DIDAKTIKA MATEMATIKY 4.r. VVP – ARITMETIKA
Růžena Blažková

Téma:

Poměr, úměra, přímá a nepřímá úměrnost. Trojčlenka.

1. Jak vnímají děti poměr velikostí - např. při kreslení postav, zvířat apod. – nejprve kreslí tzv. „hlavonožce“, teprve později vnímají proporce jednotlivých částí.

2. Mezipředmětové vztahy – kde se setkáme s poměrem – (např. fyzika, astronomie, chemie, zeměpis, biologie, hudební výchova aj.).
   Příklady užití poměru z běžného života – např. složení potravin, poměr různých měn, ředění laků, postřiků apod, také architektura, andropometrika aj.

   Kepler: Poměry vzdálenosti planet od Slunce odpovídají hudebním poměrům.
   Např. hudební poměry jsou: oktáva 2 : 1, kvinta 3 : 2, kvarta 4 : 3, poměr vzdáleností Venuše a Merkuru od Slunce je přibližně 2 : 1, Země a Venuše 3 : 2, atd.

3. Jak můžeme porovnávat čísla:
   a) pomocí rozdílu – $a – b$ – „o kolik více“
   b) pomocí podílu - $a : b$ - „kolikrát více“

Např. V jedné skupině je 24 žáků, ve druhé skupině je 8 žáků.
a) O kolik žáků je v první skupině více než ve druhé? 24 – 8 = 16
b) O kolik žáků je ve druhé skupině méně než v první?
c) Kolikrát více žáků je v první skupině než ve druhé? 24 : 8 = 3
d) Kolikrát méně žáků je ve druhé skupině než v první?
e) V jakém poměru jsou počty žáků v obou skupinách? 24 : 8 = 3 : 1

4. **Základní pojmy:**

Podíl $a : b$, kde $a>0, b>0,$ nazýváme **poměr** čísel a a b. Číslo a nazýváme první člen poměru, číslo b je jeho druhý člen.
Poměr můžeme krátit a rozšiřovat (oba členy poměru dělit nebo násobit nenulovým číslem). Pokud jsou oba členy poměru vyjádřeny nesoudělnými přirozenými čísly, říkáme, že poměr je **v základním tvaru.**
Převrácený poměr k poměru $a : b$ je poměr $b : a$ (poměry jsou navzájem převrácené).

Užití: zmenšení – zvětšení čísla v daném poměru
změna v daném poměru
dělení v daném poměru
poměr „zlatého řezu“
měřítko plánu a mapy

Postupný poměr $a : b : c$ (nahrazuje poměry $a : b,\ b : c$)

Např. Chromová ocel na výrobu příborů: Fe : Cr : Ni = 37 : 9 : 4
Bronz je slitina cínu, olova a mědi – v poměru 1 : 1 : 8

Úměra je zápis dvou sobě rovných poměrů. $a : b = c : d$

Členy *a, d* se nazývají vnější členy, členy *b, c* se nazývají vnitřní členy úměry.
Platí: součin vnějších členů úměry je roven součinu vnitřních členů úměry: $a \cdot d = b \cdot c$
(Počátek nauky o úměrách byl položen v Babylóně, babylónské poznatky převzali a dále rozvedli Řekové. Pythagorejská matematická škola rozeznávala úměry aritmetické (vztahy tvaru $a - b = c - d$), úměry geometrické ($a : b = c : d$) a úměry harmonické ($a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b$). Nauku o úměrách podává Euklides v páté knize „Základů". Ve středověku tvořila nauka o úměrách jednu z nejdůležitějších kapitol matematiky. Symboliku $a : b = c : d$ zavedl v r. 1693 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716)).

Přímá úměrnost

Přímou úměrnost začínají žáci vnímat v souvislosti s výukou násobení, např. Jeden jogurt stojí 8 Kč, kolik Kč zaplatíme za 2, 3, 4, 5, 6 jogurtů?

Počet jogurtů	1	2	3	4	5	6
Cena v Kč	8	16	24	32	40	48

Sledují, jak se mění čísla ve druhém řádku tabulky:
a) kolikrát se zvětší číslo v prvním řádku, tolikrát se zvětší číslo ve druhém řádku tabulky (příprava na pochopení přímé úměrnosti)
b) číslo ve druhém řádku dostaneme tak, že číslo v prvním řádku násobíme stále stejným číslem (příprava na pochopení vztahu $y = k \cdot x$).

V 7. ročníku se přímá úměrnost zavádí jako závislost mezi hodnotami proměnných *x* a *y* , označíme-li v uvedeném příkladu počet jogurtů *x* a cenu *y*. Pak platí: kolikrát se zvětší (zmenší) hodnota *x*, tolikrát se zvětší (zmenší) hodnota *y*. Nepoužíváme vyjádření „čím – tím". Je-li závislost mezi hodnotami proměnných *x* a *y* je vyjádřena poměrem, můžeme říci, že v jakém poměru se změní hodnota proměnné *x*, v takovém poměru se změní hodnota proměnné *y*.
Pracuje se zde pouze s hodnotami proměnné $x > 0$.
Uvede se rovnice přímé úměrnosti $y = k \cdot x$ pro $x > 0$, $k > 0$, uvede se význam konstanty přímé úměrnosti a znázornění přímé úměrnosti graficky v soustavě souřadnic.
Je třeba uvést pojmy: soustava souřadnic
počátek soustavy souřadnic
souřadnice bodu (x-ová souřadnice, y-ová souřadnice).

