Fysikální měření pro gymnázia

Pracovní verze 1. části učebního textu

METODY MĚŘENÍ FYSIKÁLNÍCH VELIČIN

V hodinách fysiky byla probrána teorie o fysikálních veličinách, jejich číselných hodnotách a jednotkách. V přírodovědných (resp. fysikálních) cvičeních budeme různé fysikální veličiny prakticky *měřit*; přitom budeme postupovat různými metodami. Konkrétní metody měření fysikálních veličin můžeme rozdělit do několika skupin podle zvolených hledisek.

1. dělení. **Přímá metoda** využívá k určení hodnoty definičního vztahu. **Metoda nepřímá** využívá jiného než definičního vztahu.
Příklad. Hustota je definována vztahem $\varrho = m/V$. Určíme-li hustotu z tohoto vztahu měřením hmotnosti a objemu, postupujeme přímou metodou. Hustota se však také objevuje v Archimédově zákoně; pokud tohoto zákona vhodně použijeme k měření hustoty kapaliny či ponořeného tělesa, postupujeme nepřímo. $\square$
Pozor! Vedle pojmů *přímá* resp. *nepřímá metoda* se používají ještě pojmy přímé resp. nepřímé měření. **Přímé měření** spočívá v tom, že hodnotu veličiny zjistíme přímo odečtením na stupnici měřidla; **nepřímé měření** spočívá na výpočtu veličiny z jiných veličin změřených měřidly. Tedy měříme-li hustotu přímou metodou, změříme přímým měřením hmotnost a objem a výpočtem stanovíme hustotu. Řekneme pak, že měření hustoty bylo nepřímé.

2. dělení. Při měření **srovnávací (relativní) metodou** porovnáváme měřenou veličinu se známou hodnotou veličiny téhož druhu. (Při vážení se závažím, při určování odporu s odporem rezistorů odporové dekády.) Naopak **absolutní metody** dávají výsledek přímo ve zvolených jednotkách.

Z dalších typů metod bude zmíněna **substituční metoda**. Spočívá v porovnání měřené veličiny s řadou veličin téhož druhu známé velikosti uspořádaných do sad. Nejdříve zjistíme výchylku měřicího přístroje způsobenou měřenou veličinou; poté ji nahradíme sadou veličin nastavenou tak, aby způsobila stejnou výchylku měřicího přístroje.

CHYBY MĚŘENÍ

Označme symbolem X skutečnou (přesnou) hodnotu fysikální veličiny. Tuto hodnotu neznáme; měřením se ji snažíme zjistit. Symbolem x označíme hodnotu naměřenou. **Chybou měření** δ potom rozumíme rozdíl

$$\delta := x - X, \tag{1.1}$$

jak je patrné, chyba δ může být kladná i záporná (podle toho, zda-li je naměřená hodnota veličiny větší či menší než její hodnota skutečná).

Při diskusi o přesnosti měření nezáleží jen na absolutní velikosti chyby měření, ale také na jejím poměru k hodnotě veličiny. Měříme-li jednak délku šroubu do traktoru, jednak vzdálenost Země–Měsíc s touž absolutní chybou, neznamená to, že by měření byla stejně přesná. Je proto účelné, aby byla **relativní chyba měření** δ_r definována jako poměr chyby měření ke změřené hodnotě veličiny:

$$\delta_r := \delta/x; \tag{1.2}$$

často se hodnota δ/x ještě vynásobí stem; relativní chyba měření δ_r je pak uvedena v procentech.

