DĚLITELNOST CELÝCH ČÍSEL

Def. 1 Říkáme, že celé číslo **b dělí** celé číslo **a** (nebo **b je dělitelem a** nebo **a je dělitelné b** nebo **a je násobkem b**), právě když existuje celé číslo x, pro které platí **a = b . x.**
Symbolicky: $b|a \Leftrightarrow (\exists x \in C)(a = b \cdot x)$

Jestliže k číslům $a,b \in C$ neexistuje $x \in C$ takové, že $a = b \cdot x$, říkáme, že b nedělí a. $b \nmid a$

Platí-li, že $a = b \cdot x$, pak čísla b a x jsou dělitelé čísla a a nazývají se **sdružení dělitelé čísla a.**

Pozn.

1. Každé celé číslo $a \neq 0, 1, -1$ má alespoň 4 celočíselné dělitele, a to čísla 1, a, -1, -a. Tyto dělitele nazýváme **samozřejmými děliteli čísla a.** (Ostatní dělitele, pokud existují, nazýváme nesamozřejmými.)
2. Čísla 1 a –1 mají právě dva dělitele v množině C, a to 1, -1.
3. Číslo 0 má nekonečně mnoho dělitelů, a to každé celé číslo.
4. Číslo 0 není dělitelem žádného nenulového čísla a, protože neexistuje žádné celé číslo x tak, aby platilo $0 \cdot x = a$.
5. Číslo 0 je dělitelem sebe sama (0|0), neboť pro libovolné celé číslo x platí $0 \cdot x = 0$.

Cvičení:

1. Doplňte:
   Číslo 10 má 12 dělitelů, jsou to čísla:
   Dvojice **sdružených dělitelů** čísla 10:
   Samozřejmí dělitelé čísla 10:
   Přirození dělitelé čísla 10 (to jsou dělitele čísla 10 patřící do množiny přirozených čísel):

2. Zjistěte, jaké vlastnosti má binární relace „dělitelnost celých čísel“, a tvrzení dokažte.

Věta 1.
Pro libovolná celá čísla a, b, c platí
a) $(b|a \wedge b|c) \Rightarrow (b|a+c \wedge b|a-c)$
b) $b|a \Rightarrow (-b)|a$
c) $b|a \Rightarrow b|(-a)$

Důkaz:

Pozn. Na základě části b) a c) uvedené věty můžeme dále pracovat jen v množině přirozených čísel. (Určíme-li přirozené dělitele přirozeného čísla a, umíme snadno určit všechny dělitele čísla a i čísla -a.).

Znaky dělitelnosti
jsou věty, které umožňují rozhodnout o dělitelnosti čísla jiným číslem bez provedení dělení, jen ze zápisu čísla
Ve všech dalších úvahách máme na mysli přirozená čísla zapsaná v desítkové soustavě.

1. Přirozené číslo a je dělitelné dvěma (pěti, deseti) právě tehdy, když je dvěma (pěti, deseti) dělitelné číslo, zapsané jeho cifrou nultého řádu.
2. Přirozené číslo a je dělitelné čtyřmi, právě když je čtyřmi dělitelné číslo zapsané jeho posledním dvojčíslím.
3. Přirozené číslo a je dělitelné osmi, právě když je osmi dělitelné číslo zapsané jeho posledním trojčíslím.
4. Přirozené číslo a je dělitelné třemi (devíti), právě když je třemi (devíti) dělitelný jeho ciferný součet. (Ciferný součet je součet všech čísel zapsaných jednotlivými číslicemi v zápisu čísla a)
5. Přirozené číslo a je dělitelné jedenácti, právě když je jedenácti dělitelný součet čísel zapsaných jednotlivými ciframi sudého řádu zmenšený o součet čísel zapsaných jednotlivými ciframi lichého řádu v zápisu čísla a.

