Induktivní a deduktivní metody v matematice
Růžena Blažková

Indukce – jeden z typů úsudků a metoda zkoumání, kdy se na základě pozorování jednotlivých případů vyvozují všeobecné závěry. Jedná se o postup od zvláštního k obecnému. Úplná indukce: úsudek, v němž obecný závěr plyne z premis shrnujících všechny jednotlivé případy, závěr je jistý. Neúplná indukce: úsudek, v němž se vyvozuje obecný závěr z premis shrnujících některé jednotlivé případy, závěr je pouze pravděpodobný, je potvrzován premisami jen do určité míry.

Dedukce – logické vyvození, způsob logického myšlení postupujícího od obecného pravidla k jednotlivému. Úsudek, ve kterém nová myšlenka logicky vyplývá z jistých tezí vystupujících v roli obecného pravidla platného pro všechny jevy dané třídy. Jedná se o typ úsudku, při němž se z premis použitím určitých pravidel dospívá k novému tvrzení, tzv. závěru, důsledku. Je přechodem od obecného ke zvláštnímu.
Deduktivní metoda – způsob výstavby vědecké teorie založený pouze na dedukci. Uplatňuje se zpravidla v těch případech, kdy byl nahromaděn a teoreticky vyložen empirický materiál, který chceme uvést v systém, abychom mohli odvodit všechny důsledky plynoucí z přijatých předpokladů. Takto vybudovaná vědecká teorie je vědecká deduktivní soustava. Různé pokusy vést ostrou hranici mezi deduktivní metodou a induktivní se nezdařily, neboť obě metody jsou ve skutečnosti vnitřně spjaty.

Uplatňování indukce a dedukce souvisí s pozorováním, zkoumáním zákonitostí, zobecňováním.

V následujících příkladech vycházejte vždy z induktivních postupů, tj. ověřujte platnost uvedených vět pro několik přirozených čísel, všímejte si zákonitostí a snažte se formulovat příslušné věty. Věty pak dokažte.

Př. 1. Sčítání přirozených čísel – sčítejte postupně přirozená čísla a sledujte, jak se dá vyjádřit jejich součet:

$1 + 2 = 3 \qquad 3 = \frac{2.3}{2}$

$1 + 2 + 3 = 6 \qquad 6 = \frac{3.4}{2}$

$1 + 2 + 3 + 4 = 10 \qquad 10 = \frac{4.5}{2}$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \qquad 15 = \frac{5.6}{2}$

atd.
Úvaha – čemu je roven součet n přirozených čísel.
Formulujeme větu :
Pro součet n přirozených čísel platí:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dokážeme snadno matematickou indukcí.

Př. 2. Sleduje součet několika lichých přirozených čísel:
$1 + 3 = 4 \qquad 2 . 2 = 4$

$1 + 3 + 5 = 9$ $\quad 3 . 3 = 9$
$1 + 3 + 5 + 7 = 16$ $\quad 4 . 4 = 16$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ $\quad 5 .5 = 25$
atd.

Formulujeme větu, kterou dokážeme matematickou indukcí:
Pro součet n lichých přirozených čísel platí:
$1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = n^2$

Př. 3. Sledujte součet sudých přirozených čísel a všimněte si, jak se dá vyjádřit:
$2 + 4 = 6$ $\quad 6 = 2 . 3$
$2 + 4 + 6 = 12$ $\quad 12 = 3 . 4$
$2 + 4 + 6 + 8 = 20$ $\quad 20 = 4 . 5$
$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$ $\quad 30 = 5 . 6$

Formulujeme větu:
Pro součet *n* sudých přirozených čísel platí:
$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$

Př. 4. Součet všech přirozených čísel od 1 do 100
$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5\,050$

Př. 5. Součet všech lichých čísel od do 100
$1 + 3 + 5 + \dots + 99 = 2\,500$

Př. 6. Součet všech sudých přirozených čísel od 1 do 100
$2 + 4 + 6 + \dots + 100 = 2\,550$

