

# ROZVOJ MATEMATICKÝCH POJMU A PŘEDSTAV U DĚTÍ PŘEDŠKOLNÍHO VĚKU

Růžena Blažková

## 1. Úvod

S čísly i geometrickými útvary se setkává každý člověk neustále v běžném životě i v profesi, ať už je jeho vztah k matematice jakýkoliv. Avšak pochopit správně, co to vlastně číslo je a jak se s ním pracuje je náročnější. K tomu, aby se u dětí správně vytvořily číselné a geometrické představy, je třeba aby měly od nejútlejšího věku dostatek podnětů k jejich vytváření a aby systém vytváření pojmů nebyl narušován nekompetentními zásahy. Určitá úroveň tzv. matematické gramotnosti patří určitě mezi klíčové kompetence každého člověka. Uvedme nejprve, co rozumíme matematickou gramotností. Nejde jen o schopnost počítat s čísly, ale pojem matematické gramotnosti má širší dimenzi.

Co rozumíme matematickou gramotností:

Schopnost chápat abstraktní matematické pojmy, neboť matematické pojmy jsou abstrakcí reality (např. nikdy nikdo neviděl číslo nebo přímku, ale jejich modely v mysli člověka existují).

Schopnost chápat vztahy mezi matematickými objekty.

Schopnost práce s matematickými objekty.

Schopnost matematizace reálné situace (vytvoření matematického modelu určité reálné situace).

Schopnost využívání získaných matematických poznatků v jiných, nových situacích.

Aplikace matematických poznatků v praktických úlohách.

Mezi základní atributy matematického myšlení patří zejména:

Klasifikace – třídění dle určitého kriteria

Zobecňování, abstrakce

Logičnost, přesnost usuzování, pružnost myšlení

Bystrost úsudku, rychlost osvojování si matematických vztahů

Přesnost vyjadřování

Aplikovatelnost

Formalizace, chápání symbolů

Paměť dlouhodobá, krátkodobá, pracovní

Prostorová představivost

Intuice, vhled

Způsobilst k analýze a syntéze

Způsobilst odhalit podstatné

Schopnost najít nejkratší cestu k řešení

Rámcový vzdělávací program pro předškolní vzdělávání uvádí v oblasti Dítě a jeho psychika očekávané kompetence a mezi nimi je také uvedeno, co dítě dokáže na konci předškolního období:

- chápat základní číselné a matematické pojmy, elementární matematické souvislosti a podle potřeby je prakticky využívat (porovnávat, řadit a třídít soubory předmětů podle určitého pravidla, orientovat se v elementárním počtu zhruba do šesti, chápat číselnou řadu v rozsahu první desítky, poznat více, stejně, méně, první, poslední apod.),

- chápat prostorové pojmy (vpravo, vlevo, dole, nahoře, uprostřed, za, pod, nad, u, vedle, mezi apod. v prostoru i v rovině,
- částečně se orientovat v čase,
- řešit kognitivní problémy, úlohy a situace, myslet kreativně a vymýšlet nápady,
- vyjadřovat svou fantazii v tvořivých činnostech.

Důležité je, že nejde o to systematicky vzdělávat děti v oborech, ale o integrované vzdělávání, jehož smyslem je podpora rozvoje a učení dětí. Pro úspěšnost dětí v matematice je tato cesta neoptimálnější. Matematické představy a jejich vytváření nejsou odděleny od ostatních činností dětí, které běžně provádějí, ale jsou s nimi úzce spojeny.

## 2. Vytváření matematických představ a pojmů

### 2.1. Pojem čísla

Při zkoumání, jakým způsobem se vytváří pojem čísla u dětí je dobré poučít se z historie, jakým způsobem se vytvářel pojem přirozeného čísla v historickém vývoji člověka a jakým způsobem je tento pojem budován v matematice jako vědecké disciplíně, neboť obojí je východiskem chápání vývoje číselných představ u dětí od nejranějšího věku.

Pojem přirozeného čísla se v historickém vývoji vytvářel složitě, mnoho roků a člověk musel učinit velký pokrok v rozvoji svých myšlenkových procesů, aby byl schopen chápat kvantitu, tj. aby abstrahoval od viditelných vlastností předmětů a byl schopen pochopit, kolik jich je. Člověk vnímal skupiny předmětů, které ho obklopovaly a nejprve přiřazováním poznával, zda je předmětů stejně nebo je některých více či méně (např. za každou ovci ve stádě položil kamének). Počet byl tedy nejprve vyjadřován přiřazováním, tj. vytvářením ekvivalentních množin stejných předmětů, např. prstů na ruku, kamének, dřívěk, zářezů apod. Další složitý vývoj přinesl schopnost zapsat tuto skutečnost a vyjádřit ji slovem a postupně se tak vyvíjely číslice, číslovky a číselné soustavy.

V matematice se pojem přirozeného čísla buduje buď pomocí čísel kardinálních nebo čísel ordinálních nebo pomocí Peanovy množiny. Při velmi stručném přiblížení můžeme uvést:

Pojem čísla kardinálního se opírá o pojem tříd navzájem ekvivalentních množin a přirozená čísla zaváděná pomocí čísel kardinálních dávají vesměs odpověď na otázku „kolik to je“. Pojem čísla ordinálního se opírá o uspořádané množiny a podobná zobrazení mezi uspořádanými množinami a přirozená čísla pomocí nich zaváděná dávají většinou odpověď na otázku „kolikátý“. Přirozená čísla budovaná pomocí Peanovy množiny vycházejí z prvního prvku a pomocí tohoto prvku a pojmu následovníka se vybuduje množina přirozených čísel. Teoretické základy budování pojmu přirozeného čísla je uveden v publikacích aritmetiky a algebry (3) a didaktické přístupy k zavádění přirozených čísel v publikacích (1), (2).