Tyto znaky dělitelnosti plynou z obecnějších vět:

I. Dělíme-li přirozené číslo a dvěma (pěti, deseti) dostaneme stejný zbytek, jako když dělíme dvěma (pěti, deseti) číslo zapsané cifrou nultého řádu v zápisu čísla a.

II. Dělíme-li přirozené číslo a (aspoň trojciferné) čtyřmi, dostaneme stejný zbytek, jako když dělíme čtyřmi číslo zapsané jeho posledním dvojčíslím.

III. Dělíme-li přirozené číslo a (aspoň čtyřciferné) osmi, dostaneme stejný zbytek, jako když dělíme osmi číslo zapsané jeho posledním dvojčíslím.

IV. Dělíme-li přirozené číslo a třemi (devíti), dostaneme stejný zbytek, jako když dělíme třemi (devíti) jeho ciferný součet.

V. Dělíme-li přirozené číslo a jedenácti, dostaneme stejný zbytek, jako když dělíme jedenácti součet čísel zapsaných ciframi sudého řádu zmenšený o součet čísel zapsaných ciframi lichých řádů.

Důkazy vět I. – V. provedeme s využitím následující věty.

Věta 2.
Je-li celé číslo a součtem dvou celých čísel, z nichž jedno je násobkem celého čísla b, pak druhé dává při dělení číslem b stejný zbytek jako číslo a.

(Důkaz viz učebnice s. 185)

Def. 2 Přirozené číslo p>1 nazýváme **prvočíslem**, právě když má právě dva přirozené dělitele. Přirozené číslo a>1, které není prvočíslem (tj. má více než dva přirozené dělitele), nazýváme **složeným číslem.**

O tom, zda dané číslo je prvočíslo nebo složené číslo, můžeme rozhodnout pomocí tzv. Eratosthenova síta nebo podle věty 3.

Věta 3. Jestliže přirozené číslo a není dělitelné žádným prvočíslem menším nebo rovným $\sqrt{a}$, pak a je prvočíslo.

Př. Zjistěte, zda 173 je prvočíslo nebo složené číslo.
$\sqrt{173} \leq 14$, proto budeme zjišťovat, zda číslo 173 je dělitelné některým z prvočísel 2, 3, 5, 7, 11, 13. Číslo 173 není dělitelné žádným z těchto prvočísel, proto je prvočíslem.

Věta 4. Každé složené číslo a lze vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru součinu konečného počtu prvočísel

$$a = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$$

kde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ jsou prvočísla, $e_1, e_2, \ldots, e_k$ jsou nenulová přirozená čísla.
Tento zápis se nazývá **prvočíselný rozklad přirozeného čísla a** a $p_1, p_2, \ldots, p_k$ jsou tzv. **prvočinitele** rozkladu.

Př. $600 = 2^3 . 3^1 . 5^2$

Def. 3 **Společný dělitel** přirozených čísel a, b je každé přirozené číslo d, pro které platí d a a d b.

Def. 4 **Největší společný dělitel** přirozených čísel a, b je ten ze společných dělitelů, který je dělitelný všemi společnými děliteli. Označujeme **D(a,b).**

Pozn. V množině přirozených čísel lze též říci, že největší společný dělitel je největší (maximální) číslo ze společných dělitelů.

Def. 5 Přirozená čísla a, b se nazývají **nesoudělná,** právě když je jejich největší společný dělitel roven 1. D(a,b) = 1

Def. 6 Přirozená čísla a, b se nazývají **soudělná,** právě když je jejich největší společný dělitel větší než 1. D(a,b) > 1.

Def. 7 **Společný násobek** přirozených čísel a, b je každé přirozené číslo m, které je dělitelné oběma čísly a, b, tj. a m a b m.

Def. 8 **Nejmenší společný násobek** přirozených čísel a, b je ten ze společných násobků, který je dělitelem všech společných násobků čísel a, b. Označujeme **n(a,b).**
Pozn. V množině přirozených čísel lze též říci, že n(a,b) je nejmenší číslo z kladných společných násobků čísel a,b.

