povrchem je

$$h = 42{,}2 \cdot 10^6\,\mathrm{m} - 6{,}378 \cdot 10^6\,\mathrm{m} = 35{,}8 \cdot 10^6\,\mathrm{m} = 35{,}8 \cdot 10^6\,\mathrm{m} = 35\,800\,\mathrm{km}.$$

Pohybem po kružnici nejsou vyčerpány všechny možnosti pohybu tělesa v centrálním gravitačním poli. Podrobnější matematickou analýzou problému lze dokázat, že přichází v úvahu ještě dvě možnosti. Za prvé **pohyb po elipse**, kdy se centrum gravitačního pole nachází v jednom z jejích ohnisek. Příklad takového pohybu už známe, je jím pohyb planet kolem Slunce. Po velmi „protáhlých“ elipsách se pohybují také komety.

Poslední možností je **pohyb po části paraboly.** To je případ neperiodických pohybů, kdy má těleso dost velkou rychlost na to, aby z gravitačního pole uniklo. Po parabolické trajektorii se pohybuje například sonda, která je vyslána k jiné planetě sluneční soustavy. Minimální rychlost, kterou musí těleso získat, aby uniklo z gravitačního pole Země, nazýváme **druhou kosmickou** (parabolickou) **rychlostí**. Dá se spočítat, že pro její velikost platí $v_P = \sqrt{2}\, v_K = 11{,}2\,\mathrm{km s^{-1}}$.

Víte, že...

Gravitace není jen silou, která nás drží na povrchu Země a Zemi na oběžné dráze kolem Slunce. Gravitace má rozhodující vliv na strukturu celého Vesmíru. Je to síla, která váže dohromady miliardy hvězd v naší Galaxii, stejně jako v jiných galaxiích, které dohromady vytváří skupiny a kupy galaxií.

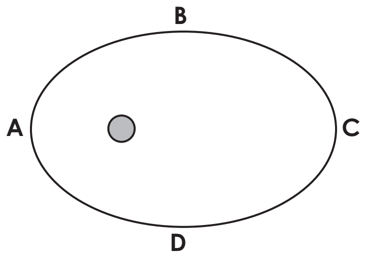
Obrázek 6-11. Galaxie v Andromedě je od nás vzdálena přes dva miliony světelných let a je velmi podobná naší Mléčné dráze.

Obrázek 6-12. Tři možné typy trajektorií tělesa při pohybu v centrálním gravitačním poli.

Otázky

1

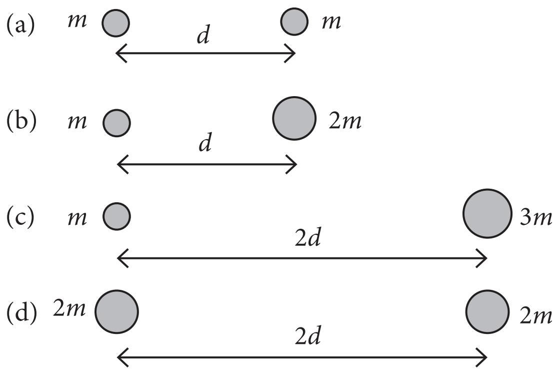
Na obrázku je schematicky zakreslena trajektorie Země v centrálním gravitačním poli Slunce.



(a) Ve kterém bodě má planeta nejmenší rychlost?
(b) Ve kterém bodě je na Zemi zimní slunovrat?

2

Seřaďte následující dvojice částic podle velikost gravitační síly, kterou na sebe působí



3

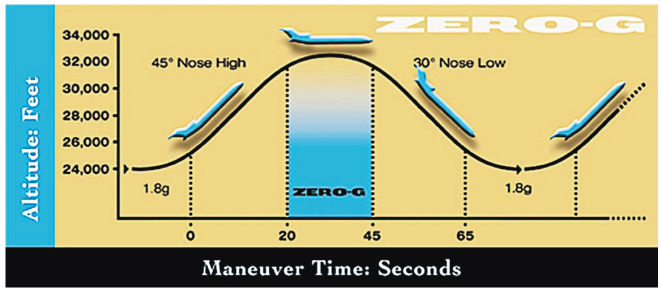
Jak by se změnilo gravitační zrychlení na povrchu Země
(a) kdyby měla poloviční hustotu a stejný poloměr,
(b) kdyby měla stejnou hustotu a poloviční poloměr,
(c) kdyby měla stejnou hustotu a dvojnásobný poloměr?

4

Proč je v kosmické lodi na oběžné dráze kolem Země stav beztíže?
(a) Loď je ve vesmírném prostoru, kde už nepůsobí gravitační pole Země.
(b) Na loď i astronauty působí pouze gravitační síla Země, která má charakter dostředivé síly.
(c) Gravitační pole je odstíněno stěnou kosmické lodě.
(d) Loď je v takové vzdálenosti od Země, že působení gravitační síly můžeme zanedbat.
(e) Gravitační působení Země je kompenzováno gravitačním polem jiných vesmírných těles.

