6 FUNKCE

6.1 Základní vlastnosti funkcí

Definice funkce

Funkcí na množině A se nazývá předpis, kterým je každému prvku z množiny A přiřazeno právě jedno reálné číslo.

Definice pomocí zobrazení

Funkcí se nazývá každé zobrazení f množiny M do množiny R. Množinu M nazýváme definiční obor funkce f a značíme ji $\mathsf{D}(f)$.

Zobrazení množiny A do množiny B

Zobrazení množiny A do množiny B je předpis, kterým je každému prvku $x \in \mathsf{A}$ přiřazen právě jeden prvek $b \in \mathsf{B}$.

Graf funkce

Množina všech bodů $X[x, f(x)]$ ve zvolené soustavě souřadnic Oxy v rovině, kde $x \in \mathsf{D}(f)$.

Obor hodnot

Množina všech $y \in \mathsf{R}$, ke kterým existuje aspoň jedno $x \in \mathsf{D}(f)$ tak, že $y = f(x)$, se nazývá obor hodnot funkce f. Označujeme jej $\mathsf{H}(f)$.

Hodnota funkce

Je-li číslu $c \in \mathsf{D}(f)$ přiřazeno číslo d, zapisujeme tento fakt $f(c) = d$. Číslo $f(c)$ se nazývá hodnota funkce f v bodě c (také hodnota funkce f přiřazená c).

Sudá funkce

Funkce f je sudá funkce, právě když zároveň platí:
1. Pro každé $x \in \mathsf{D}(f)$ je také $-x \in \mathsf{D}(f)$.
2. Pro každé $x \in \mathsf{D}(f)$ je $f(-x) = f(x)$.

– **graf:** Graf sudé funkce je souměrný podle osy y.

Lichá funkce

Funkce f je lichá funkce, právě když zároveň platí:
1. Pro každé $x \in \mathsf{D}(f)$ je také $-x \in \mathsf{D}(f)$.
2. Pro každé $x \in \mathsf{D}(f)$ je $f(-x) = -f(x)$.

– **graf:** Graf liché funkce je souměrný podle počátku kartezské soustavy souřadnic.

Rostoucí funkce

Funkce f je rostoucí v množině M, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in \mathsf{M}$ platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.

Klesající funkce

Funkce f je klesající v množině M, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in \mathsf{M}$ platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$.

Neklesající funkce

Funkce f je neklesající v množině M, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in \mathsf{M}$ platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \leqq f(x_2)$.

Nerostoucí funkce

Funkce f je nerostoucí v množině M, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in \mathsf{M}$ platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \geqq f(x_2)$.

Monotónní funkce

Funkce rostoucí, neklesající, klesající, nerostoucí se nazývají souhrnně monotónní funkce.

Ryze monotónní funkce

Funkce rostoucí a klesající se nazývají souhrnně ryze monotónní funkce.

Prostá funkce

Funkce f je prostá, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in \mathsf{D}(f)$ platí: Je-li $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Inverzní funkce

Je-li f funkce prostá, pak k ní existuje právě jedna funkce f^{-1}, která je dána takto:

1. Její definiční obor je $\mathsf{H}(f)$, tj. $\mathsf{D}(f^{-1}) = \mathsf{H}(f)$.
2. Každému $y \in \mathsf{D}(f^{-1})$ je přiřazeno právě to $x \in \mathsf{D}(f)$, pro které je $f(x) = y$.

Funkce f^{-1} se nazývá funkce inverzní k funkci f.

Vztah grafů funkce f a f^{-1}

Grafy funkce f a funkce f^{-1} k ní inverzní jsou souměrně sdruženy podle osy prvního a třetího kvadrantu, tj. podle přímky určené rovnicí $y = x$.

Zdola omezená funkce

Funkce f je zdola omezená v množině M, právě když existuje číslo d takové, že pro všechna $x \in \mathsf{M}$ je $f(x) \geqq d$.

Shora omezená funkce

Funkce f je shora omezená v množině M, právě když existuje číslo h takové, že pro všechna $x \in \mathsf{M}$ je $f(x) \leqq h$.

Omezená funkce

Funkce f je omezená v množině M, právě když je zdola omezená v M a zároveň shora omezená v M.

Maximum

Funkce f má v bodě a maximum na množině M, $a \in \mathsf{M}$, právě když pro všechna $x \in \mathsf{M}$ je $f(x) \leqq f(a)$.

Minimum

Funkce f má v bodě b minimum na množině M, $b \in \mathsf{M}$, právě když pro všechna $x \in \mathsf{M}$ je $f(x) \geqq f(b)$.

Ostré maximum

Funkce f má v bodě a ostré maximum na množině M, $a \in \mathsf{M}$, právě když pro všechna $x \in \mathsf{M}$, $x \neq a$, je $f(x) < f(a)$.

Ostré minimum

Funkce f má v bodě b ostré minimum na množině M, $b \in \mathsf{M}$, právě když pro všechna $x \in \mathsf{M}$, $x \neq b$, je $f(x) > f(b)$.

Periodická funkce

Funkce f je periodická funkce, právě když existuje takové číslo $p > 0$, že pro každé $k \in \mathsf{Z}$ zároveň platí:

1. Je-li $x \in \mathsf{D}(f)$, pak $x + kp \in \mathsf{D}(f)$.
2. $f(x + kp) = f(x)$.

Číslo p se nazývá perioda funkce.

6.2 Lineární funkce

Definice

Lineární funkcí se nazývá každá funkce $y = ax + b$, kde a, b jsou reálná čísla.

Graf

Grafem lineární funkce je přímka.

Speciální případy lineární funkce

– **konstantní funkce** je speciální případ lineární funkce pro $a = 0$, $b \in \mathsf{R}$, tj. funkce $y = b$. Graf konstantní funkce je přímka rovnoběžná s osou x.

– **přímá úměrnost** je speciální případ lineární funkce pro $a \in \mathsf{R} - \{0\}$, $b = 0$, tj. funkce $y = ax$. Graf přímé úměrnosti je přímka procházející počátkem.

Koeficient a

Je-li f lineární funkce $y = ax + b$, pak pro každá dvě navzájem různá čísla x_1, x_2 platí $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

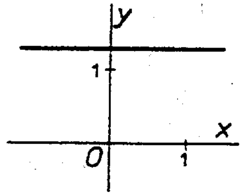
Koeficient b

Je-li f lineární funkce $y = ax + b$, pak číslo b je hodnota funkce f v bodě 0.