Pozn. Definice 3 – 8 lze rozšířit na libovolný konečný počet přirozených čísel $a_1, \ldots, a_n$.

Určování D(a,b) a n(a,b)

1) pomocí Euklidova algoritmu
2) z rozkladů čísel na součin prvočinitelů

ad 1) **Euklidův algoritmus** vychází z věty 7.1 (uč. na str. 189).
Podle této věty platí: Jestliže přirozené číslo **a** dává při dělení nenulovým přirozeným číslem **b** zbytek **z**, tj. $a = b.q + z$ a $z < b$, pak největší společný dělitel čísel a, b je roven největšímu společnému děliteli čísel b, z, tj. $D(a,b) = D(b,z)$.
Tím převádíme problém určení D(a,b) na určení D(b,z). Čísla b a z jsou menší než čísla a, b.

Př. Zjistěte D(268, 80)

268 : 80 = 3	neboli	268 = 80 . 3 + 28
28		
80 : 28 = 2		80 = 28 . 2 + 24
24		
28 : 24 = 1		28 = 24. 1 + 4
4		
24 : 4 = 6		24 = 6 . 4
0		

Největší společný dělitel čísel 268 a 80 je číslo 4, tj. poslední nenulový zbytek při postupném dělení.

Nejmenší společný násobek čísel a, b pak lze vypočítat podle věty 8.2 v učebnici na str. 191.
Věta 4: Pro každá **dvě** přirozená čísla a, b platí : **n(a,b) . D(a,b) = a . b**

ad 2) **Určení největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku z rozkladu daných čísel na součin prvočinitelů.**

Největší společný dělitel daných přirozených čísel je součinem všech prvočinitelů, kteří se současně vyskytují v prvočíselných rozkladech všech daných čísel, a to s nejmenším s vyskytujících se exponentů.

Nejmenší společný násobek daných čísel je součinem všech různých prvočinitelů, kteří se vyskytují v rozkladech daných čísel, a to v největší mocnině.

Př. Zjistěte D(108, 90) a n(108, 90).
$108 = 2^2 . 3^3$ $\quad 90 = 2 . 3^2 . 5$
$D(108, 90) = 2 . 3^2 = 18$
$n(108, 90) = 2^2 . 3^3 . 5 = 540$

Určení počtu všech přirozených dělitelů daného přirozeného čísla:
Věta 5: Je-li $a = p^{e1} . p^{e2} . \ldots . p^{ek}$ prvočíselný rozklad přirozeného čísla $a > 1$, pak počet všech přirozených dělitelů čísla a (ozn, $\vartheta(a)$) je určen takto:

$$\vartheta(a) = (e_1 + 1).(e_2 + 1). \ldots .(e_k + 1)$$

Všechny přirozené dělitele čísla a určíme jako všechny možné součiny prvočinitelů, přičemž každý prvočinitel, probíhá všechny mocniny od 0. po tu, ve které se vyskytují v rozkladu.

Př:

	3^0	3^1	3^2
$2^0 . 5^0$	1	3	9
$2^0 . 5^1$	5	15	45
$2^1 . 5^0$	2	6	18
$2^1 . 5^1$	10	30	90

$90 = 2 . 3^2 . 5$

$\vartheta(90) = (1+1) . (2+1) . (2+1) = 12$

Kongruence, rozklad na zbytkové třídy.

Věta: Nechť a, b jsou celá čísla taková, že $b \neq 0$. Potom existují celá čísla q, r splňující vztah:

$a = bq + r,\ 0 \leq r < |b|$, přičemž toto vyjádření je jednoznačné.

Poznámka: Je nutno si uvědomit, že zbytek r při dělení je vždy nezáporný, a to i při dělení záporným číslem. Např. a = –26, b = 8, q = –4, r = 6, protože –26 = 8 . (–4) + 6.