Grafem přímé úměrnosti je obecně přímka procházející počátkem soustavy souřadnic (pokud je definičním oborem množina reálných čísel). Avšak vzhledem k definičnímu oboru pracujeme v 7. ročníku pouze s podmnožinami přímky, tj. buď s polopřímkou nebo s úsečkou, pokud je však definičním oborem množina přirozených čísel, pak grafem závislosti je množina izolovaných bodů ležících na přímce (event. na polopřímce).
Přímá úměrnost jako zvláštní případ lineární funkce se probírá v 9. ročníku v tématu Funkce.

Nepřímá úměrnost

Motivačními příklady mohou být např.

- Sledování závislosti šířky obdélníku na jeho délce při konstantním obsahu obdélníku.
- Sledování délky doby potřebné k projetí určité dráhy v závislosti na rychlosti.
- Doba potřebná k vykonání určité práce v závislosti na výkonu.

Př. Obsah obdélníku je 24 cm^2. Sledujte, jak se mění jeho šířka v závislosti na změně jeho délky.

Délka (cm)	1	2	3	4	6	8	12	24
Šířka (cm)	24	12	8	6	4	3	2	1

Sledují:
- Kolikrát se zvětší (zmenší) hodnota proměnné *x*, tolikrát se zmenší (zvětší) hodnota proměnné *y*.
- Součin čísel v prvním a ve druhém řádku je stále stejný.
- Hodnoty *x* a *y* se mění v převrácených poměrech.

Tato závislost mezi hodnotami proměnných *x a y* se nazývá nepřímá úměrnost.

Lze ji zapsat rovnicí $y = \frac{k}{x}$, kde $x>0$, $k>0$.

Grafem nepřímé úměrnosti je rovnoosá hyperbola. Vzhledem k definičnímu oboru se v 7. ročníku rýsuje pouze v 1. kvadrantu souřadné soustavy. Podobně jako u přímé úměrnosti, pokud je definičním oborem množina přirozených čísel, je grafem množina izolovaných bodů, které leží na hyperbole.
Nepřímá úměrnost jako funkce se probírá v 9. ročníku.

Trojčlenka

Trojčlenkou nazýváme úlohu, která obsahuje dvojice na sobě závislých veličin (přímo nebo nepřímo), z nichž tři údaje jsou známé a čtvrtý je třeba vypočítat.
Veličiny se zapíší do určitého schématu, šipkami se vyjádří příslušné závislosti (souhlasně orientovanými šipkami přímá úměrnost, nesouhlasně orientovanými šipkami nepřímá úměrnost). Z praktických důvodů pro snadnější výpočet je vhodné začínat psát šipky vždy u proměnné x. Trojčlenku můžeme řešit různými způsoby, nejčastější je pomocí úměry nebo „přes jednotku“.

Např.

15 m látky …………… 450 Kč
40 m látky ………….. x Kč

15 dělníků ……………… 20 hodin
10 dělníků …………….. x hodin

Protože v běžném životě se vyskytuje mnoho úloh, ve kterých se vyskytuje přímá nebo nepřímá úměrnost a tyto úlohy se dají řešit pomocí trojčlenky, bylo toto téma jedním z hlavních témat středověké matematiky, zejména tzv. kupeckých počtů. Pro obecné počítání obchodníků, řemeslníků a ostatních lidí s veličinami přímo či nepřímo úměrnými vznikaly různé mechanické předpisy (regule), pomocí nichž byly úlohy řešeny. Základem většiny těchto předpisů se stala trojčlenka – regula de tri. Autory prvních předpisů byli Indové. Jejich vědomosti poznal Leonardo Pisánský a ten napsal počátkem 13. století spis „Kniha o abaku“, ve kterém věnuje významné místo úlohám řešeným pomocí úměry a trojčlenky.

Složená trojčlenka

5 dělníků ……………. 5 dní ………………… 20 000 Kč
<u>8 dělníků ……………. 8 dní ………………………..x Kč</u>

Složená trojčlenka se řešila postupem, který Leonardo Pisánský nazýval jako „regula kata“ – počet řetězový.

5. Příklady

Proveďte metodický a didaktický rozbor každé úlohy. Posuďte problémové části úlohy z hlediska žáka a uveďte návodné úlohy, které usnadní řešení úlohy zadané.