Vlastnosti lineární funkce $y = ax + b$, kde $a, b \in \mathsf{R}$

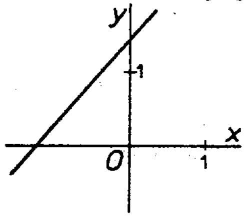
Definiční obor je R.

$a = 0$



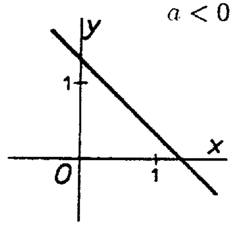
$a = 0$
Obor hodnot je $\{b\}$.
Není prostá, a tedy není ani rostoucí, ani klesající.
Je omezená.
V každém $x \in \mathsf{R}$ má maximum a minimum.

$a > 0$



$a > 0$
Obor hodnot je R.
Je rostoucí v R.
Není ani shora, ani zdola omezená.
Nemá ani maximum, ani minimum.

$a < 0$



$a < 0$
Obor hodnot je R.
Je klesající v R.
Není ani shora, ani zdola omezená.
Nemá ani maximum, ani minimum.

6.3 Kvadratická funkce

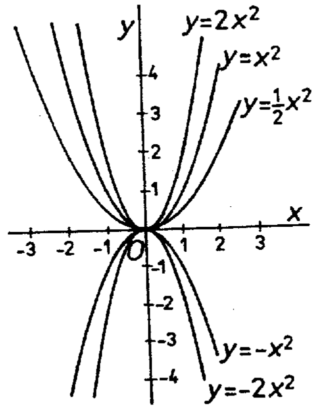
Definice

Kvadratickou funkcí se nazývá každá funkce $y = ax^2 + bx + c$, kde $a \in \mathsf{R} - \{0\}$, b, $c \in \mathsf{R}$.

Graf

Grafem kvadratické funkce je parabola.

Vlastnosti kvadratické funkce $y = ax^2$, $a \in \mathsf{R} - \{0\}$



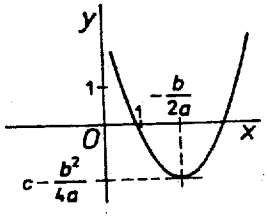
Definiční obor je R.
Je sudá.

$a > 0$
Obor hodnot je interval $\langle 0, +\infty)$.
Je klesající v intervalu $(-\infty, 0\rangle$, rostoucí v intervalu $\langle 0, +\infty)$.
Je zdola omezená, není shora omezená.
V bodě 0 má ostré minimum.

$a < 0$
Obor hodnot je interval $(-\infty, 0\rangle$.
Je rostoucí v intervalu $(-\infty, 0\rangle$, klesající v intervalu $\langle 0, +\infty)$.
Je shora omezená, není zdola omezená.
V bodě 0 má ostré maximum.

Vlastnosti kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$, kde a, b, $c \in \mathsf{R}$, $a \neq 0$

$a > 0$



Definiční obor je R.

$a > 0$

Obor hodnot je $\left\langle c - \dfrac{b^2}{4a}, \infty\right)$.

Je rostoucí v $\left\langle -\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$.

Je klesající v $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right\rangle$.

Je zdola omezená, není shora omezená.

V bodě $x = -\dfrac{b}{2a}$ má ostré minimum.

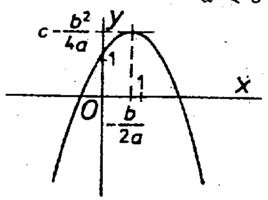
$a < 0$

Obor hodnot je $\left(-\infty, c - \dfrac{b^2}{4a}\right\rangle$.

Je rostoucí v $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right\rangle$.

Je klesající v $\left\langle -\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$.

a < 0



Je shora omezená, není zdola omezená.

V bodě $x = -\dfrac{b}{2a}$ má ostré maximum.

6.4 Mocninné funkce

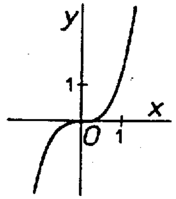
Definice

Mocninnou funkcí se nazývá každá funkce $y = x^k$, kde k je celé číslo.

Vlastnosti funkce $y = x^k$, pro $k > 0$

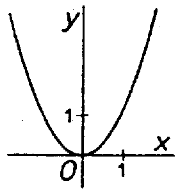
Definiční obor je R.

k-liché



k-liché
Obor hodnot je R.
Je rostoucí v R.
Je lichá.
Není ani shora, ani zdola omezená.
Nemá ani minimum, ani maximum.

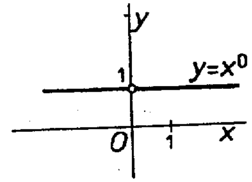
k-sudé



k-sudé
Obor hodnot je $\langle 0, +\infty)$.
Je rostoucí v $\langle 0, +\infty)$, je klesající v $(-\infty, 0\rangle$.
Je sudá.
Je zdola omezená, není shora omezená.
V bodě 0 má ostré minimum, nemá maximum.

Vlastnosti funkce $y = x^k$, pro $k = 0$

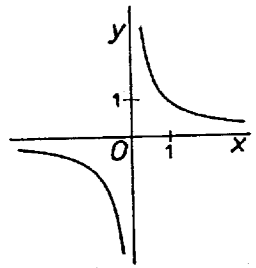
Jde o funkci $y = 1$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Pro $x = 0$ není x^0 definováno, tzn., že definiční obor je $\mathrm{R} - \{0\}$.



Vlastnosti funkce $y = x^k$, pro $k < 0$

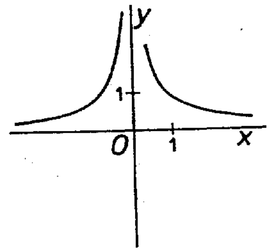
Definiční obor je $\mathrm{R} - \{0\}$.
Nemá maximum ani minimum.

k-liché



k-liché
Obor hodnot je $\mathrm{R} - \{0\}$.
Je klesající v $(-\infty, 0)$ a v $(0, +\infty)$.
Není ani zdola, ani shora omezená.
Je lichá.

k-sudé



k-sudé
Obor hodnot je R^+.
Je rostoucí v $(-\infty, 0)$, je klesající v $(0, +\infty)$.
Je zdola omezená, není shora omezená.
Je sudá.