### 2.2. Postupné vytváření pojmu čísla

Všimějme si, jak dvouleté až tříleté dítě vnímá počet věcí kolem sebe. Nejprve ukazuje: tam jsou dvě, tam také jsou dvě, později tři. Když mu ukážeme hromádku prvků o větším počtu než tři, odmítá říct, kolik to je a zpravidla řekne: „to je moc“. Postupně však vnímá další čísla, až v šesti letech je schopno určit počet prvků ve skupinách, ve kterých je jich šest až deset. Při vnímání počtu předmětů musí dítě učinit obrovský pokrok ve svém myšlení, a to tak, že postupně přestává vnímat viditelné vlastnosti předmětů, jako je barva, tvar, materiál ze kterého jsou zhotoveny, zda jsou živé či neživé a všímá si pouze toho, kolik jich je. To znamená, že začne vnímat, že mezi určitými skupinami objektů existuje něco společného, co

nesouvisí s jejich viditelnými vlastnostmi, ale s tím, že mají prvky, které se dají vzájemně jednoznačně přiřadit, tj. že jich je stejně. Přitom se však nejde o žádnou cílenou výuku matematiky, ale všechny nové poznatky dítě získává prostřednictvím her a běžných činností souvisejících s jeho životem. Současně se rozvíjí jeho komunikace verbální (zdokonaluje se jeho řeč) i nonverbální (využívá např. své značky v mateřské škole, kreseb, symbolů). Postupně se zkvalitňuje jeho vnímání, paměť, představivost i pozornost, což je nezbytné pro jeho další matematický rozvoj. Děti jsou přirozeně tvořivé a jejich tvořivosti je třeba účelně využít a dávat jim takové podněty, které přispívají k rozvoji jejich myšlení.

Číslo, podobně jako jiné abstraktní pojmy, nemůžeme vnímat smysly, vnímáme pouze reprezentanty těchto čísel. Například reprezentantem čísla čtyři mohou být čtyři auta, čtyři děti, čtyři jablčka apod. Ale také např. bydlíme ve čtvrtém poschodí, náš dům má číslo 4, jsou čtyři hodiny, mám 4 roky apod. Děti se seznamují s kvantitativní stránkou jevů v kontaktu s okolním světem, pomocí konkrétních předmětů se postupně propracovávají k obecnějšímu chápání až k pochopení abstraktního pojmu čísla. Mnohokrát opakovaná činnost s konkrétními předměty vede k získávání zkušeností dětí, že nezáleží na tom, s jakými předměty pracují, ale pouze na tom, že je jich stejně. Musí se také naučit číslo pojmenovat a zapsat. K tomu, aby proces vytváření čísla byl pro děti snadný, využíváme mnoho činností, ve velké většině nematematických. Např. při skládání kostek domina, hraní hry Člověče, nezlob se apod. Přitom však se nemůže nic uspěchat, protože k pojmu čísla se každé dítě dopracuje samostatně vlastní činností, až mu tzv. „svítne“.

Co všechno může dítě vnímat na konkrétních předmětech? Dejme do neprůhledného sáčku např. 4 koláče a nechme děti povídat, co všechno o nich mohou říct. Sledujme, jaké mají představy – zrakové, chuťové, čichové, hmatové, čím jsou koláče naplněny, kam je mohou přemístit (např. na talíř). Kolik z dětí je však již ve „světě matematiky“ a zeptá se “kolik jich je” ?

V první fázi se děti naučí chápat čísla 1 až 5, později až 10 a nulu. Měly by umět vytvořit skupinu o daném počtu prvků, zapsat počet prvků dané skupiny, čísla porovnávat. Než se však dospěje k pojmu přirozeného čísla, je třeba dávat dětem mnoho podnětů, které souvisí s jejich hrami a činnostmi, které běžně každý den provádějí a které s matematikou zdánlivě nesouvisí. Pokud se tato fáze podcení, dochází u některých dětí problémům při vytvoření pojmu čísla.

Poznámka: S nulou je třeba zacházet jako s jakýmkoliv jiným číslem a není vhodné spojovat ji se slovem „nic“. Nulu je třeba chápat jako počet prvků prázdné množiny (počet jablíček na prázdném talíři) nebo jako číslo, které získáme odčítáním sobě rovných čísel (měl jsem 3 švestky, všechny jsem snědl). Pokud číslo 0 nerespektujeme jako číslo rovnocenné ostatním, děti je v budoucnu podceňují i ve významu čísla, i ve významu v zápisu čísla (např. 304 chápou jako 34).

### ***2.3. Propedeutická cvičení k vytvoření pojmu čísla vyplývající z běžných činností a her***

S dětmi provádíme elementární cvičení, která jsou propedeutikou k pozdějšímu chápání pojmu čísla. V první fázi se jedná se o běžné činnosti s hračkami, obrázky a dalšími předměty, využívají se pohádky, hry apod.

#### **Práce s předměty**

Názvy nebo jména předmětů – co to je, jak se to jmenuje.

Zkoumání jejich viditelných vlastností - jaké jsou, jsou živé, neživé, jaká je jejich barva, jaký je jejich tvar, z jakého jsou materiálu. Nejprve pracujeme s izolovanými předměty, později s dvojicemi, trojicemi předmětů a skupinami více předmětů.

**Identifikace** předmětů, osob, zvířat apod.

Děti mohou identifikovat předměty, osoby, zvířata pohledem, hmatem, chutí, čichem apod., tedy svými smysly.

**Charakteristika** předmětů

Jaké to je, k čemu to je, co dělá, kdo to je, kdo něco dělá apod.

**Diferenciace**

Hledání shod a rozdílů mezi předměty - je to stejné jako ..., je to jiné než ...,

Čím se liší – např. který předmět (obrázek) nepatří mezi ostatní,  
který předmět (obrázek) má jinou barvu než ostatní,  
který předmět (obrázek) má jiný tvar než ostatní,  
který předmět (obrázek) má jinou velikost než ostatní,  
který předmět (obrázek) má jinou polohu než ostatní apod.

**Vyhodnocení** situací

Je to tak?, je to správně?