Poznámka: Celá čísla a, b jsou nesoudělná, je-li jejich největší společný dělitel roven jedné. V opačném případě se nazývají soudělná. Největší společný dělitel čísel a, b budeme označovat NSD(a, b), nejmenší kladný společný násobek NSN(a, b).

Eulerova funkce $\varphi(n)$ vyjadřuje počet přirozených čísel menších nebo rovných číslu n, nesoudělných s n. Nechť $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, pak platí $\varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^{k}(1 - \frac{1}{p_i})$. Je-li n prvočíslo, pak $\varphi(n) = n - 1$.

Kongruence: $a, b \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 2$. Platí $a \equiv b \Leftrightarrow m \mid (a - b)$. Čteme: Číslo a je kongruentní s číslem b podle modulu m. Dvě čísla kongruentní podle nějakého modulu m dávají při dělení tímto modulem m týž zbytek. Relace kongruence je ekvivalence na množině všech celých čísel (je reflexivní, symetrická a tranzitivní).

Vlastnosti kongruencí:

1) p prvočíslo $\quad a \equiv b \pmod{p^n} \Rightarrow a \equiv b \pmod{p}$

Platí-li kongruence podle modulu, který je mocninou prvočísla, platí i podle modulu rovného tomuto prvočíslu.

2) $a \equiv b \pmod{m_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k \Rightarrow a \equiv b \pmod{\mathrm{NSN}(m_1, \ldots, m_k)}$

Platí-li kongruence podle několika modulů, platí i podle modulu rovného nejmenšímu společnému násobku těchto modulů.

3) $a_i \equiv b_i \pmod{m}$, $i = 1, \ldots, k \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i \equiv \sum_{i=1}^{k} b_i \pmod{m}$, $\quad \prod_{i=1}^{k} a_i \equiv \prod_{i=1}^{k} b_i \pmod{m}$.

Kongruence podle téhož modulu lze sčítat i násobit.

Nechť v dalším platí $a \equiv b \pmod{m}$:

4) $a + x \equiv b + x \pmod{m}$, $\ a.y \equiv b.y \pmod{m}$

K oběma stranám kongruence lze přičíst stejné celé číslo a obě strany kongruence lze vynásobit týmž celým číslem. **Obecně ale nelze obě strany kongruence dělit týmž celým číslem,** např. $24 \equiv 40 \pmod{8}$, ale po vydělení čtyřmi $6 \not\equiv 10 \pmod{8}$.

5) $m \mid z \Rightarrow a + z \equiv b \pmod{m}$

Celé číslo, které je násobkem modulu, lze přičíst pouze k jedné straně kongruence.

6) $a^n \equiv b^n \pmod{m}$

Obě strany kongruence lze umocnit na libovolný přirozený exponent.

7) $d \mid a \wedge d \mid b \wedge \mathrm{NSD}(d, m) = 1 \Rightarrow \dfrac{a}{d} \equiv \dfrac{b}{d} \pmod{m}$

Obě strany kongruence lze vydělit celým číslem nesoudělným s modulem.

8) $ac \equiv bc \pmod{mc}$

Obě strany kongruence i modul lze vynásobit týmž celým kladným číslem.

9) $e \mid a \wedge e \mid b \wedge e \mid c \Rightarrow \dfrac{a}{e} \equiv \dfrac{b}{e} \pmod{\dfrac{m}{e}}$

Obě strany kongruence i modul lze vydělit týmž celým kladným číslem různým od nuly.

10) $a \equiv b \pmod{m} \wedge d \mid m \Rightarrow a \equiv b \pmod{d}$

Platí-li kongruence podle modulu m, platí i podle modulu rovného libovolnému kladnému děliteli čísla m, většímu než jedna.