6.5 Nepřímá úměrnost

Definice

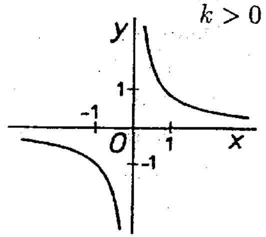
Nepřímou úměrností se nazývá každá funkce $y = \dfrac{k}{x}$, kde k je reálné číslo různé od nuly.

Graf

Grafem nepřímé úměrnosti je hyperbola.

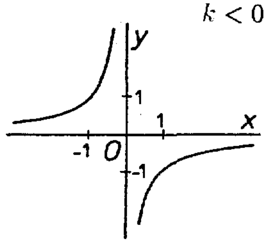
Vlastnosti funkce $y = \frac{k}{x}$, **kde** $k \in \mathrm{R} - \{0\}$

$k > 0$



Definiční obor je $\mathrm{R} - \{0\}$.
Obor hodnot je $\mathrm{R} - \{0\}$.
Není ani shora, ani zdola omezená.
Nemá ani maximum, ani minimum.
Je lichá.

$k < 0$



$k > 0$
Je klesající v $(-\infty, 0)$ a v $(0, +\infty)$.

$k < 0$
Je rostoucí v $(-\infty, 0)$ a v $(0, +\infty)$.

6.6 Lineární lomená funkce

Definice

Lineární lomenou funkcí se nazývá každá funkce $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, kde a, b, c, $d \in \mathrm{R}$, $c \neq 0$ a $ad - bc \neq 0$.

Graf

Grafem každé lineární lomené funkce je hyperbola, kterou získáme posunutím grafu některé funkce $y = \frac{k}{x}$, kde $k \in \mathrm{R} - \{0\}$.

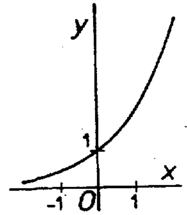
6.7 Exponenciální funkce

Definice

Exponenciální funkcí o základu a se nazývá každá funkce daná rovnicí $y = a^x$, kde $a \in \mathrm{R}^+ - \{1\}$.

Vlastnosti exponenciální funkce $y = a^x$

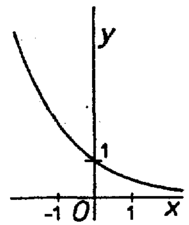
$a > 1$



Definiční obor je R.
Obor hodnot je $(0, +\infty)$.
Je zdola omezená, není shora omezená.
Nemá ani maximum, ani minimum.
Hodnota funkce v bodě 0 je rovna 1.

$a > 1$
Je rostoucí, a tedy je prostá.

$0 < a < 1$



$0 < a < 1$
Je klesající, a tedy je prostá.

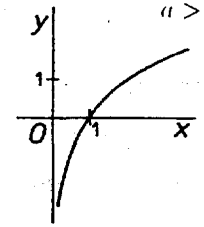
6.8 Logaritmická funkce

Definice

Logaritmickou funkcí o základu a se nazývá každá funkce $y = \log_a x$, kde $a \in \mathrm{R}^+ - \{1\}$.

Vlastnosti logaritmické funkce $y = \log_a x$

$a > 1$



Definiční obor je $(0, +\infty)$.
Obor hodnot je R.
Není ani shora, ani zdola omezená.
Nemá ani maximum, ani minimum.
Hodnota funkce v bodě 1 je rovna 0.

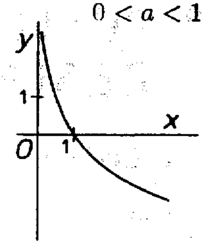
$a > 1$

Je rostoucí, a tedy je prostá.

$0 < a < 1$

Je klesající, a tedy je prostá.

$0 < a < 1$

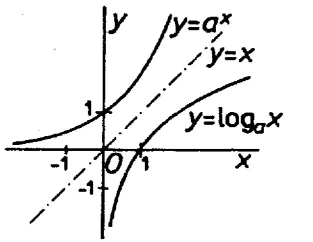


6.9 Vztah mezi exponenciální a logaritmickou funkcí

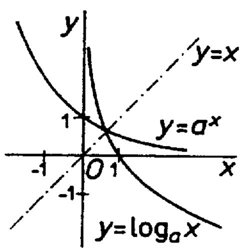
Logaritmická funkce $y = \log_a x$ a exponenciální funkce $y = a^x$ jsou navzájem inverzní.

$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$

$a > 1$



$0 < a < 1$

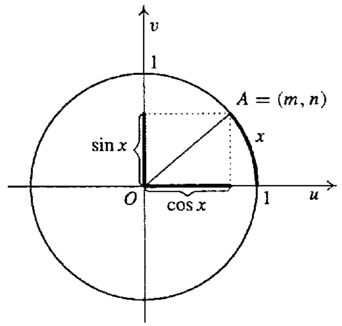


4.3 Funkce goniometrické a cyklometrické

Funkce goniometrické

Goniometrickými funkcemi nazýváme funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens. Stejně jako u funkce exponenciální, tak i u funkcí goniometrických existuje několik možností jejich zavedení. Jedním z nejčastějších způsobů je definovat funkce sinus a kosinus pomocí součtu nekonečné řady. Jinou možností je využití funkcionálních rovnic. Bohužel, vzhledem k našim znalostem, nemůžeme žádnou z těchto možností využít. Vyjdeme proto ze středoškolských poznatků a pouze připomeneme zavedení těchto funkcí pomocí jednotkové kružnice. Budeme přitom předpokládat znalost pojmu orientovaný úhel. Podrobně je tento přístup uveden například v [15]. Úhly budeme nadále měřit v míře obloukové, nikoliv stupňové. Připomeňme, že úhel 1° v míře stupňové je roven úhlu $\pi/180$ v míře obloukové. Obecně úhel n stupňů má obloukovou míru $n\frac{\pi}{180}$.

Sinus a kosinus



Nechť $A = (m, n)$ je průsečík jednotkové kružnice s koncovým ramenem orientovaného úhlu o velikosti x v soustavě pravoúhlých souřadnic u, v. (Vrchol úhlu je v počátku soustavy souřadnic O a počáteční rameno orientovaného úhlu splývá s kladnou částí osy u.)