**Komparace (srovnání)**

Předměty jsou stejné, podobné, nejsou stejné, jsou různé. V čem se liší, v čem jsou stejné (např. v pohádce Dlouhý, Široký a Bystrozraký – porovnáváme výšku, tloušťku apod.)

Nejprve porovnáváme objekty, které dítě vidí současně, později s tím, co je uchováno v paměti (jak to bylo před tím, je to tak, jak to bylo původně, jak to má být, co se změnilo)

Pro matematiku je to důležitá činnost – např. při psaní číslic porovnává dítě to, co napíše, s předlohou, se vzorem na začátku linky v sešitě.

Dále se porovnávají předměty v různých polohách – vedle sebe, pod sebou, jinak umístěné.

Porovnává se množství - vztahy více, méně, stejně – příprava na porovnávání čísel.

**Zpřesňování**

Kdo je to, co je to – jde o zpřesňování původní informace - např. hra na řemesla, které zvíře myslím, apod. Zde se uplatňuje orientace na sluch (ptáme se slovy) nebo na zrak (předvádíme pantomimu), nebo a hmat (hmatem se určuje předmět). Může se také určovat kvantita nebo vzájemné postavení objektů.

**Negace**

Využívání předpony “ne” – např. je to živé – neživé, létá to, nelétá to, je to modré, není to modré.

**Závislosti**

Opakování skupin prvků, rytmizace – vytváření dvojic, trojic prvků, které se pravidelně opakují (navlékání korálek různých barev, stavby hradeb z krychlí apod.).

**Gradace**

Určení polohy a pořadí prvků v realitě i na obrázku - je to blíž než, dál než, vlevo od, vpravo od, nad, pod, za.

## **2.4. Činnosti směřující k vytvoření pojmu přirozeného čísla**

Mezi činnostmi, které cíleně směřují k vytváření předpokladů pro správné pochopení přirozeného čísla patří klasifikace, přiřazování, uspořádání.

### **2.4.1. Třídění (klasifikace)**

V matematice souvisí třídění s rozkladem množiny. Při rozkladu množiny na podmnožiny musí být splněny požadavky:

1. Každý prvek základní množiny musí být zařazen do některé z podmnožin.
2. Žádný prvek nemůže být současně ve dvou podmnožinách.
3. Sjedením všech podmnožin je základní množina.

Třídění se provádí podle určité charakteristické vlastnosti, děti mají za úkol roztřídit dané předměty na ty, které požadovanou charakteristickou vlastnost mají a na ty, které ji nemají. Přitom charakteristická vlastnost musí být stanovena jednoznačně (např. nestačí určit malý – velký, když se třídí více předmětů různých velikostí). Vzniknou tak dvě, později více skupin a přitom každý prvek musí být zařazen v některé ze vzniklých skupin podle daného kritéria. Nejprve se provádí třídění dichotomické (na dvě skupiny), později trichotomické (na tři skupiny), atd.

Vymezení charakteristické vlastnosti se provádí na předmětech denní potřeby, např. vybírá se co se jí, co se obléká, sportovní náčiní, pracovní nářadí, čím jezdíme apod. Jídlo se pak dále vymezuje např. na ovoce, zeleninu, pečivo, mléčné výrobky apod., sportovní náčiní podle jednotlivých sportů atd.

Zařazování předmětů do skupin podle stejné vlastnosti, např.:

Panenky – chodící, nechodící.

Auta – osobní, nákladní.

Kostky ze stavebnice, (např. 2 velikosti, 3 barvy, 4 tvary).

Geometrické tvary (trojúhelníky, čtverce, kruhy).

Umísťování příborů do příborníku (lžíce, vidličky, nože, malé lžičky).

Ukládání nádobí do skříňky – hrníčky, talířky, talíře hluboké, mělké.

Atd.

Třídění předmětů provádějí děti prakticky při každém úklidu hraček.

#### **2.4.2. Přirázování**

Při přirázování předmětů poznávají děti skupiny objektů, které mají společné to, že každému prvku v jedné skupině je přiřazen právě jeden prvek druhé skupiny a naopak (prvky jsou vzájemně jednoznačně přiřazeny). Přitom si děti postupně uvědomují, že skupiny, jejichž prvky lze vzájemně jednoznačně přiřadit, mají stejné prvky a že nezáleží na tom, jakého druhu prvky jsou. Postupně zvyšujeme náročnost na abstrakci – od konkrétních předmětů k symbolům a k číslu. Přiřazujeme tedy:

a) předměty předmětům

Pro pochopení pojmu přirozeného čísla je vhodné využívat činností, kdy děti přiřazují předměty předmětům (zpočátku tak, aby v obou skupinách bylo předmětů stejně - vytvářejí dvojice). Umísťují např. panenky do kočárků, auta do garáží, přiřazují děvčata chlapcům, pomeranče dětem, hrníčky na podšálky, vajíčka do kalíšků, apod.

Velmi vhodnou činností je prostírání nádobí a příborů na stůl - u stolečku sedí Jirka, Petr, Tereška, Irenka, každému přiřadíme talířek, lžičku, skleničku.

Využíváme i pohádkových postav nebo postav z večerníčků - kdo ke komu patří:

Hurvínek - Spejbl, Maková panenka – motýl Emanuel, Rumcajs – Manka, Mach – Šebestová, Křemílek – Vochomůrka, Jeníček – Mařenka, Zlatovláska – Jiřík, Bob – Bobek, Ája – Fík, atd.

b) symboly předmětům

Vybereme několik dětí, jindy hraček (do pěti), přiřazujeme prsty, kamínky, tyčinky, obrázky apod.

c) symboly symbolům

Obrázkům přiřazujeme např. puntíky, tyčinky, tyčinkám puntíky apod.

d) předmětům a symbolům čísla

Skupinám předmětů nebo symbolů přiřadíme číslo – kolik jich je.

Každá správná učebnice matematiky pro první třídu obsahuje dostatek těchto činností a před tím, než uvede číslo, dostatečně dlouho procvičuje prostřednictvím obrázků přiřazování symbolů předmětům, např. na obrázku jsou zvířátka, děti kreslí tolik puntíků (čárek apod.), kolik je na obrázku zvířátek.