V případě ideálního měření (s absolutní přesností) by platilo $X = x$ a chyba δ by byla nulová. Každé reálné – i sebepečlivěji provedené – měření je však zatíženo chybami. Jsou způsobeny nepřesností a nedokonalostí měřicích přístrojů, omezenými schopnostmi lidských smyslů, jsou důsledkem vnějších podmínek a vlivů působících na měření. Podle původu a charakteru výskytu lze chyby rozdělit[1]) např. takto:

Hrubé chyby vznikají omylem experimentátora, jeho nepozorností či přehlédnutím. Vznikají např. záměnou číslic v zápisu, opomenutím některého (podstatného) kroku měření. Tyto chyby podstatně zkreslují výsledek měření. Jsou snadno rozpoznatelné („jedna řádově odlišná hodnota v souboru naměřených, blízkých hodnot“). Hodnoty získané měřením, při němž došlo k hrubé chybě, je třeba ze souboru naměřených hodnot vyloučit.

Systematické (soustavné) chyby se při opakovaném měření (za stejných podmínek) projevují stále stejně. Patří mezi ně *chyby metody* vznikající nedokonalostí, neúplností či nevhodností použité metody měření (metoda např. vychází z teoretického předpokladu, který „v praxi“ není beze zbytku splněn), dále *chyby přístrojů* (nepřesnost přístrojů způsobená např. nedokonalou stupnicí, změnou délky (rozměrů) měřidla způsobenou změnou teploty), a konečně také *chyby osobní*, tj. chyby pozorovatelovy, způsobené např. dobou nervové reakce při měření času stopkami. Systematické chyby lze eliminovat zavedením početních korekcí (počítá se pak i s dobou nervové reakce pozorovatele; při vážení se zohlední, že závaží a vážený předmět rozdílného objemu jsou na miskách nadlehčovány různě velkou vztlakovou silou vzduchu apod.).

Náhodné (nahodilé) chyby jsou výsledkem vlivů nepravidelných dějů, jejichž účinky se náhodně skládají. Výsledky opakovaných měření (provedených stejnou matodou a stejným experimentátorem) se právě v důsledku náhodných chyb vždy poněkud liší. Spektrum příčin těchto chyb je velmi široké, jde o řadu nezávislých vlivů: náhlé změny tlaku, teploty, vlhkosti vzduchu v místě měření, nesprávné ustavení přístoje, změny teploty měřicího zařízení, změny fysikálních polí v místě měření (např. změny geomagnetického pole). Na důsledky náhodných chyb je třeba brát při měření zřetel; měření se několikrát opakuje a získané výsledky se analyzují metodami matematické statistiky, tak lze stanovit nejpravděpodobnější hodnotu měřené veličiny.

V dalších kapitolách se jednotlivými typy chyb budeme zabývat podrobněji.

Matematický exkurs: Pravděpodobnost

V následujících úvahách budeme potřebovat pojem **pravděpodobnost**. Běžně se říká: „to je pravděpodobné“, „to není moc pravděpodobné“. Dejme tomuto pojmu matematický význam.

Klasická definice pravděpodobnosti. V pokusu, jehož všechny možné výsledky jsou stejně pravděpodobné, je pravděpodobnost jevu A rovna

$$P(A) = \frac{\text{počet výsledků příznivých jevu } A}{\text{počet všech možných výsledků}}.$$

[1]) V metrologické literatuře lze nalézt i jiné, mírně rozdílné klasifikace chyb měření, základní typy chyb jsou však stejné.

Příklad. Pravděpodobnost hození šestky „regulérní“ kostkou je 1/6, sudého čísla $3/6 = 1/2$, prvočísla $3/6 = 1/2$. □

Klasická definice pravděpodobnosti je názorná, ale má nevýhodu: počet výsledků v klasické definici musí být konečný. To postačí pro potřeby hráčů v kostky, pro potřeby fysiky nikoliv, neboť měření fysikální veličiny může mít nekonečně mnoho různých výsledků. Proto byla zvolena **geometrická definice pravděpodobnosti**: V rovině je dána množina G a její podmnožina g. Vybíráme náhodně bod z množiny G a ptáme se, s jakou pravděpodobností patří do množiny g. Pravděpodobnost přitom definujeme takto:

$$P = \frac{S(g)}{S(G)};$$

$S(g)$ resp. $S(G)$ je obsah množiny g resp. G.