Funkce f, jejíž hodnota je v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ rovna souřadnici n bodu A, se nazývá *sinus* a funkce f, jejíž hodnota je v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ rovna souřadnici m bodu A, se nazývá *kosinus*.

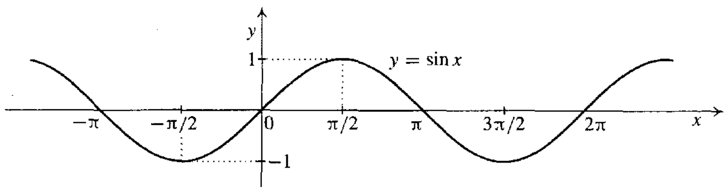
Sinus

Označení: $f\colon\ y = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$.

Vlastnosti:

- Definiční obor: $(-\infty, \infty)$.
- Obor hodnot: $\langle -1, 1\rangle$.
- Funkce je lichá, tj. $\sin(-x) = -\sin x$.
- Funkce je periodická se základní periodou 2π, tj. $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Funkce je rostoucí na intervalech $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$ a klesající na intervalech $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.

Graf:



Tabulka hodnot funkce sinus ve význačných bodech:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1

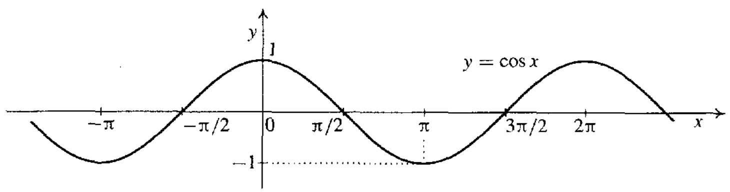
Kosinus

Označení: $f:\ y = \cos x,\ x \in \mathbb{R}.$

Vlastnosti:

- Definiční obor: $(-\infty, \infty)$.
- Obor hodnot: $\langle -1, 1\rangle$.
- Funkce je sudá, tj. $\cos(-x) = \cos x$.
- Funkce je periodická se základní periodou 2π, tj. $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Funkce je rostoucí na intervalech $\langle -\pi + 2k\pi, 0 + 2k\pi\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$ a klesající na intervalech $\langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.

Graf:



Tabulka hodnot funkce kosinus ve význačných bodech:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0

Základní vztahy a vzorce

Uveďme si nyní přehledně základní vztahy a vzorce pro počítání s funkcemi sínus a kosinus. Poznamenejme ještě, že všechny dále uvedené rovnosti platí všude, kde je současně definována levá i pravá strana rovnosti.

(1)	$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$
(2)	$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$
(3)	$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,$
(4)	$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$

Těmto vztahům říkáme součtové vzorce pro funkce sinus a kosinus. Přitom součtové vzorce (1) a (2) je užitečné si zapamatovat, neboť se často používají a jak si ukážeme dále, lze z nich odvodit řadu dalších vzorců. Vzorce (3) a (4) dostaneme tak, že ve vzorcích (1) a (2) nahradíme symbol y symbolem $-y$:

$$\sin(x - y) = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,$$
$$\cos(x - y) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

(5)	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$
(6)	$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$
(7)	$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

Vzorec (5) dostaneme tak, že ve vzorci (2) položíme $y = -x$:

$$\cos(x + (-x)) = \cos x \cos(-x) - \sin x \sin(-x),$$
$$\cos 0 = \cos^2 x + \sin^2 x,$$
$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

Vzorec (6) dostaneme ihned pomocí součtového vzorce (4):

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x = 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x = \sin x.$$

Obdobně vzorec (7).

(8)	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$
(9)	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$
(10)	$\left\lvert\sin\frac{x}{2}\right\rvert = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}},$
(11)	$\left\lvert\cos\frac{x}{2}\right\rvert = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$

Vzorce (8) a (9) dostaneme tak, že v součtových vzorcích (1) a (2) položíme $y = x$:

$$\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x,$$
$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Vzorec (10) odvodíme pomocí vzorců (9) a (5) takto:

$$\cos x = \cos 2\frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}.$$

Z toho plyne

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \left|\sin \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}.$$

Analogicky vzorec (11).

(12)	$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$
(13)	$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2},$
(14)	$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$
(15)	$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$

Vzorec (12) v proměnných α a β dostaneme, sečteme-li rovnice (1) a (3) a položíme-li $x + y = \alpha$, $x - y = \beta$, tj. $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$:

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos x,$$
$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Analogicky odvodíme vzorce (13), (14) a (15).

Tangens

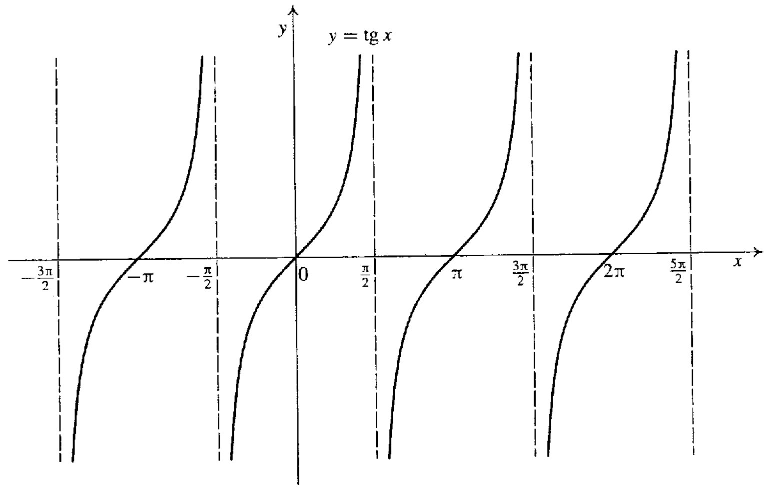
Funkci $f\colon\ y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ nazýváme *tangens* a značíme $f\colon\ y = \operatorname{tg} x$. Platí tedy

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Vlastnosti:

- Definiční obor: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Obor hodnot: $(-\infty, \infty)$.
- Funkce je lichá, tj. $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.
- Funkce je periodická se základní periodou π, tj. $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Funkce je rostoucí na intervalech $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Graf:



Tabulka hodnot funkce tangens ve význačných bodech:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—