### 2.4.3. Uspořádání

Uspořádání děti vnímají zcela přirozeně na naprosto nematematických činnostech, při hrách, prostřednictvím pohádek, říkadel aj. Cílem činností je, aby si děti v budoucnu postupně uvědomily, že množina přirozených čísel je uspořádaná, že je možné o každých dvou prvcích rozhodnout, který je před kterým. (Toto je již učivem 1.stupně ZŠ.)

V období předčíselných představ uvádíme pohádky, ve kterých hraje roli posloupnost dějů či uspořádání osob. Jsou to například pohádka O kohoutkovi a slepičce, pohádka O veliké řepě, Zlatovláska, aj. Děti si velmi dobře pomatují posloupnost dějů v pohádkách. Přitom děti chápou uspořádání v obou směrech.

Současně se ujasňují pojmy “první prvek”, “poslední prvek” v dané skupině. Zde je třeba správného zdůvodnění, neboť se musí pracovat se všemi prvky dané skupiny a první nebo poslední prvek je třeba vymezit vzhledem k ostatním prvkům dané skupiny. Např. v pohádce O veliké řepě: Proč je dědeček první – protože všichni ostatní jsou za ním. Chybně by bylo – protože před ním nikdo není. Proč je myška poslední – protože všichni ostatní jsou před ní. Opět chybné zdůvodnění by bylo – protože a ní nikdo není.

Dalšími činnostmi mohou být např. uspořádání dětí v řadě podle velikosti, skládání pastelek podle velikosti, navlékání korálků podle určitého pravidla, kdy děti mají pravidlo dodržet, stavby z krychlí podle pravidla, apod.

## 3. Přirozená čísla

### 3.1. Význam čísla

Již v předškolním věku poznávají děti číslo v mnoha jeho významech, uvedme tedy některé:

- Označení množství (počtu prvků): 5 dětí, 3 medvídci, 10 jablek, 4 prsty, apod.
- Číslo jako operátor (pokyn ke změně): přidej mi tři bonbóny, uber mi dva knedlíky, apod., o kolik mám víc, kolikrát méně, aj.
- Číslo jako adresa (pořadí, uspořádání): bydlíme v domě číslo 24, ve třetím poschodí, narodil jsem se 14.5., apod.
- Číslo jako kód – např. kódy na zabezpečovacích zařízeních, PIN, telefonní číslo.
- Číslo jako veličina (míra) – 2 kg banánů, moje výška je 130 cm, aj.

Čísla v různých významech děti zcela přirozeně používají. V každém případě by se však měly seznámit nejprve s číslem ve významu množství a teprve potom ve významu pořadí a s číselnou řadou. Je třeba si také uvědomit, že s čísly v různých významech nelze zacházet stejně, např. sčítat a odčítat můžeme čísla ve významu množství – počtu prvků, ale není to možné ve významu čísla jako adresy.

Pojem čísla ve významu počtu prvků je třeba vytvářet mnoha různými činnostmi.

- Čísla 1 a 2 spojujeme s částmi těla (Dítě a jeho tělo): Kolik máš očí, rukou, nohou, nosů, brad, apod.

- b) Kolik nás je doma?
- c) Kolik mám kamarádů nebo kamarádek?

Při vytváření čísla 3 (a dalších v oboru do pěti) umístíme na stůl tři předměty (nejprve stejného druhu, později předměty různé) a dáváme dětem úkoly:

- a) Řekni, kolik předmětů (jablíček, kostek, kaštanů apod.) vidíš na stole.
- b) Kde ještě vidíš stejně věci jako na stole.
- c) Ukaž tolik prstů.
- d) Polož kartičku, na které je stejně puntíků jako jablíček na stole.
- e) Dopln, aby byly tři (když je na stole méně jablíček než 3)
- f) Na obrázcích jsou různé předměty v různém počtu (nejprve od 1 do 5). Vyber ty obrázky, na kterých jsou tři prvky.

Využíváme i pohybových her, např.

- a) na zemi nakreslíme kruhy, do každého zapíšeme některé z čísel 1 až 5 a děti se mají postavit do kruhů podle vyznačených čísel (je nutné, aby všechny děti byly zařazeny v některém z kruhů).
- b) umístíme dětem na záda kartičky s puntíky (od jedné do pěti) a děti se mají rozdělit do skupin tak, aby v každé skupině byly děti se stejným počtem puntíků na zádech.
- c) rozdáme dětem kartičky s tečkami od jedné do pěti a požadujeme, aby vytvořily vždy řady pěti dětí tak aby kartičky byly uspořádané od jedné do pěti.  
(Využití zejména v oblastech Dítě a společnost, Dítě a svět.)

Dalším důležitým poznatkem je, že změnou konfigurace se počet prvků nemění. Dětem dáme pět tyčinek a vyzveme je, aby z nich něco vytvořily. Děti tak vytvářejí různé sestavy, např. sestavují domeček, šipku a nejrůznější obrázky podle vlastní fantazie a tyčinek je stále pět. Podobně sestavují různé stavby z pěti stejných krychlí. Intuitivně přicházejí k závěru, že změnou tvaru obrázku nebo stavby se nezmění počet prvků.

Využíváme pohádky, ve kterých hraje roli počet osob nebo předmětů, např. Tři zlaté vlasy děda Vševěda, Tři oříšky pro Popelku, Sněhurka a sedm trpaslíků, Pohádka o dvanácti měsíčkách, aj. Téměř na každé číslo od 1 do 12 lze vybrat nějakou pohádku.

Čísla od jedné do pěti znázorněná pomocí nějakých prvků děti zpravidla poznají bez počítání – zejména když jsou ve vhodném seskupení, jako např. na kostce pro hru Člověče nezlob se.