Příklad. Strefujeme-li se do ciferníku hodin (zásah všech míst je stejně pravděpodobný), pak pravděpodobnost, že se trefíme do první čtvrthodiny, je 1/4. □

Ani geometrická definice není pro vyšší matematiku dostačující, proto se pracuje s axiomatickou definicí. Pro potřeby tohoto textu však klasická a geometrická definice pravděpodobnosti postačují. Na závěr exkursu poznamenejme, že pravděpodobnost jevu jistého je 1, zatímco pravděpodobnost jevu nemožného je 0.

Interval spolehlivosti *(1. část výkladu)*

Ukázali jsme si, že nejde přesně stanovit hodnotu měřené veličiny, neboť se při měření dopouštíme chyby měření. Nejde-li stanovit přesnou hodnotu veličiny, můžeme stanovit interval, v němž skutečná hodnota měřené veličiny X nejspíše leží, a zjistit, s jakou pravděpodobností. Řekněme si nejprve, co je naším cílem.

Představme si, že měříme délku kovové tyčky. Není možné změřit ji zcela přesně. Byli bychom však rádi, kdybychom mohli např. konstatovat, že s pravděpodobností 95 % je její délka větší než 101,5 mm a menší než 101,6 mm. Matematicky zapsáno:

$$X \in (101,5 \text{ mm}; 101,6 \text{ mm}) \text{ s pravděpodobností 95 \%}. \tag{1.12}$$

Ve fysice se užívá jiný zápis, využívající středu daného intervalu:

$$X = (101,55 \pm 0,05) \text{ mm} \quad \text{s pravděpodobností 95 \%}. \tag{1.13}$$

Uvedený interval se nazývá **interval spolehlivosti**.

Pokud bychom (za stejného měření) chtěli délku tyčky popsat přesněji, museli bychom „dolní“ a „horní“ odhad posunout blíže k sobě a říci např.

$$X \in (101,52 \text{ mm}; 101,58 \text{ mm}) \quad \text{s pravděpodobností 65 \%}, \tag{1.14}$$

nebo – totéž, ale zapsáno způsobem obvyklým ve fysice – toto:

$$X = (101,55 \pm 0,03)\text{mm} \quad \text{s pravděpodobností 65 \%}. \tag{1.15}$$

Důležitější než zápis je uvědomit si: Tím, že meze přiblížíme více k sobě, snižujeme pravděpodobnost, že skutečná hodnota měřené veličiny mezi těmito mezemi leží.

Při měření uvažujeme opačně: Nejprve se rozhodneme (resp. vyučující či zadavatel úkolu stanoví), s jakou pravděpodobností má být měření provedeno, a podle toho určíme krajní meze intervalu spolehlivosti. Čím větší má být pravděpodobnost, tím delší („širší“) bude i interval. Úzkého intervalu spolehlivosti lze dosáhnout jen pro menší pravděpodobnost. Jak třeba dobře vyvážit oba požadavky: cílem je najít „rozumný interval spolehlivosti s rozumnou pravděpodobností“.

Příklad. Kdyby např. výrobce policejního radaru zaručoval pravděpodobnost 99,999 %, ale výsledkem měření rychlosti by byl interval

$$v = (100 \pm 95)\ \mathrm{km/h}, \tag{1.16}$$

bylo by takové měření naprosto bezcenné. □

Označíme-li zvolenou pravděpodobnost P, potom pravděpodobnost nežádoucího opačného jevu α, kde

$$\alpha = 100\,\% - P \tag{1.17}$$

nazýváme **riziko**. Riziko vyjadřuje pravděpodobnost, že skutečná hodnota měřené veličiny X leží mimo stanovený interval spolehlivosti.