Kotangens

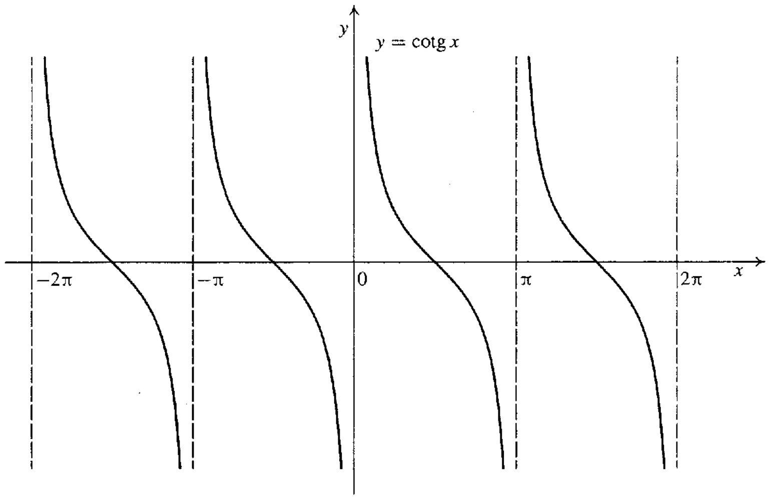
Funkci $f\colon\ y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ nazýváme *kotangens* a značíme $f\colon\ y = \operatorname{cotg} x$. Platí tedy

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Vlastnosti:

- Definiční obor: $\mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
- Obor hodnot: $(-\infty, \infty)$.
- Funkce je lichá, tj. $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$.
- Funkce je periodická se základní periodou π, tj. $\operatorname{cotg}(x + k\pi) = \operatorname{cotg} x$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Funkce je klesající na intervalech $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Graf:



Tabulka hodnot funkce kotangens ve význačných bodech:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\operatorname{cotg} x$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

Funkce cyklometrické

Cyklometrickými funkcemi nazýváme funkce arkussinus, arkuskosinus, arkustangens a arkuskotangens. Budeme je definovat jako inverzní funkce k odpovídajícím funkcím goniometrickým. To je však velmi nepřesně řečeno, neboť ani jedna z funkcí sinus, kosinus, tangens a kotangens není prostá. Nelze tedy mluvit o funkcích inverzních k těmto funkcím.

Podívejme se nejprve na funkci sinus. Funkce $f\colon\ y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, není prostá. Ale funkce $f_1\colon\ y = \sin x$, $x \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$, $f_2\colon\ y = \sin x$, $x \in \langle \pi/2, 3\pi/2\rangle$, $f_3\colon\ y = \sin x$, $x \in \langle \pi, 3\pi/2\rangle$ už prosté jsou. Lze tedy mluvit o funkcích inverzních k těmto funkcím. Přitom jedna z těchto funkcí, konkrétně funkce f_1, je standardně považována za „základní" a funkce k ní inverzní se nazývá arkussinus. Obdobnou úvahu lze provést i pro ostatní goniometrické funkce.

Arkussinus

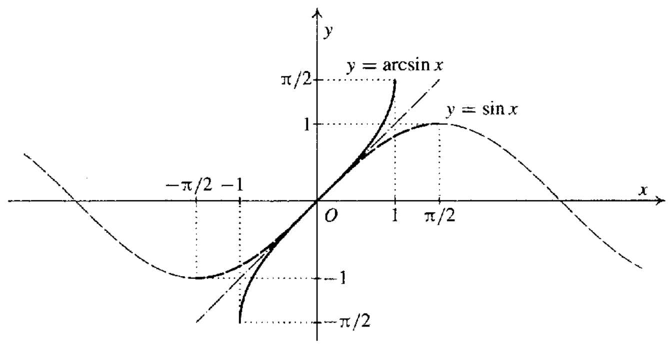
Uvažujme funkci $f\colon\ y = \sin x$, $x \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$. Tato funkce je rostoucí, a tedy prostá. Inverzní funkce f^{-1} k funkci f se nazývá *arkussinus*. Přitom $D(f^{-1}) = H(f) = \langle -1, 1\rangle$.

Označení: $f^{-1}\colon\ y = \arcsin x$, $x \in \langle -1, 1\rangle$.

Vlastnosti:

- Definiční obor: $\langle -1, 1\rangle$.
- Obor hodnot: $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.
- Funkce je lichá, tj. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.
- Funkce není periodická.
- Funkce je rostoucí.

Graf:



Arkuskosinus

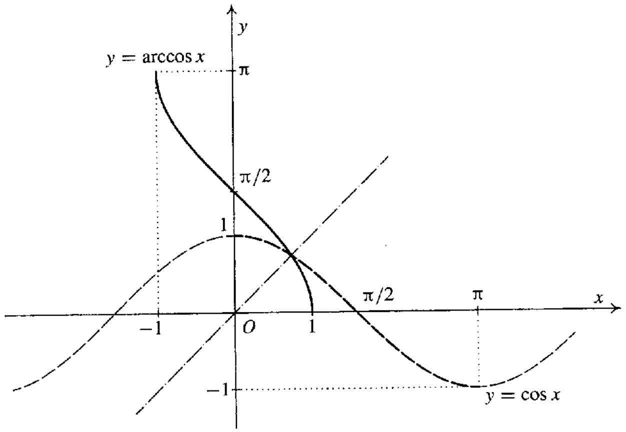
Uvažujme funkci $f\colon y = \cos x,\ x \in \langle 0, \pi\rangle$. Tato funkce je klesající, a tedy prostá. Inverzní funkce f^{-1} k funkci f se nazývá *arkuskosinus*. Přitom $D(f^{-1}) = H(f) = \langle -1, 1\rangle$.

Označení: $f^{-1}\colon y = \arccos x,\ x \in \langle -1, 1\rangle$.

Vlastnosti:

- Definiční obor: $\langle -1, 1\rangle$.
- Obor hodnot: $\langle 0, \pi\rangle$.
- Funkce není ani lichá, ani sudá.
- Funkce není periodická.
- Funkce je klesající.

Graf:



Při vyčíslení některých hodnot funkcí arkussinus a arkuskosinus využijeme znalosti odpovídajících hodnot funkcí sinus a kosinus, případně lichosti funkce arkussinus. Například

$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, protože $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$,

$\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$, protože $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a arkussinus je lichá funkce,

$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, protože $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\arccos(-1) = \pi$, protože $\cos\pi = -1$.