### **3. 2. Počítání po jedné**

Uvědomme si, co vlastně děláme, když počítáme po jedné. Máme-li skupinu předmětů, u kterých na první pohled nepoznáme, kolik jich je, zpravidla ukazujeme na jednotlivé předměty prstem (nebo je označíme tužkou) a ke každému přiřadíme jedno slovo ze známé řady číslovek – jedna, dvě, tři, ... až patnáct (např.) a poslední vyslovená číslovka udává počet prvků ve skupině. Tímto vlastně skupinu předmětů uspořádáme a každému předmětu přiřadíme prvek z uspořádané skupiny číslovek.

Cílem je, aby děti uměly vyjmenovat řadu čísel od jedné do pěti, později do deseti, a to vzestupně i sestupně. Přitom však za každou vyslovenou číslovkou by měly vidět počet prvků a aby nepoužívaly pojmy bezobsačně, bez významu.

Při počítání po jedné je třeba respektovat, aby:

- nebyl vynechán žádný prvek,
- žádný prvek se nepočítal dvakrát,

- při změně konfigurace předmětů nedošlo k chybnému počítání, kdy názvy čísel jsou vázány těsně na určité předměty,
- konkrétní předměty nebyly počítány od nuly.

Pokud bychom učili děti pouze vyjmenovat řadu slov (číslovek) od jedné do deseti a děti vytvořenou neměly představu čísla tak, aby si za každým slovem uměly představit počet prvků, dojde většinou k tomu, že děti např. počítají: jedna, dvě, tři, čtyři, sedm, pět, čtyři ..., tj. říkají jakási slova bez obsahu.

(Číselná řada je jednou z očekávaných kompetencí dítěte v předškolním věku.)

Využíváme mnoha říkadel a básniček, kdy se postupně číselná řada opakuje:

Jedna, dvě, Honza jde, nese pytel mouky.

Jedna, dvě, tři, my jsme bratři.

Jedna, dvě, tři, čtyři, pět, cos to Janku, cos to sněd.

Jedna, dvě, Honza jde.

Jedna, dvě, tři, pes ho větří.

Jedna, dvě, tři, čtyři, kampak si to míří?

Jedna, dvě, tři, čtyři, pět, běží k mámě na oběd.

Pro čísla do deseti např. Oře, oře Jan, přiletělo k němu devět vran.

Vyžíváme i hádanek (čtyři rohy, čtyři nohy ...).

### 3.3. Číslo a číslice

K zápisu čísel používáme znaky – číslice neboli cifry. V poziční desítkové soustavě používáme deset znaků (jednička, dvojka, ..., devítka, nula) a pomocí těchto deseti znaků zapíšeme jakékoliv číslo. Ve vyjadřování bychom měli rozlišovat pojmy číslo a číslice již v předškolním věku, usnadníme tím dětem chápání těchto pojmů ve školním věku. Např.

pětka může být menší než jednička (ve smyslu číslice - znaku): 5 **1**, ale číslo 5 je vždy větší než číslo 1. Pojmy jako osmička, desítka, dvacítko ve významu čísla k vyjadřování mezi dětmi nepatří. Děti se postupně naučí psát všech deset číslic, to je však učivem 1. ročníku základní školy. Psaní číslic se řídí normou.

Ke snadnějšímu pochopení tvarů číslic můžeme využívat figurek nebo polštářků ve tvaru číslic. Některé děti mají problémy s rozlišováním některých číslic tvarově podobných (např. 6, 9), děti, které mají problémy s pravolevou orientací mají problém zapamatovat si, jak se píše např. 1, 3, 7. V současné době se děti velmi brzy učí znát i digitální zápis číslic.

V literatuře existuje mnoho publikací, které dětem číslice přibližují, např. J. Lada: Veselé obrázky, F. Halas: Počítadlo, V. Nezval: Říkadla.

Připomeňme, že v různých civilizacích se používaly různé znaky k zápisu čísel a číslice, které my používáme měly také svůj vývoj a svůj původ mají v Indii a arabských zemích.

### 3.4. Desítková soustava

V historickém vývoji používal člověk různé číselné soustavy (nepoziční, poziční, o základech 2, 5, 10, 20, 60), nyní umíme počítat v číselných soustavách o jakémkoliv přirozeném základu. Ze všech číselných soustav se jako nejvýhodnější udržela poziční soustava desítková. Deset jednotek nižšího řádu tvoří vždy jednu jednotku řádu o jednu vyššího (deset jednotek tvoří jednu desítku, deset desítek tvoří jednu stovku, atd.). V poziční



desítkové soustavě používáme k zápisu čísla deseti znaků (čísllice 0 až 9) a pomocí nich zapišeme jakékoliv číslo. Každá číslice v zápisu čísla má jednak hodnotu vlastní (počet jednotek příslušného řádu) a hodnotu místní (na které pozici se nachází). Např. v čísle 333 je vlastní hodnota každé číslice 3, místní hodnota záleží na umístění v zápisu čísla.

Intuitivní chápání poziční desítkové soustavy se začíná projevovat při práci s čísly od 10 do 20, kdy by děti měly postupně chápat, že např. v zápisu čísla 15 „1“ znamená 10 jednotek.

Pozůstatky šedesátkové soustavy používáme při měření času – 60 minut je jedna hodina, 60 sekund je jedna minuta. Toto je pro některé děti obtížné, avšak částečná orientace v čase je jednou z očekávaných kompetencí na konci předškolního období. U některých dětí postačí časová orientace ve smyslu dříve – později (včera, dnes, zítra, ráno, poledne, večer) a potom nenásilné seznamování s časovými údaji. Velmi vodné je využití časového snímku dne s příslušným časovým údajem.

#### 4. Porovnávání čísel

Porovnávání přirozených čísel se v matematice opírá o pojem zobrazení, nebo se k porovnávání využívá zápisu čísla (u víceciferných čísel) nebo se používá číselná osa. V období vytváření číselných představ je vhodné využít zobrazení, avšak než se začnou přirozená čísla porovnávat, je třeba dodržet určitý vývoj.

a) Nejprve je třeba, aby děti pochopily vztahy “více”, “méně”, “stejně”.