5

V americkém středisku pro letectví a vesmír (NASA) používají pro výzkum pobytu v beztížném stavu upravený Boeing 727, který se pohybuje podle náčrtu na obrázku. Popište a vysvětlete všechny fáze jeho pohybu.



6

Na kterých místech na Zemi mají gravitační a tíhové zrychlení (a) stejnou velikost, (b) stejný směr?

7

Umělá družice Země obíhala ve výšce h_1=600 km nad povrchem Země. Poté byla navedena na dráhu o výšce h_2=800 m. Jak se změnily její parametry – obvodová rychlost a doba oběhu?

Úlohy

1

Pomocí třetího Keplerova zákona doplňte chybějící údaje v tabulce. Zjistěte přesné parametry planet a výsledky pak porovnejte.

planeta	střední vzdálenost	oběžná doba
Merkur		0,24 roků
Venuše		0,62 roků
Země	1,00 AU	1,00 roků
Mars		1,88 roků
Jupiter	5,20 AU	
Saturn	8,08 AU	

2

Halleyova kometa se objevuje na obloze s periodou 76 let. Pomocí třetího Keplerova zákona odhadněte, do jaké největší vzdáleností od Slunce se kometa dostává. Uvažte, že kometa se pohybuje po velmi „protáhlé" elipse.
[přibližně 35 AU = $5{,}3.10^{12}$ m]

3

Z třetího Keplerova zákona odvoďte, že síla, kterou jsou planety přitahovány ke slunci musí být nepřímo úměrná čtverci jejich vzdálenosti. Předpokládejte kruhovou trajektorii a použijte vztah pro dostředivou sílu.

4

Kdybychom Zemi zastavili, jak dlouho by padala na Slunce? Návod: užijte 3. Keplerův zákon podobně jako v úloze 2.

5

Porovnejte velikosti gravitačních sil, kterými na vás působí
(a) váš spolužák o hmotnosti 70 kg ve vzdálenosti 1 m,
(b) Měsíc,
(c) Slunce,
(d) planeta Jupiter v okamžiku, kdy je nejblíže Zemi.

Všechny potřebné údaje si sami vyhledejte. Porovnejte výsledky (b), (c) a pak se pokuste odpovědět na otázku, proč na Zemi pozorujeme účinky slapové síly Měsíce, nikoliv Slunce.
[(a) $a_G = 4{,}7 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{ms^{-2}}$, (b) $a_G = 3{,}3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{ms^{-2}}$, (c) $a_G = 5{,}9 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{ms^{-3}}$, (d) $a_G = 3{,}4 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{ms^{-2}}$]

6

Představte si kosmickou loď letící po přímé dráze mezi Zemí a Měsícem. V určité vzdálenosti od Země se velikosti gravitačních sil od Země a Měsíce vyrovnají a výsledná síla působící na loď bude nulová. Najděte tuto vzdálenost.
[$3{,}4 \cdot 10^5$ km]

7

Vypočtěte velikost gravitačního zrychlení na povrchu
(a) Slunce (R=695 550 km, M=2.10^{30} kg),
(b) Marsu (R=3 940 km, M=6,4.10^{23} kg)
(c) neutronové hvězdy (R=12 km, M=2.10^{30} kg).

Vypočtěte také, kolik byste na povrchu těchto těles vážili.
[Slunce 28g, Mars 0,38g, 9,4·10^{10}g, výsledky jsou vyjádřeny pomocí tíhového zrychlení na Zemi $g = 9{,}8\,\mathrm{ms^{-2}}$]

8

Vypočtěte, v jaké výšce nad povrchem Země bude tíhové zrychlení
(a) g/2? [2 640 km]
(b) g/4? [6 378 km]
(c) g/10? [13 791 km]

9

Na základě astronomických pozorování bylo zjištěno, že Měsíc Deimos obíhá kolem Marsu po kružnici o poloměru 23 500 km rychlostí 1,35 kms^{-1}. Určete hmotnost Marsu. [$6{,}42 \cdot 10^{23}$ kg]

10

Ze znalostí parametrů oběhu pohybu Země ve Sluneční soustavě vypočítejte hmotnost Slunce. Víme, že střední vzdálenost Země od Slunce je přibližně 1AU = $150 \cdot 10^6$ km a oběh trvá 1 rok.

11

Kdyby se otáčení Země kolem své osy stále zrychlovalo, nastal by v při určité rychlosti na Zemi beztížný stav.
(a) Kde by se tak stalo nejdříve?
(b) Kolik hodin by pak trval jeden den?
(c) Jaké další důsledky by tak rychlá rotace měla?
[1h 24 min]

12

Vypočtěte v jaké výšce nad Zemí musí obíhat družice, jejíž oběžná doba má být 12 hodin.
(a) Použijte postup uvedný v odstavci 6.5.
(b) Použijte třetí Keplerův zákon.
[h=20 200 km]