Arkustangens

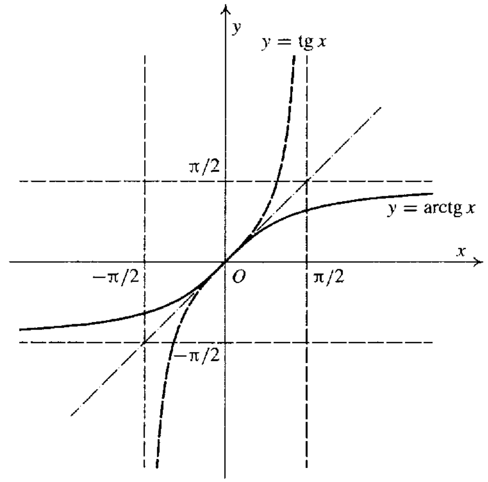
Uvažujme funkci $f\colon y = \operatorname{tg} x,\ x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Tato funkce je rostoucí, a tedy prostá. Inverzní funkce f^{-1} k funkci f se nazývá *arkustangens*. Přitom $D(f^{-1}) = H(f) = (-\infty, +\infty)$.

Označení: $f^{-1}\colon y = \operatorname{arctg} x,\ x \in (-\infty, +\infty)$.

Vlastnosti:

- Definiční obor: $(-\infty, +\infty)$.
- Obor hodnot: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- Funkce je lichá, tj. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.
- Funkce není periodická.
- Funkce je rostoucí.

Graf:



Při vyčíslení hodnot funkce arkustangens využijeme znalosti hodnot funkce tangens a lichosti funkce arkustangens. Například

$\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, protože $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$,

$\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}$, protože $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ a arkustangens je lichá funkce.

Arkuskotangens

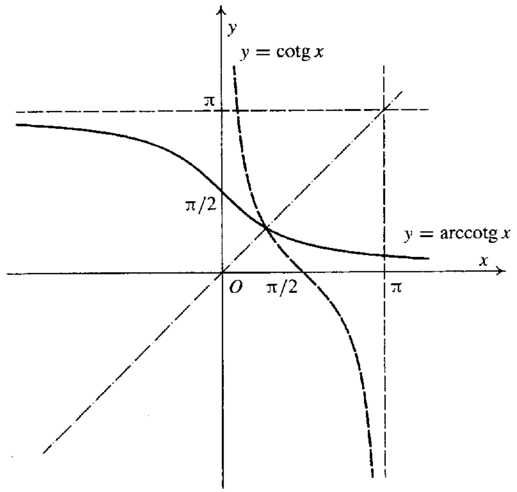
Uvažujme funkci $f\colon\ y = \operatorname{cotg} x,\ x \in (0, \pi)$. Tato funkce je klesající, a tedy prostá. Inverzní funkce f^{-1} k funkci f se nazývá *arkuskotangens*. Přitom $D(f^{-1}) = H(f) = (-\infty, +\infty)$.

Označení: $f^{-1}\colon\ y = \operatorname{arccotg} x,\ x \in (-\infty, +\infty)$.

Vlastnosti:

- Definiční obor: $(-\infty, +\infty)$.
- Obor hodnot: $(0, \pi)$.
- Funkce není ani lichá, ani sudá.
- Funkce není periodická.
- Funkce je klesající.

Graf:



Při vyčíslení hodnot funkce arkuskotangens využijeme znalosti hodnot funkce kotangens. Například

$\operatorname{arccotg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$,	protože $\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$,
$\operatorname{arccotg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$,	protože $\operatorname{cotg}\frac{3\pi}{4} = -1$; arkuskotangens není ani sudá ani lichá funkce a není tedy možné postupovat jako u funkce arkustangens.

Příklad 4.13. Nakreslete graf funkce $f\colon\ y = 2 - \sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$ a určete její periodu.

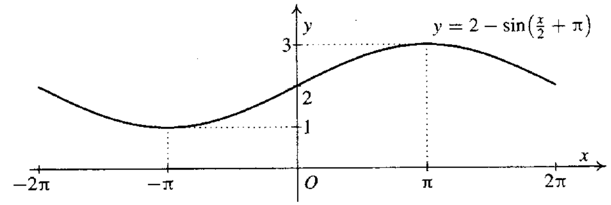
Řešení. Nejprve určíme periodu funkce f. Víme, že funkce sinus je periodická se základní periodou 2π. Obecně funkce $g\colon\ y = \sin kx$ má periodu $\frac{2\pi}{k}$. Tedy naše funkce f má periodu

$$p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi.$$

V kapitole 3.3 na str. 57 jsme si připomenuli transformace grafu funkce. Nakreslíme postupně následující funkce:

$$f_1\colon\ y = \sin\frac{x}{2}, \qquad f_2\colon\ y = \sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right), \qquad f_3\colon\ y = -\sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$$

a nakonec funkci $f\colon\ y = 2 - \sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$. Výsledná funkce f je znázorněna na obrázku.



▲

Poznámka 4.14.

1. Dle definice 3.24 platí:

$$\begin{array}{llll}
y = \arcsin x & \Leftrightarrow & x = \sin y, & \text{kde } x \in \langle -1, 1\rangle,\ y \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle, \\
y = \arccos x & \Leftrightarrow & x = \cos y, & \text{kde } x \in \langle -1, 1\rangle,\ y \in \langle 0, \pi\rangle, \\
y = \operatorname{arctg} x & \Leftrightarrow & x = \operatorname{tg} y, & \text{kde } x \in \mathbb{R},\ y \in (-\pi/2, \pi/2), \\
y = \operatorname{arccotg} x & \Leftrightarrow & x = \operatorname{cotg} y, & \text{kde } x \in \mathbb{R},\ y \in (0, \pi).
\end{array}$$

2. Protože pro vzájemně inverzní funkce platí

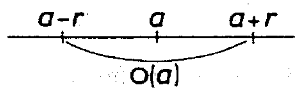
$$\begin{array}{ll}
(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x & \text{pro } x \in D(f), \\
(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x & \text{pro } x \in D(f^{-1}),
\end{array}$$

dostáváme ihned vztahy:

$$\begin{array}{ll}
\arcsin(\sin x) = x & \text{pro } x \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle, \\
\sin(\arcsin x) = x & \text{pro } x \in \langle -1, 1\rangle, \\
\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x & \text{pro } x \in (-\pi/2, \pi/2), \\
\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x & \text{pro } x \in (-\infty, +\infty).
\end{array}$$

15 DIFERENCIÁLNÍ A INTEGRÁLNÍ POČET

15.1 Diferenciální počet

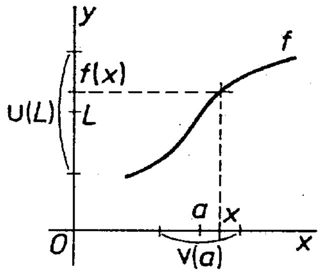


Okolí $O(a)$ bodu a

Libovolný interval $(a-r, a+r)$, kde r je kladné reálné číslo (poloměr okolí bodu a).