K tomu se používá mnoho her, konkrétních činností s předměty, kreslení obrázků a vždy se vysloví závěr, čeho je více, čeho je méně a čeho je stejně.

Jde např. o vytváření dvojic dětí (děvče – chlapec), dvojic panenka – kočárek, auto - garáž, aj. Na daných souborech konkrétních předmětů nebo na obrázcích děti rozhodují kterých prvků je více nebo méně (event. stejně).

b) Další činnosti spočívají v tom, aby děti přidaly nebo dokreslily prvky podle pokynů: Polož na stůl stejně lžiček jako je hrníčků, přines stejně jablíček, jako je dětí, nakresli více mrkví, než je králíků, nakresli méně vajíček než je slepic apod.

c) Teprve po těchto činnostech se přiřazují skupinám prvků čísla a porovnávají se přirozená čísla. Přitom je nutné dobře vysvětlit znaky používané pro porovnávání (<, >, =), protože, ač je to málo pochopitelné, mnoha dětem činí používání těchto znaků problémy.

d) Až se zvládne porovnávání přirozených čísel, učí se děti zjistit, o kolik má jedna skupina prvků více či méně než druhá.

Při porovnávání přirozených čísel můžeme narazit na určitá úskalí. Prvním z nich je, aby se správně rozlišovalo mezi porovnáváním velikostí předmětů a porovnáváním jejich počtu. Děti rozlišují tvar: např. velký míč a malý míč, ale počet: je jeden velký míč a jeden malý míč. Nelze mezi předměty umístit znaky <, >, =. Tyto znaky lze umístit pouze mezi čísla. (viz 2).

Dalším úskalím je, když se porovnává rozdíl mezi skupinami, které mají stejný počet prvků, např. 4 lžičky a 4 vidličky a skupinami, které se sobě rovnají (nepochopení rovnosti a ekvivalence množin). Dítě velmi dobře vnímá, že vidlička a lžička se nerovnají, ale že jich je stejně. Chybné obrázky, ve kterých se umístí rovnítko mezi dvě skupiny různých objektů, které mají stejně prvků jeho správné představy deformují. ( viz 2)

Správně

**XXXX 0000**

**4 = 4**

Chybně

**XXXX = 0000**

Poznámka: Znázorňování přirozených čísel na číselné ose, kdy číslu odpovídá bod na přímce, je pro děti velmi složité. Děti zpravidla chápou číslo zapsané u bodu na číselné ose, nikoliv však bod. Také znázorňování přirozených čísel úsečkou na číselné ose je nesprávné.

Některé propedeutické činnosti však můžeme realizovat – kdy dětem na části přímky znázorníme např:

Když mi byl 1 rok, začal/a jsem chodit.

Když mi byly 3 roky, začal/a jsem chodit do mateřské školy,

Až mi bude 6 roků, začnu chodit do 1. třídy.

## 5. Příprava na operace s přirozenými čísly

Jednoduché situace, kdy děti využívají operací s přirozenými čísly se vyskytují v jejich každodenním životě a děti je chápou zcela přirozeně. Je však nutné, aby situace vždy poskytla příležitost pro danou operaci, aby byla pro dítě dostatečně dynamická, aby operace měla smysl. Vyjádření zápisem pomocí čísel je učivem 1. stupně ZŠ.

### 5.1. Sčítání

Podněty pro sčítání přirozených čísel se naskytou v případě, kdy se prvky přidávají, dávají dohromady, eventuelně se něco zvětšuje apod. Vždy musí mít dítě důvod ke sčítání, vidět smysl operace, neboť v opačném případě může prvky spočítat po jedné a nemusí vůbec použít operaci sčítání. Vždy se vychází z konkrétní manipulace s předměty a v žádném případě nejde o výuku sčítání, ale o přípravu na pochopení této operace. V první fázi se nejprve používají předměty stejného druhu, např. 2 švestky a 3 švestky, aby součet měl stejné pojmenování jako oba sčítanci a teprve později se využívá předmětů různého druhu, např. 2 hrušky a 3 jablka, kdy součet má již název nadřazený (ovoce). Pokud se využívá obrázků nebo grafického znázornění pomocí symbolů, je třeba dbát na jeho správnost.

Správně:

**000 00**

Chybně:

**000 + 00 = 00000**

### 5.2. Odčítání

Odčítání přirozených čísel souvisí s ubíráním, zmenšováním, oddělováním, je to operace dynamická. Opět je třeba navodit situaci, aby dítě mělo potřebu odčítat. Postupuje se analogicky jako při vyvozování sčítání a je nutné situaci správně znázorňovat.

Správně:

**00 ~~000~~**

Chybně:

**00000 – 000 = 00**

### 5.3. Násobení

Násobení přirozených čísel se v současné škole vyvozuje na základě sčítání několika sobě rovných sčítanců a je učivem 1. stupně základní školy. Propedeutika násobení se však objevuje v běžných činnostech, např. při rozdávání předmětů několika dětem - dej každému dva pomeranče, čtyři kostky apod. Pro intuitivní vnímání násobení je vhodné umístění předmětů do řad a sloupců – např. broskve – dvě řady po čtyřech nebo do skupin, např. 4 trsy banánů po třech, bonbóny v krabičce – tři řady po pěti, aj. Vhodné je využít např. pečení vánočního cukroví, kdy se na plech umístí do řad a sloupců.

## 5.4. Propedeutika dělení

Při správném přístupu k dělení přirozených čísel je třeba vzít v úvahu, že rozdělovat můžeme na několik částí (6 kuliček rozděl mezi tři děti tak, aby měly stejně, kolik kuliček bude mít každé dítě?) nebo můžeme rozdělovat podle obsahu (6 kuliček rozděluj po třech, kolik dětí podělíš?). Činnosti přispívající k pozdějšímu chápání operace dělení mohou být např.:

- a) Rozdělujeme předměty (kaštiny, bonbóny, kostky aj.) mezi několik dětí tak, aby měly všechny děti stejně a rozdělili jsme, pokud to lze, všechny předměty. Dělení může být beze zbytku nebo se zbytkem.
- b) Rozdělujeme předměty po několika (oříšky do misek po třech, kaštiny dětem po pěti, apod.). Opět může být rozdělování beze zbytku nebo se zbytkem.