1. Zvětšete číslo 144 v poměru 5 : 4, zmenšete číslo 105 v poměru 2 : 5.

2. Petr přemýšlí: Když jsem se narodil, bylo mamince 24 roků a tatínkovi 28 roků. Když mi byl 1 rok, byl poměr věků 25 : 1 a 29 : 1. Jak se měnil poměr věků v dalších letech ?

3. V jakém poměru je třeba zmenšit úsečku délky 1,25 m, abychom dostali úsečku délky 1 m?

4. Je dána úsečka délky 2,8 m. Rozdělte ji na tři části tak, aby jednotlivé části byly v poměru 3 : 4 : 7. Jakou délku v centimetrech budou mít jednotlivé části úsečky?

5. Zapište dvě trojciferná čísla, která jsou v poměru 3 : 5 a určete jejich rozdíl.

6. Zapište dvě různá dvojciferná čísla, jejich poměry desítek a jednotek se sobě rovnají. Najděte tyto poměry tak, aby čísla byla dělitelná třemi (najděte všechna možná řešení úlohy).

7. Rozdělte 12 000 Kč mezi dvě osoby v poměru 3 : 5.

8. Rozdělte 96 000 Kč mezi osoby A, B, C tak, aby poměr A : B byl 2 : 3 a poměr B : C byl 5 : 7.

9. Vnitřní úhly v trojúhelníku jsou v poměru 1 : 2 : 3. V jakém poměru jsou vnější úhly tohoto trojúhelníku?

10. Zjistěte, zda mohou být strany trojúhelníku v poměru 1 : 2 : 3.

11. V jakém poměru jsou obsahy dvou čtverců, jejichž obvody jsou v poměru 1 : 2 ?

12. Zjistěte, v jakém měřítku jsou znázorněny mapy v atlase: mapy polokoulí, mapy světadílů, mapy států.

13. Zjistěte, v jakém měřítku se rýsují strojní výkresy a stavební výkresy.

14. Určitou práci mělo vykonat 21 pracovníků při osmihodinové pracovní době za 12 dní. Po pěti dnech práce jim přišli na pomoc brigádníci. Všichni pak pracovali 7 hodin denně a dokončili práci za dalších 6 dní. Kolik bylo brigádníků?
15. Tři kamarádi šli na výlet a zajistili si jídlo. První přinesl 3 konzervy, druhý 5 konzerv a třetí 80 Kč. Všichni jedli stejně a snědli všechny konzervy. Jak se rozdělí první dva o 80 Kč, které přinesl třetí jako náhradu za jídlo? (pozor, není to v poměru 5 : 3)

16. Mezi tři osoby má být rozděleno 100 000 Kč tak, aby osoba A dostala dvakrát tolik jako B a osoba B třikrát tolik jako C. Kolik Kč dostane každý?

17. Jablečným moštem se plnily pet lahve o objemu 1,5 litru. Kolik lahví se naplnilo 120 litry moštu? Dalších 120 litrů se dávalo do sklenic o objemu 0,75 litru. Kolik sklenic se naplnilo?

18. Šest pracovníků má splnit určitou práci za 18 pracovních dnů. Pracovali 4 dny a potom dva pracovníci onemocněli a zbývající 4 práci dokončili. Za kolik dnů byla práce splněna, jestliže pracovali stále stejným výkonem?

19. Cena zájezdu pro jednoho účastníka je 6 500 Kč, jestliže je autobus obsazen 40 osobami. O kolik Kč se zvýšila cena zájezdu, jestliže se zúčastnilo pouze 35 osob a náklady nebylo možné snížit?

20. Vzdálenost Brno – Plzeň je 296 km. Vypočítejte, za jak dlouho urazí tuto dráhu automobil, jestliže jede průměrnou rychlostí 90 $\frac{km}{h}$. O kolik se prodlouží doba, jestliže se průměrná rychlost zmenší o 15 $\frac{km}{h}$?

21. Poměr ceny pozinkovaného plechu k ceně měděného plechu je 2 : 7. Střechu pokrytou pozinkovaným plechem je třeba jedenkrát za dva roky natírat barvou, jejíž cena je k ceně pozinkovaného plechu 1 : 5. Měděnou střechu není třeba natírat. Za jak dlouho by se vrátila investice do střechy z měděného plechu?

22. Formulujte a vypočítejte tři úlohy, ve kterých využijete měřítko mapy nebo plánu (z daného měřítka a skutečné velikosti vypočítejte velikost na mapě, ve druhé úloze skutečnou velikost, ve třetí úloze měřítko ze známé skutečné velikosti a velikosti na mapě.

23. Vypočítejte poměr „zlatého řezu“ – řešte úlohu: Rozdělte danou úsečku na dvě části tak, aby poměr delší části úsečky ke kratší části byl roven poměru celé úsečky k její delší části.

Literatura

BALADA, F.: *Z dějin elementární matematiky.* Praha: SPN, 1959.
KRUPKA, P.: *Sbírka úloh z matematiky pro druhý stupeň základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií.* Praha: Global, 1995, Prometheus, 2002.
Učebnice matematiky pro 7. ročník ZŠ.
Slovník školské matematiky