Eulerova věta: $m \in \mathbf{N}$, $m > 1$, $a \in \mathbf{Z}$, $\mathrm{D}(a,m) = 1$, pak $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.
Je-li specielně p prvočíslo, které není dělitelem čísla a, pak platí $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (tzv. malá Fermatova věta).

Definice.
Nechť m je pevné přirozené číslo. Označme:

$$C_i = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ dává po dělení číslem } m \text{ zbytek } i \}, \quad \text{pro } i = 0, 1, \ldots, m-1$$

Pak množina C_i se nazývá **zbytková třída** podle modulu m. Symbolem $\mathbb{Z}_m$ se označí **množina všech zbytkových tříd podle modulu** m, tzn. $\mathbb{Z}_m = \{C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}\}$.

Poznámka.
Někdy bude technicky výhodnější přeformulovat definici zbytkové třídy C_i do ekvivalentního tvaru:

$$C_i = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv i \pmod{m} \}, \qquad \text{pro } i = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Ekvivalentnost vyjádření okamžitě plyne z věty , uvědomíme-li si zřejmý fakt, že číslo i, kde $0 \le i \le m-1$, dává po dělení číslem m zbytek i.

Z věty o dělení se zbytkem celých čísel plyne, že zbytkových tříd podle modulu m musí být opravdu právě m (neboť zbytek po dělení každého celého čísla číslem m musí podle této věty nabývat právě jedné z hodnot $0, 1, \ldots, m-1$). Dále, každá zbytková třída podle modulu m obsahuje zřejmě nekonečně mnoho celých čísel, lišících se o nějaký celočíselný násobek modulu m. Pokusíme-li se schematicky zapsat jednotlivé zbytkové třídy podle modulu m, dostaneme:

$$\begin{array}{lcl}
C_0 & = & \{ \ldots, \ -2m, \ -m, \ 0, \ m, \ 2m, \ \ldots \} \\
C_1 & = & \{ \ldots, \ -2m+1, \ -m+1, \ 1, \ m+1, \ 2m+1, \ \ldots \} \\
C_2 & = & \{ \ldots, \ -2m+2, \ -m+2, \ 2, \ m+2, \ 2m+2, \ \ldots \} \\
\vdots & & \\
C_{m-1} & = & \{ \ldots, \ -m-1, \ -1, \ m-1, \ 2m-1, \ 3m-1, \ \ldots \}
\end{array}$$

Věta

Nechť m je pevné přirozené číslo. Pak množina $\mathbb{Z}_m$ všech zbytkových tříd podle modulu m tvoří rozklad na množině $\mathbb{Z}$ všech celých čísel.

Důkaz.

Uvažme množinu zbytkových tříd $\mathbb{Z}_m = \{C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}\}$.

dokážeme, že $\mathbb{Z}_m$ je rozklad na $\mathbb{Z}$.

1. každá ze zbytkových tříd C_i je zřejmě neprázdnou podmnožinou v $\mathbb{Z}$.
2. nechť $C_i, C_j \in \mathbb{Z}$ a $C_i \cap C_j \neq \emptyset$. Potom existuje číslo $x \in C_i \cap C_j$, což znamená, že x dává po dělení číslem m zbytek i a současně také zbytek j. Ale z věty o dělení celých čísel se zbytkem víme, že zbytek po dělení je určen jednoznačně, tzn. $i = j$, odkud dostáváme, že $C_i = C_j$.
3. zřejmě platí, že sjednocení $C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_{m-1} = \mathbb{Z}$.

Užití kongruencí na příkladech

(1) Dokažte, že mezi 82 libovolně zvolenými přirozenými čísly existují dvě, jejichž rozdíl je dělitelný číslem 81.

Ř: $Z_{81} = \{C_0, \ldots, C_{80}\}$, tzn. existuje 81 zbytkových tříd podle modulu 81. Čísel je ale 82, tj. alespoň dvě musí ležet ve stejné zbytkové třídě. Pak je jejich rozdíl dělitelný 81.