Příklad. Stanovíme-li pro nějakou veličinu interval spolehlivosti s pravděpodobností 65 %, znamená to, že skutečná hodnota veličiny v tomto intervalu s pravděpodobností 65 % leží a s rizikem 35 % v něm neleží. □

„Šíře“ intervalu spolehlivosti při zvolené/dané pravděpodobnosti závisí na náhodných i systematických chybách měření. Prostudujme tyto chyby měření.

Náhodné chyby

Ukažme si nejprve, jak se (statisticky) vypořádat s náhodnými chybami. Začněme příkladem.

Příklad. Opakovaně byla měřena výška kovovéhoválečku. Bylo provedeno 44 měření; dostali jsme tyto hodnoty:

5,77	5,65	5,74	5,88	5,71	5,99	5,99	5,69
5,84	5,69	5,72	5,77	5,80	5,72	5,81	5,68
5,77	5,64	5,72	5,79	5,87	5,61	5,91	5,88
5,75	5,67	5,84	5,68	5,77	5,73	5,49	5,32
5,69	5,77	5,54	5,59	5,69	5,70	5,70	5,60
5,73	5,80	6,03	5,73				

Mezi dvěma po sobě následujícími hodnotami není žádná pravidelnost či souvislost. Seřaďme nyní naměřené hodnoty podle velikosti – viz TAB. 1. Vidíme, že rozdíl mezi největší a nejmenší naměřenou hodnotou je 0,71 mm. Naměřené hodnoty rozdělíme do několika skupin, do několika stejně širokých intervalů. Zvolme šířku intervalu 0,3 mm. Interval od nejmenší do největší hodnoty rozdělíme na dílčí intervaly o šíři 0,3 mm a spočítáme, kolik naměřených hodnot do kterého intervalu připadne. Výsledek úvahy je v TAB. 1; v posledním sloupci je zaznamenána **relativní četnost** f_i – číslo, vyjadřující poměr počtu n_i hodnot naměřených v i-tém intervalu a počtu n

všech měření. Relativní četnost se vyjadřuje buďto zlomkem (resp. desetinným číslem) nebo (po vynásobení 100) v procentech. Symbolicky zapsáno

$$f_i = \frac{n_i}{n}. \tag{1.3}$$

Znázorněme výsledek úvahy ještě názorněji, graficky – pomocí sloupcového diagramu. Sloupce (obdélníky) tvořící diagram budou mít šířku rovnou šířce dílčích intervalů; výška bude odpovídat četnosti naměřených hodnot v daném intervalu. Tento typ diagramu se nazývá **histogram**. Histogram odpovídající TAB. 1 je v OBR. 1.

Nyní provedeme celou úvahu znovu, ale zvolíme intervaly užší, o šíři 0,2 mm. Zpracujeme podobnou tabulku TAB. 2 a nakreslíme histogram (v OBR. 2). Čtenář jistě tuší, jak bude vypadat situace, když základní šíři intervalu zvolíme 0,1 mm. Uvedeme již pouze příslušný histogram, viz OBR. 3. □

Vyšší matematika však umožňuje jít ještě dále. Abychom se vyhnuli složitým matematickým výkladům, ukážeme si celou věc názorným příměrem: Předpokládejme (teoreticky), že jsme neprovedli pouze 44 měření, ale nekonečný počet měření. Naměřené hodnoty rozdělíme „do nekonečně mnoha nekonečně úzkých intervalů“. Jak se celá situace změní? Obdélníky nyní mají „nulovou“ šíři, tzn. změnily se v úsečky. „Horní“ koncové body úseček ve sjednocení vytvářejí spojitou křivku. Tato křivka se nazývá **Gaussova křivka** (viz OBR. 5).

Co tato křivka vyjadřuje? Připomeňme, že histogram vyjadřuje četnost hodnot naměřených v jednotlivých intervalech. Gaussova křivka, k níž jsme od histogramu došli, popisuje pravděpodobnost, s jakou jedna naměřená hodnota padne do předem zvoleného intervalu.