Poznámka:

Již v předškolním věku se děti setkají s pojmem zlomku jako části celku, např. polovina rohlíku, čtvrtka chleba, půl jablíčka, avšak pouze ve smyslu rozdělování konkrétních objektů. Rozdělujeme jablíčko na stejné části – na poloviny, čtvrtiny, papír rozdělíme na poloviny apod. Řešíme problém, kdy máme 3 jablka a chceme je spravedlivě rozdělit mezi 6 dětí. Děti, které již v předškolním věku hrají na hudební nástroj se seznamují s notami celými, půlovými, čtvrtovými. Všechny tyto činnosti napomáhají chápání pojmu zlomku jako části celku.

## 6. Geometrické představy

S geometrickými útvary se děti setkávají již od nejtělejšího věku na předmětech, které je obklopují. Učí se orientovat v prostoru, sledováním obrázků v knihách se učí vnímat vztah rovina – prostor. Postupně se vytváří geometrické představy. Jde zejména o tyto:

- a) Orientace v rovině a v prostoru – vztahy nahoře, dole, před, nad, pod, za, vedle, mezi, vlevo, vpravo, uprostřed.
- b) Poznávání tvarů – hranaté, kulaté, špičaté, trojúhelník, kruh, čtverec, obdélník.
- c) Poznávání těles – krychle, válec, koule, kvádr, hranol.
- d) Vytváření koláží podle vlastní fantazie.
- e) Stavby podle vlastní fantazie.
- f) Kreslení, vybarvování.
- g) Zhotovování přáníček, využívání symetrie.

Již v předškolním věku si hrají se stavebnicemi, míči apod. a nejprve se učí rozlišovat věci a předměty hranaté, kulaté a špičaté.

Např. pod pojem “kulaté” se vejde: míč – koule

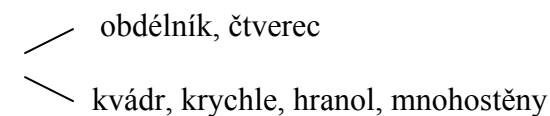
kostka ze stavebnice – válec

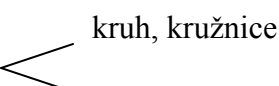
dopravní značka zákazová – kruh

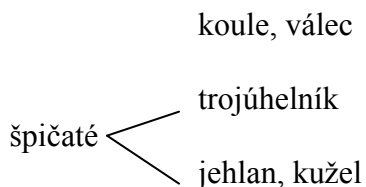
naušnice, obruč - kružnice

Postupně se děti učí diferencovat útvary rovinné a prostorové:

Hierarchie pojmů:

hranaté 

kulaté 



Hry s různými stavebnicemi přispívají k rozlišování geometrických útvarů i chápání různých prostorových vztahů. Stavby provádějí buď podle vlastní fantazie nebo podle předlohy. Využívá se přitom různých zákonitostí, opakování tvarů, symetrie aj.

Diferenciace rovinných útvarů předpokládá, že děti postupně rozliší jednotlivé tvary – trojúhelník, čtverec, obdélník, kruh. K vytvoření správných představ by měly útvary vidět vždy jako části roviny, tedy vystřižené např. z papíru nebo barevné fólie a teprve potom nakreslené na papíře nebo tabuli pomocí jejich hranice. Pochopení geometrických útvarů v rovině může napomoci skládání různých předmětů z papíru, kdy děti útvary vidí a při vhodném využití i správně vnímají a dokáží je pojmenovat (např. skládání čepice, lodičky aj.). Velmi vhodnou činností k určování geometrických útvarů je využití tvaru dopravních značek. Některým dětem činí problém rozlišit čtverec a obdélník, některé děti mají problémy s rozlišením kruhu a kružnice.

Při kreslení obrázků se děti učí vnímat různé čáry (přímé, křivé, lomené), učí se znázornit vztahy a vzájemné polohy objektů. Postupně vnímají proporce (např. poměr částí těla osob nebo zvířat) a perspektivu (jak se znázorní prostorová situace v rovině). Na obrázcích vnímají intuitivně shodnost úseček, rovnoběžnost a kolmost přímk, symetrie.

Postupně se připravují na chápání měření délek úseček, určení vzdálenosti pomocí odhadu. Vhodné je např. svislé umístění měřidla – metru - a měření výšky dětí.

## 7. Závěr

Matematická fakta se nedají snadno zapamatovat a děti je vnímají a učí se jim prostřednictvím činností a tvořivosti. Je třeba, aby dítě postupovalo podle svých schopností a vlastním tempem. Jestliže se učí samo, objeví nejvíce a to si zapamatuje. Málokdy si zapamatuje to, co mu dospělý řekl, tedy poznatek zprostředkovaný. Dospělý by mu měl být trpělivým pomocníkem v případě, že dítě pomoc potřebuje a neměl by řídit jeho činnost neúměrnými radami a nabídkami. Ne vždy vidí dítě to, co vidí dospělý, ale v mnoha případech může vidět i více.

Abychom zdůraznili, jak důležitý je správný přístup k postupnému vytváření číselných představ, uvedeme několik příběhů, které jsou vybrány ze života.

Příběh první.

Jedeme v autobuse, prší a na předním skle se pohybují tři stěrače. Malý Tomášek sedí mamince na klíně a znenadání zvolá: “Tři”. “Kde jsou tři”, ptá se maminka. Tomášek ukazuje na pohybující se stěrače. Maminka s nadšením: “Tomášku, tys to poznal, ty jsi šikovný, ty už to umíš.” Stále jej velmi chválila. Na můj dotaz, kolik je Tomáškoví roků, maminka říká: “ukaz paní, kolik ti je”. Tomášek ukazuje tři prstíčky. Potom mi maminka sdělila, co to dalo práce, než se naučil ukázat, že jsou mu tři roky.