---

2) Dokažte, že každé prvočíslo větší než tři lze zapsat ve tvaru $6k+1$ nebo $6k+5$.

Ř: Platí: $Z_6 = \{C_0, \ldots, C_5\}$. Prvočíslo $p > 3$ je celé číslo, musí tedy ležet v některé třídě Z_6. Postupně je probereme:

C_0: $p = 6k$ není prvočíslo

C_1: $p = 6k+1$

C_2: $p = 6k+2 = 2(3k+1)$ složené č.

C_3: $p = 6k+3 = 3(2k+1)$ složené

C_4: $p = 6k+4 = 2(3k+2)$ složené

C_5: $p = 6k+5$

Vyloučením C_0, C_2, C_3, C_4 plyne, že $p \in C_1$ nebo $p \in C_5$.

---

3) Nalezněte poslední dvě číslice čísla 3^{1234}.

Ř: Řešíme $3^{1234} \equiv x \pmod{100}$

Všechny kongruence dále platí mod 100.

Užijeme Eulerovu větu. Platí $\varphi(100) = 40$, protože

$100 = 2^2 \cdot 5^2$, tedy $\varphi(100) = 100 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{5}\right) = 40$;

platí $3^{40} \equiv 1 \pmod{100}$; umocníme na exponent 30:

(*) $\quad 3^{1200} \equiv 1 \pmod{100}$.

nyní $3^2 \equiv 9 \pmod{100}$, $3^4 \equiv 81 \pmod{100}$, $3^8 \equiv 81^2 \equiv 61 \pmod{100}$

pak $3^{32} \equiv 61^4 \equiv 41 \pmod{100}$;

nyní kongruence $3^2 \equiv 9 \pmod{100}$ a $3^{32} \equiv 41 \pmod{100}$

vynásobíme: (**) $\quad 3^{34} \equiv 369 \pmod{100}$,

tedy $3^{34} \equiv 69 \pmod{100}$;

kongruence (*), (**) vynásobíme: $3^{1234} \equiv 69 \pmod{100}$

tedy číslo 3^{1234} končí na 69.

---

(4) Dokažte, že $13 \mid (2^{60} + 7^{30})$

Ř: Eulerova věta: $2^{12} \equiv 1 \pmod{13} \Big|^5$ $\qquad \varphi(13) = 12$

(*) $\quad 2^{60} \equiv 1 \pmod{13}$

Eulerova věta: $7^{12} \equiv 1 \pmod{13} \Big|^2$

$\boxed{7^{24} \equiv 1 \pmod{13}}$;

dále $7^3 \equiv 5 \pmod{13}$, $7^6 \equiv 25 \pmod{13}$, tj. $\boxed{7^6 \equiv -1 \pmod{13}}$

kongruence v rámečcích vynásobíme: $7^{30} \equiv -1 \pmod{13}$ (**)

Obě kongruence (*), (**) sečteme: $2^{60} + 7^{30} \equiv 0 \pmod{13}$

tedy $13 \mid (2^{60} + 7^{30})$.

---

(5) Dokažte, že platí: $\forall n \in \mathbb{N}: \; 7 \mid (37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n)$

Ř: $37 \equiv 2 \pmod 7$ | $16 \equiv 2 \pmod 7$ | $23 \equiv 2 \pmod 7$

$37^{n+2} \equiv 2^{n+2} \pmod 7$ | $16^{n+1} \equiv 2^{n+1} \pmod 7$ | $23^n \equiv 2^n \pmod 7$

...ongruence ve spodním řádku sečteme:

$$37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n \equiv 2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^n \pmod 7,$$

ale $2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^n = 7 \cdot 2^n$, tedy $2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^n \equiv 0 \pmod 7$.

Relace kongruence je tranzitivní, tedy také

$$37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n \equiv 0 \pmod 7.$$

) Dokažte, že některý násobek čísla 21 končí na 241.