Př. 7. Součin dvou sobě rovných činitelů – sledujeme číslo zapsané na místě jednotek
$0 . 0 = 0$ $\quad 1 . 1 = 1$ $\quad 2 . 2 = 4$ $\quad 3 . 3 = 9$ $\quad 4 . 4 = 16$ $\quad 5 . 5 = 25$
$6 . 6 = 36$ $\quad 7 . 7 = 49$ $\quad 8 . 8 = 64$ $\quad 9 . 9 = 81$ $\quad 10 . 10 = 100$
kdybychom v násobení sobě rovných činitelů pokračovali dále, zjistíme, že na místě jednotek jsou zapsána čísla:
0 1 4 9 6 5 6 9 4 1 0

Př. 8. Dokažte, že druhá mocnina přirozeného čísla nemá na místě jednotek zapsáno číslo 2 nebo 3.

Př. 9. Pozorujte součin čtyř po sobě jdoucích přirozených čísel a sledujte, jak se dá vyjádřit:

$1 . 2 . 3 . 4 = 24$ $\quad 6^2 - 2 . 6 = 24$ $\quad 5^2 - 1 = 24$
$2 . 3 . 4 . 5 = 120$ $\quad 12^2 - 2 . 12 = 120$ $\quad 11^2 - 1 = 120$
$3 . 4 . 5 . 6 = 360$ $\quad 20^2 - 2 . 20 = 360$ $\quad 19^2 - 1 = 360$
atd.

Př. 10. Vynásobte vždy dvě po sobě jdoucí přirozená čísla a tento součin vynásobte čtyřmi. Všimněte si, jak se dá tento součin vyjádřit:
$4 . 2 . 3 = 24$ $\quad 5^2 - 1 = 24$
$4 . 3 . 4 = 48$ $\quad 7^2 - 1 = 48$

$4 . 4 . 5 = 80$ $9^2 - 1 = 80$
$4 . 5 . 6 = 120$ $11^2 - 1 = 120$
atd.

Formulujeme větu:
Pro každé přirozené číslo n platí: $4n (n + 1) = (2n + 1)^2 - 1$

Př. 11. Vyjádřete obecně, kolik úhlopříček má konvexní n-úhelník.
Např: Čtverec …2, pětiúhelník 5, šestiúhelník 15, sedmiúhelník 21, atd.
Dokažte, že počet úhlopříček konvexního n-úhelníku je $\frac{n(n-1)}{2}$.

Př. 12. Vyjádřete obecně, jaký je součet vnitřních úhlů konvexního n- úhelníku:
Např. Trojúhelník 180°, čtyřúhelník 360°, pětiúhelník 540, šestiúhelník 720°, atd.

Vyslovte větu, která vyjadřuje součet vnitřních úhlů konvexního n-úhelníku a dokažte ji.

Př. 13. Vyberte si libovolné prvočíslo, a sledujte následující výrazy:
$5 . 5 - 1 = 24$ $24 = 1 . 24$
$7 . 7 - 1 = 48$ $48 = 2 . 24$
$11 . 11 - 1 = 120$ $120 = 5 . 24$
atd.
Formulujeme větu:
Nechť p je prvočíslo větší než 3. Pak $p^2 - 1$ je vždy dělitelné číslem 24.

Př. 14. Pozorujte následující výrazy:
$2 . 5 . 5 + 1 = 51$ $51 = 3 . 17$
$2 . 7 . 7 + 1 = 99$ $99 = 3 . 33$
$2 . 11 . 11 + 1 = 243$ $243 = 3 . 81$
atd.
Formulujeme větu:
Nechť p je prvočíslo větší než 3. Pak $2 p^2 + 1$ je vždy dělitelné třemi.

Př. 15. Všimněte si následujících výrazů:
$3 . 3 . 3 + 5 = 32$ $32 = 4 . 8$
$3 . 5 . 5 + 5 = 80$ $80 = 4 . 20$
$3 . 7 . 7 + 5 = 152$ $152 = 4 . 18$
atd.
Formulujeme větu:
Nechť p je prvočíslo větší nebo rovno číslu 3. Pak $3p^2 +5$ je vždy dělitelné čtyřmi.