Příklad. V OBR. 5 je uvedena Gaussova křivka pro jistou veličinu. Zajímá nás, s jakou pravděpodobností bude naměřená hodnota z vyznačeného intervalu $\langle a, b \rangle$. Odpověď je „jednoduchá“: Pravděpodobnost se číselně rovná obsahu plochy pod danou křivkou v hledaném intervalu (tzn. obsahu plochy v obrázku vyznačené tmavě). □

O křivce můžeme vyslovit další tvrzení:

1. Obsah útvaru[2]) mezi Gaussovou křivkou a osou x je 1. Znamená to, že pravděpodobnost, že při měření naměříme hodnotu s libovolně velkou chybou, je rovna 1, je to tedy jistota.

2. Nejvyšší funkční hodnoty má funkce popisující křivku v okolí bodu X, od tohoto bodu směrem doprava i doleva funkční hodnoty klesají. Znamená to, že menší chyby jsou pravděpodobnější než chyby větší.

3. Křivka je symetrická kolem svislé osy procházející bodem X. Obsah útvaru pod křivkou napravo od osy souměrnosti je 0,5, nalevo od osy souměrnosti také 0,5. Znamená to, že kladné chyby jsou stejně pravděpodobné jako chyby záporné.

4. Ve střední části (kolem X) je křivka otevřená dolů (konk<u>á</u>vní, má tvar písmene A), v okrajových částech je otevřená nahoru (kon<u>v</u>exní, tvar částí písmene V). Bodům, v nichž se konvexní křivka mění v konkávní, říkáme **inflexní body**. Označme (podle OBR. 6) vzdálenost inflexního bodu od bodu X (měřeno na ose x) písmenem σ. V dalším výkladu toto označení využijeme.

---

[2]) Počítat obsah takovýchto útvarů pomocí integrálního počtu se budeme učit v matematickém semináři, popř. v posledním ročníku. Počítat obsah útvaru pod Gaussovou křivkou je ovšem netriviální vysokoškolská úloha; proto jí čtenáře ušetříme.

5. Předpokládejme, že byla provedena tři různá měření fysikálních veličin a že jsme získali tři Gaussovy křivky v OBR. 7. Můžeme říci, že měření byla různě přesná. Nejpřesnější bylo první měření, neboť pravděpodobnost malé chyby je zde největší, pravděpodobnosti chyb větších jsou menší než u dalších měření. Naopak nejméně přesné je měření třetí; zde je – ze všech tří měření – pravděpodobnost změření veličiny s nejmenší chybou nejmenší. V obrázku je pro každou křivku znázorněna vzdálenost σ. Vidíme, že čím přesnější měření je, tím je příslušné σ menší. Číslo σ tak podstatným způsobem charakterizuje přesnost měření; nazývá se **směrodatná odchylka jednoho měření**.[3])

6. Obsah útvaru ohraničeného shora Gaussovou křivkou a zdola intervalem $(X-\sigma; X+\sigma)$ (viz OBR. 8) je přibližně 0,6826. Znamená to, že pravděpodobnost, že veličina X má při jednom měření chybu nejvýše σ, je 68,3 %.

7. Interval, nad nímž je křivka sestrojená (= definiční obor funkce, popisující křivku), není omezený. Znamená to, že při nekonečně mnoha měřeních mohou být sice některá měření s „obrovskou“ chybou, ale – jak je z obrázku patrné – je to velmi nepravděpodobné. Dá se spočítat, že pravděpodobnost, že chyba měření je z intervalu $(-3\sigma; 3\sigma)$ je 99,7 %. Chyby větší než trojnásobek směrodatné odchylky se tedy prakticky nevyskytují. Směrodatná odchylka je tedy velmi důležitou veličinou umožňující zhodnotit přesnost fysikálního měření. Nyní se budeme zabývat tím, jak směrodatnou odchylku v konkrétním měření vypočítat (přesněji: odhadnout).