*Maminka byla nadšena, že Tomášek pochopil, co znamená 3. Matematik ví, že Tomášek dospívá od představ vázaných na konkrétní předměty k představám univerzálnějším a postupně k abstrakci.*

Příběh druhý.

Holčičky si hrají s panenkami. Na můj dotaz, kolik mají panenek, postupně odpovídají: Maruška: hodně.

Eliška: máme Lucinku, Gábinku, Michalku a Karolínku.

Terezka: počítá: jedna, dvě, tři, čtyři. Jsou čtyři.

Monička: řekne hned: máme čtyři panenky.

*Každá z holčiček je na jiném stupni chápání kvantity – počtu prvků.*

Příběh třetí.

V pokoji si hrají čtyři děti. Pošlou nejmladší z nich – Elišku – do kuchyně pro buchty. Eliška bere z mísy nejprve po jedné a potichu si říká: Filipovi, Viktorovi, Aniče a mně. Pak bere ještě jednou po jedné a odnáší osm buchet, aniž by věděla, kolik jich je.

*Eliška neumí počítat, ale pomocí přiřazování dokáže odnést správný počet buchet.*

Příběh čtvrtý.

Jedeme v tramvaji číslo 11 a obě číslice jsou napsány poněkud jinak, než se učí děti psát číslici 1 v první třídě. Maminka jede s holčičkou (dva a půl roku), která má bratříčka v první třídě. Holčička asi doma přihlíží přípravě bratříčka do školy. Ukazuje na číslo v tramvaji a říká: “sedmička”. Maminka namítá: “to není sedmička, ale jednička”. Holčička neustále trvá na svém, maminka však také. Až maminka řekne: “to jsou dvě jedničky”. Jak holčička uslyší “dvě”, začne se velmi zlobit a podrážděně zvolá: “ne dvě, sedm”.

*U dítěte se ukazuje problém zápisu čísel, tvaru číslic a nakonec vztahu číslo – číslice.*

Příběh pátý.

Petr drží v ruce lístek, na kterém je číslo 200 a říká: “dvojka”. Maminka doplňuje: dvojka a dvě nuly, dvě stě. Tříletý Petr vnímá “2” a “dvě” nuly a nemůže pochopit, jak to může být 200.

*Petr ještě nedokáže rozlišit zápis čísla v desítkové soustavě a číslo jako počet prvků.*

Příběh šestý.

Tříletého Jirku učí dědeček počítat od jedné do deseti. Jirka počítá: jedna, dvě, tři, čtyři, pět, sedm, devět, čtyři, šest, deset.

*Jirka se učí jakousi “básničku” – řadu slov, ale nevidí za slovy číslo ve významu počtu prvků.*

Příběh sedmý.

Vzpomíná paní: Jako malá jsem nemohla pochopit pojem “dvě” a byla jsem z toho nešťastná. Ukázali mi jeden prst, řekli “jedna”, ukázali k němu jiný prst, řekli “dvě”. Nechácala jsem, proč dvě, když byl jeden prst a potom zase jeden prst, ale jiný. Bylo to pro mě stresující, mám z toho zážitek na celý život.

*To, co je pro dospělé zcela samozřejmé, může být pro dítě naprosto nepochopitelné. Jestliže se k tomu přidá nevhodná reakce dospělých (např. lehký posměch nebo pokárání), dítě má trauma na celý život.*

Příběh osmý.

Baví se maminka se svou tetou v přítomnosti Janičky, která byla právě u zápisu do první třídy. Tetička mezi jiným říká: “No na matematiku u nás v rodině nikdy nikdo nebyl. To je pro naši rodinu úplná hrůza.”

*Vztah k matematice vytváříme téměř za každých okolností, často si to ani neuvědomujeme a Janička již může být ovlivněna negativním postojem.*

Příběh devátý.

Ptá se pán, jak se dostane na určité místo ve městě. „Jeďte nejprve tramvají číslo dvě a potom přestupte na osmičku”. Jede tramvaj číslo 10. Pán říká: “tak to já můžu jet desítkou”.

*Můžeme čísla vždy (v každém jejich významu) sčítat?*

Příběh desátý.

Honzík slaví čtvrté narozeniny. Na otázku “kolik je ti roků” ukazuje čtyři prstíky, na dortu má čtyři svíčky, ale význam pojmu “čtyři roky” je mu zatím neznámý.

*Postupně se připravuje k chápání čísla 4 v jeho různých významech.*

Příběh jedenáctý.

Ptá se pan učitel Vašíka. „Vašíku, kdybys měl 5 bonbónů a já tě o dva poprosil, kolik bys měl potom bonbónů?“ Vašík odpoví: „No přece pět.“

*Vašík nemá potřebu prosbu splnit a už vůbec to pro něj není podnět k odčítání.*

## **Literatura**

1. BLAŽKOVÁ, R., MATOUŠKOVÁ, K., VAŇUROVÁ, M.: *Texty k didaktice matematiky pro studium učitelství 1. stupně ZŠ*. Brno: PdF MU 1997.
2. BLAŽKOVÁ, R., MATOUŠKOVÁ, K., VAŇUROVÁ, M., BLAŽEK, M.: *Poruchy učení v matematice a možnosti jejich nápravy*. Brno: Paido 2000.
3. DRÁBEK, J. a kol. *Základy elementární matematiky*. Praha: SPN 1989.
4. HEJNÝ, M., KUŘINA, F.: *Dítě, škola a matematika*. Praha:
5. HEJNÝ, M., STEHLÍKOVÁ, N.: *Číselné představy dětí*. Praha: PdF UK 1999.
6. KOLLÁRIKOVÁ, Z., PUPALA, R.: *Předškolní a primární pedagogika*. Praha: Portál
7. KUŘINA, F., KREJČOVÁ, E., KUPČÁKOVÁ, M., VOLFOVÁ, M.: *Protomatematika a matematická příprava pedagogů mateřských škol*. Hradec Králové: PdF Univerzity Hradec Králové, 2003.