Definice limity funkce v bodě a

Nechť f je funkce definovaná v nějakém okolí bodu a, popřípadě kromě bodu a. Funkce f má v bodě a limitu rovnu číslu L, jestliže k libovolnému okolí $U(L)$ bodu L existuje takové okolí $V(a)$ bodu a, že pro všechna $x \in V(a)$, $x \neq a$, platí $f(x) \in U(L)$.



Existence nejvýše jedné limity

Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

Funkce spojitá

– **v bodě** a: Funkce f je spojitá v bodě a, jestliže má v bodě a limitu $f(a)$, tj. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

– **v intervalu** (a, b): Funkce f je spojitá v intervalu (a, b), jestliže je spojitá v každém bodě intervalu (a, b), tj. platí-li pro každé $c \in (a, b)$ $f(c) = \lim\limits_{x\to c} f(x)$.

Limita součtu funkcí

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

Limita rozdílu funkcí

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

Limita součinu reálného čísla a funkce

$$\lim_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot \lim_{x\to a} f(x), \text{ kde } c \text{ je reálné číslo.}$$

Limita součinu funkcí

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

Limita podílu funkcí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, \quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

Limita mocniny

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n, \text{ kde } n \text{ je celé nezáporné číslo.}$$

Důležité limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

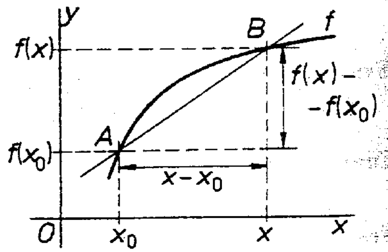
Derivace funkce v bodě x_0

Funkce f má derivaci v bodě x_0, jestliže existuje

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Zapisujeme $y' = f'(x_0) = $

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

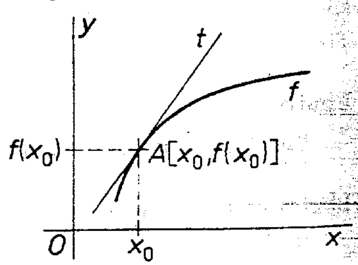


Směrnice k tečny ke grafu funkce f v bodě $A[x_0, f(x_0)]$

$$k = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Derivace jako funkce

$$y' = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Základní pravidla pro derivování

Derivace

- **součinu konstanty a funkce:** $(cf)'(x) = cf'(x)$
- **součtu funkcí:** $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- **rozdílu funkcí:** $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
- **součinu funkcí:** $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- **podílu funkcí:** $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, $g(x) \neq 0$
- **složené funkce:** $\left[f\big(g(x)\big)\right]' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$

Derivace elementárních funkcí

Funkce	Její derivace v bodě x	Interval
$y = c$, c je konstanta	$y' = 0$	$(-\infty, +\infty)$
$y = x^n$, $n \in \mathsf{N}$	$y' = nx^{n-1}$	$(-\infty, +\infty)$
$y = x^k$, $k \in \mathsf{Z}$	$y' = kx^{k-1}$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$y = x^r$, $r \in \mathsf{R}$	$y' = rx^{r-1}$	$(0, +\infty)$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$(-\infty, +\infty)$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$(-\infty, +\infty)$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathsf{Z}$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathsf{Z}$
$y = \mathrm{e}^x$	$y' = \mathrm{e}^x$	$(-\infty, +\infty)$
$y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$	$y' = a^x \ln a$	$(-\infty, +\infty)$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$
$y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$(0, +\infty)$

Rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě $A[x_0, f(x_0)]$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

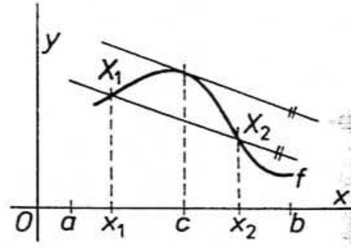
Přibližné řešení rovnice $f(x) = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 1, 2, \ldots$$

Lagrangeova věta o střední hodnotě

Jestliže funkce f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b) a x_1, $x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, pak existuje takové $c \in (x_1, x_2)$, že

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$



Spojitost polynomické funkce

Je-li f polynomická funkce a x_0 libovolné reálné číslo, pak f je spojitá v bodě x_0.

Vztah derivace a spojitosti

Jestliže funkce f má v bodě x_0 derivaci, pak je v bodě x_0 spojitá.

Monotónnost a derivace

$(\forall x \in (a, b)\colon f'(x) > 0) \Rightarrow f$ je rostoucí v intervalu (a, b)
$(\forall x \in (a, b)\colon f'(x) < 0) \Rightarrow f$ je klesající v intervalu (a, b)

Lokální minimum

Funkce f má v bodě x_0 lokální minimum, jestliže existuje takové okolí $O(x_0)$ bodu x_0, že $f(x) \geqq f(x_0)$ pro všechna $x \in O(x_0)$.

Určování lokálního minima

Má-li funkce f v intervalu (a, b) spojitou druhou derivaci, $x_0 \in (a, b)$, a jestliže $f'(x_0) = 0$ a zároveň $f''(x_0) > 0$, pak f má v bodě x_0 lokální minimum.

Lokální maximum

Funkce f má v bodě x_0 lokální maximum, jestliže existuje takové okolí $U(x_0)$ bodu x_0, že $f(x) \leqq f(x_0)$ pro všechna $x \in U(x_0)$.

Určování lokálního maxima

Má-li funkce f v intervalu (a, b) spojitou druhou derivaci, $x_0 \in (a, b)$, a jestliže $f'(x_0) = 0$ a zároveň $f''(x_0) < 0$, pak f má v bodě x_0 lokální maximum.