Připomeňme, že všechny výše uvedené (matematické, teoretické) úvahy vycházely z předpokladu *nekonečného počtu* provedených měření. Tento předpoklad ovšem„prakticky“ realizovat nelze. Provádíme vždy pouze konečný počet měření (1, 5, 10, 20, 100 ...); tato měření tak představují více či méně široký **náhodný výběr** z nekonečného množství měření. Nemůžeme tedy přesně stanovit skutečnou hodnotu měřené veličiny X ani její směrodatnou odchylku σ; oba tyto důležité údaje můžeme pouze odhadnout na základě *omezeného, náhodného výběru.*

Ukazuje se, že nejlepším *odhadem* střední hodnoty měřené veličiny X je aritmetický průměr $\bar{x}$ všech naměřených hodnot. Jestliže počet naměřených hodnot označíme n, potom se aritmetický průměr vypočte dle vztahu

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{1.4}$$

Podobně jako jsme střední hodnotu naměřené veličiny odhadli aritmetickým průměrem změřených hodnot, odhadujeme směrodatnou odchylku **výběrovou směrodatnou odchylkou**, která je dána vztahem

$$s := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}. \tag{1.5}$$

Výraz $x_i - \bar{x}$ se často označuje Δ_i a nazývá se **odchylka měření od průměru**, při zpracování výsledků měření je užitečné pro každé měření vypočítat (a uvést v tabulce) hodnotu odchylky

$$\Delta_i = x_i - \bar{x}. \tag{1.6}$$

[3]) Ve starší literatuře název **základní střední (kvadratická) chyba**; tyto starší názvy budeme uvádět jen pro ty, kteří studují další literaturu, aby poznali alternativní názvosloví; v žádném případě není třeba se tyto pojmy uvedené pod čarou učit a plnit hlavu zbytečnými, matoucími pojmy.

Směrodatná odchylka aritmetického průměru

Zopakujme si předchozí úvahu: Z nekonečně mnoha (teoreticky) možných měření jsme prakticky vybrali docela malý počet n měření (např. 10), která jsme skutečně provedli. Z nich jsme potom spočítali průměr, kterým jsme odhadli skutečnou hodnotu měřené veličiny. Co kdybychom vše zopakovali ještě jednou? Potom bychom naměřili jiných 10 hodnot, kterým by příslušel obecně jiný průměr. Každý takto stanovený průměr je tedy také náhodnou veličinou, závislou na deseti změřených hodnotách. I tato náhodná veličina je charakterizována Gaussovou křivkou, která je však v porovnání s Gaussovou křivkou příslušející jednomu měření užší. Proč? Opakováním měření a užitím aritmetického průměru měření zpřesňujeme, více se blížíme skutečné hodnotě veličiny X. Tvar Gaussovy křivky příslušející aritmetickému průměru popisuje **směrodatná odchylka aritmetického průměru** $\bar{\sigma}$; je dána vztahem:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{1.7}$$

Z tohoto vztahu plyne, že směrodatná odchylka aritmetického průměru je $\sqrt{n}$krát menší než směrodatná odchylka jednoho měření. Směrodatnou odchylku aritmetického průměru můžeme z několika provedených měření pouze odhadnout. Odhad dává **výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru** $\bar{s}$, kterou spočítáme podle vztahu

$$\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}, \tag{1.8}$$

který lze s využitím označení (1.6) napsat stručněji:

$$\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2}{n(n-1)}}. \tag{1.9}$$

Poznámka. Výběrovou směrodatnou odchylku aritmetického průměru lze vedle již uvedeného (přesného) vztahu (1.9) počítat přibližně dle vzorce

$$\bar{s} = \frac{5}{4}\frac{\sum_{i=1}^{n}|\Delta_i|}{n(n-1)}. \tag{1.10}$$

vzorec je pro „ruční“ počítání na kalkulačce bez statistických operací „pohodlnější“; např. při deseti provedených měřeních je $n\sqrt{n-1} = 3$, s „takovým číslem“ se „dobře počítá“, neboť vzorec dostane tvar

$$\bar{s_{10}} = \frac{\sum_{i=1}^{10}|\Delta_i|}{24}. \tag{1.11}$$

Zrekapitulujme, co už umíme spočítat: aritmetický průměr, výběrovou směrodatnou odchylku aritmetického průměru a výběrovou směrodatnou odchylku jednoho měření. Jak tyto veličiny využijeme ke stanovení přesnosti měření?

Interval spolehlivosti *(2. část výkladu)*

V první části výkladu jsme vysvětlili, že cílem každého měření je najít interval spolehlivosti pro měřenou veličinu. Interval spolehlivosti přitom určují čtyři parametry:

(1) aritmetický průměr,
(2) směrodatná odchylka aritmetického průměru,
(3) počet měření,
(4) zvolená pravděpodobnost.

Hodnoty pravděpodobnosti se nevolí libovolně, ale zpravidla jedním z těchto způsobů:
a) **pravděpodobnost 50 %** – chyba měření se potom nazývá **pravděpodobná chyba** ϑ,
b) **pravděpodobnost 68,27 %** – chyba měření je potom rovna směrodatné odchylce, viz předchozí výklad,
c) **pravděpodobnost 95 %** – chyba měření se potom nazývá **krajní chyba** a značí se κ.

V gymnáziu budeme pracovat pouze s krajní chybou měření. Protože je to chyba určující interval spolehlivosti s pravděpodobností 95 %, tedy s pravděpodobností větší než je pravděpodobnost 68,27 %, která odpovídá směrodatné odchylce, je třeba ještě směrodatnou odchylku aritmetického průměru zmodifikovat pro pravděpodobnost 95 %. Krajní chybu dostaneme tak, že směrodatnou odchylku vynásobíme **Studentovým součinitelem** t, tedy

$$\kappa = t\bar{s}. \tag{1.18}$$

Hodnoty Studentova součinitele t pro pravděpodobnost 95 % (riziko 5 %) jsou[4]) uvedeny v TAB. 3; jak vidíme, s rostoucím počtem měření t klesá, měření je přesnější, interval spolehlivosti užší.[5])

Systematické chyby

V začátku bylo uvedeno, že systematické chyby se při opakovaném měření (za stejných podmínek) projevují stále stejně. Každé měření je ovlivněno přesností použitého měřidla.

Příklad. Změřili jsme výšku tělesa běžným papírovým, milimetrovým měřítkem. Měření bylo provedeno desetkrát, vždy se stejným výsledkem. Výpočet z předchozí kapitoly dá výsledky: $\bar{s} = 0$, a tedy $\kappa = 0$. To však neznamená, že by měření papírovým měřítkem bylo absolutně přesné; naopak – poměrně velká chyba je dána již charakterem měřítka, přesností jeho výroby, použitým materiálem, dělením stupnice. □

Chyba měřidla m je často uvedena výrobcem v dokumentaci měřidla. Jde zpravidla o polovinu nejmenší dílku stupnice měřidla, jak ukazuje následující přehled:

pásové měřítko	0,5 mm – 1 mm
posuvné měřítko	0,05 mm
mikrometr	0,01 mm
stopky	0,3 s
teploměr	1/2 nejmenšího dílku

V údaji uvedeném u stopek je započtena i doba nervové reakce experimentátora. Stanovení chyby vážení je uvedeno přímo v návodu k příslušné laboratorní úloze. Problematikou chyb měření elektrických veličin (napětí, proud) se zabývá až další část učebního textu věnovaná elektřině a magnetismu.