Globální (absolutní) minimum

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathsf{D}(f)$ globální minimum, jestliže pro všechna $x \in \mathsf{D}(f)$ je $f(x) \geqq f(x_0)$.

Globální (absolutní) maximum

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathsf{D}(f)$ globální maximum, jestliže pro všechna $x \in \mathsf{D}(f)$ je $f(x) \leqq f(x_0)$.

Určování globálních extrémů

Nechť funkce f má v intervalu (a, b) spojitou první derivaci a $x_0 \in (a, b)$ je jediný bod, ve kterém $f'(x_0) = 0$. Má-li f v bodě x_0 lokální minimum (lokální maximum), pak má v bodě x_0 globální minimum (globální maximum).

Weierstrassova věta

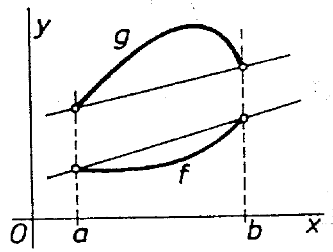
Je-li funkce $f(x)$ v každém bodě intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá, pak v tomto intervalu nabývá globálního maxima a globálního minima.

L'Hospitalovo pravidlo

Je-li $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ a jestliže existují $f'(x_0)$ a $g'(x_0)$ a navíc $g'(x_0) \neq 0$, pak $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Konvexní funkce

Je-li funkce f spojitá v intervalu (a, b) a má-li v každém bodě tohoto intervalu druhou derivaci nezápornou ($f''(x) \geqq 0$), potom je f v intervalu (a, b) konvexní.



Konkávní funkce

Je-li funkce g spojitá v intervalu (a, b) a má-li v každém bodě tohoto intervalu druhou derivaci nekladnou ($g''(x) \leqq 0$), potom je g v intervalu (a, b) konkávní.

15.2 Integrální počet

Definice primitivní funkce

Nechť f je funkce, jejíž definiční obor obsahuje interval (a, b). Funkci F nazveme primitivní funkce k funkci f v intervalu (a, b), jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $F'(x) = f(x)$. Zapisujeme $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + c$, kde c je konstanta.

Primitivní funkce

– **k součinu konstanty a funkce:** $\displaystyle\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx$

– **k součtu funkcí:** $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

– **k rozdílu funkcí:** $\displaystyle\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

Primitivní funkce k některým funkcím

Funkce f	Funkce F k ní primitivní	Interval
$y = c$, c je konstanta	$y = cx$	$(-\infty, +\infty)$
$y = x^n$, $x \in \mathrm{R}$, $n \in \mathrm{N}$	$y = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$(-\infty, +\infty)$
$y = x^r$, $x > 0$, $r \in \mathrm{R}$, $r \neq -1$	$y = \dfrac{x^{r+1}}{r+1}$	$(0, +\infty)$
$y = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$	$y = \ln\lvert x\rvert$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$y = \sin x$	$y = -\cos x$	$(-\infty, +\infty)$
$y = \cos x$	$y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$
$y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{tg} x$	$\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathrm{Z}$
$y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$y = -\operatorname{cotg} x$	$(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathrm{Z}$
$y = \operatorname{tg} x$	$y = -\ln \cos x$	$\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathrm{Z}$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y = \ln \sin x$	$(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathrm{Z}$
$y = \mathrm{e}^x$	$y = \mathrm{e}^x$	$(-\infty, +\infty)$
$y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$	$y = \dfrac{a^x}{\ln a}$	$(-\infty, +\infty)$
$y = \ln x$	$y = x(\ln x - 1)$	$(0, +\infty)$
$y = \dfrac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arctg} x$	$(-\infty, +\infty)$
$y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin x$	$(-1, 1)$

Určitý integrál

Jestliže funkce f je spojitá v každém bodě intervalu $\langle a, b\rangle$, pak existuje právě jedno číslo I, které nazýváme určitý integrál (od a do b)

z funkce f; zapisujeme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Číslo a je dolní mez, číslo b je horní mez tohoto integrálu, funkce f se nazývá integrovaná funkce (též integrand).

Newtonova-Leibnizova věta

Jestliže funkce f je spojitá v každém bodě intervalu $\langle a, b\rangle$ a je-li F funkce k ní primitivní a spojitá v každém bodě intervalu $\langle a, b\rangle$, pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

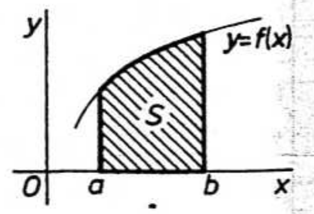
Záměna mezí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Rozdělení intervalu $a < c < b$

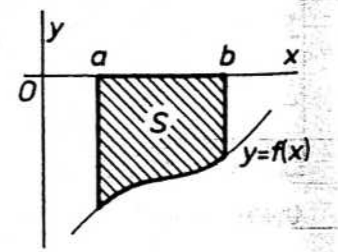
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Obsah rovinného obrazce



Je-li funkce f v každém bodě intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá a nezáporná (tj. pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \geqq 0$), pak pro obsah S plochy omezené grafem funkce f, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ platí:

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

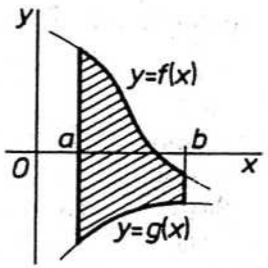


Je-li funkce f v každém bodě intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá a nekladná (tj. pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \leqq 0$), pak platí:

$$S = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Jsou-li funkce f a g spojité v každém bodě intervalu $\langle a, b\rangle$ a pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ je $g(x) \leqq f(x)$, pak pro obsah S obrazce omezeného grafy funkcí f a g a přímkami $x = a$, $x = b$ platí:

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x$$



Jestliže grafy funkcí f a g se v intervalu (a, b) neprotínají, není třeba zjišťovat, zda $g(x) \leqq f(x)$, a vždy platí:

$$S = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \right|$$

Objem rotačního tělesa

Je-li rotační těleso utvořené rotací křivky $y = f(x)$ kolem osy x a přitom funkce f je nezáporná a spojitá v každém bodě intervalu $\langle a, b\rangle$, pak pro objem V rotačního tělesa platí:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$