Relativní chyba měřidla m_r je definována zcela obvyklým způsobem:

$$m_r = m/x \text{ resp. } m_r = m/x \cdot 100; \tag{1.19}$$

[4]) V některých laboratořích a v některé literatuře se krajní chybou rozumí chyba s pravděpodobností 99 %. Hodnoty Studentova součinitele jsou potom vyšší než je uvedeno v tab. 3.
[5]) Jak vznikl zvláštní název Studentův součinitel? Autorem teorie o Studentově součiniteli je W. S. Gossett. Svoji teorii nesměl v době vzniku na příkaz zaměstnavatele publikovat, uveřejnil ji proto s fiktivním podpisem „Student“. I po objevení „pravého“ autora však název zůstal …

x je velikost naměřené hodnoty.[6])

Zápis výsledku měření

Popsali jsme, jak se vypořádat s náhodnými chybami a s chybami měřidla. V teorii náhodných chyb jsme došli ke krajní chybě κ, u chyb měřidla k chybě m. Na výsledný interval spolehlivosti omezený výslednou krajní chybou κ' mají vliv oba typy chyb; tyto chyby je třeba „sečíst“. Použije se k tomu vztah

$$\kappa' = \sqrt{\kappa^2 + m^2}; \tag{1.20}$$

k jehož odvození by bylo třeba pokročilejších matematických znalostí (parciální derivace). κ' zaokrouhlíme na jednu platnou cifru. (Uvádět větší počet desetinných míst nemá vzhledem k významu tohoto čísla smysl a pokládá se to za chybu!)

Již dříve získaný aritmetický průměr zaokrouhlíme na tolik desetinných míst, kolik jich po zaokrouhlení na jednu platnou cifru má κ'. Výsledek měření pak zapíšeme intervalem spolehlivosti s vyznačenou pravděpodobností:

$$x = (\bar{x} \pm \kappa') \text{ s pravděpodobností } 95\ \%.$$

Pro objektivní posouzení přesnosti měření spočítáme ještě výslednou relativní krajní chybu:

$$\kappa'_r = \frac{\kappa'}{x}. \tag{1.21}$$

Praktický postup

(1) Hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$ získané $n$krát opakovaným měřením zapíšeme do tabulky.
(2) Vypočítáme aritmetický průměr $\bar{x}$ všech naměřených hodnot.
(3) Vypočteme odchylky Δ_i naměřených hodnot x_i od aritmetického průměru $\bar{x}$ podle vztahu $\Delta_i = x_i - \bar{x}$, zapíšeme je do tabulky. Do dalšího sloupce zapíšeme druhé mocniny odchylek, tzn. Δ_i^2
(4) Pro kontrolu sečteme hodnoty odchylek Δ_i. Součet musí být roven nule.
(5) Vypočteme výběrovou směrodatnou odchylku aritmetického průměru

$$\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2}{n(n-1)}}. \tag{1.9}$$

(6) V závislosti na počtu provedených měření n vyhledáme v TAB. 3 příslušnou hodnotu t.
(7) Vypočteme krajní chybu κ dle vztahu

$$\kappa = t\bar{s}. \tag{1.18}$$

(8) Zjistíme chybu měřidla m. Celkovou krajní chybu κ' vypočteme ze vztahu $\kappa' = \sqrt{\kappa^2 + m^2}$ a zaokrouhlíme na jednu platnou cifru.

---

[6]) V některých případech se za x nedosazuje naměřená hodnota, ale maximální hodnota zvoleného rozsahu měřicího přístroje. Podrobněji později.

(9) Aritmetický průměr zaokrouhlíme na tolik desetinných míst, kolik jich po zaokrouhlení na jednu platnou cifru má κ'. Výsledek měření pak zapíšeme intervalem spolehlivosti s vyznačenou pravděpodobností:

$$x = (\bar{x} \pm \kappa') \text{ s pravděpodobností } 95\ \%.$$

(10) Pro další výpočty si spočteme a poznamenáme výslednou relativní krajní chybu:

$$\kappa_r' = \frac{\kappa'}{x}. \tag{1.21}$$