Ř:

$21n \equiv 241 \pmod{1000}$ | + 2000 na pravou stranu

$21n \equiv 2241 \pmod{1000}$ | : 3

$7n \equiv 747 \pmod{1000}$ | + 5000 na pravou stranu

$7n \equiv 5747 \pmod{1000}$ | : 7

$\underline{\underline{n \equiv 821 \pmod{1000}}}$

Tedy $n = 1000k + 821$.

Zk:

```
  4821        29821
   ·21          ·21
  4821        29821
 9642        59642
101241       626241
```

atd.

Dělitelnost celých čísel – cvičení

1) Určete vlastnosti relace dělitelnosti v množině všech celých čísel.

2) Dokažte:
   a) Součet každých dvou sudých čísel je sudé číslo.
   b) Součet každých dvou lichých čísel je sudé číslo.
   c) Součet libovolného sudého a libovolného lichého čísla je liché číslo.
   d) Součin každých dvou sudých čísel je dělitelný čtyřmi.
   e) Součin každých dvou lichých čísel je liché číslo.
   f) Součin libovolného sudého a libovolného lichého čísla je sudé číslo.
   g) Součet tří po sobě jdoucích mocnin čísla 2 (počínaje mocninou 2^1) je dělitelný sedmi.

3) Dokažte:
   a) Druhá mocnina každého lichého čísla zmenšená o 1 je dělitelná osmi.
   b) Rozdíl druhých mocnin dvou libovolných lichých čísel je dělitelný osmi.
   c) Součet tří po sobě následujících čísel, z nichž prostřední je sudé, je dělitelný šesti.

4) Nejsou-li čísla a, b dělitelná třemi, je vždy jedno z čísel $a + b$, $a - b$ dělitelné třemi. Dokažte.

5) O pěticiferném čísle 448**, jehož poslední dvě cifry neznáme, víme, že je dělitelné 3 a 25. Doplňte chybějící cifry.

6) V číslech 437*, 32*, 4*54 nahraďte *, pokud je to možné, takovou cifrou, aby vzniklé číslo bylo dělitelné: a) čtyřmi, b) osmi, c) devíti, d) jedenácti.

7) Dokažte kritérium dělitelnosti čtyřmi, osmi a devíti.

8) Rozhodněte, zda čísla a) 4356, b) 8724 jsou dělitelná čísly 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11. Pokud nejsou dělitelná uvažovaným číslem, určete zbytek, který vznikne při dělení tímto číslem.

9) Zjistěte, která z čísel 331, 593, 799, 1007, 1009 jsou prvočísla.

10) Dokažte, že každé prvočíslo větší než 3 je možno vyjádřit buď ve tvaru 6k+1 nebo ve tvaru 6k+5, kde k je přirozené číslo.

11) Určete všechny společné dělitele čísel: a) 60, 36 b) 48, 72, 0 c) 24, −132, 54

12) Určete všechny přirozené dělitele čísel 68, 360, 504.

13) Určete počet všech přirozených dělitelů čísel 420, 824, 2047.

14) Určete různými způsoby: a) D(455, 273) b) D(360, 504) c) D(90, 108, 84) d) D(568, 426, 355)

15) K číslu $a = 51$ najděte číslo b tak, aby $D(a, b) = 17$.

16) Najděte dvě přirozená čísla, jejichž součet je 432 a největší společný dělitel je 36.

17) Největší společný dělitel dvou přirozených čísel je 24. Jedno z nich je dvojnásobkem druhého. Která jsou to čísla?

18) Napište libovolné tři společné násobky čísel: a) 5, 12 b) 17, 0 c) –6, 8, 17

19) Určete různými způsoby: a) n(222, 185) b) n(360, 504) c) n(90, 108, 84) d) n(156, 182, 208)

20) Zjistěte, zda platí: n[64, D(60,42)] = D[n(30,64), n(42,64)]

21) Najděte přirozená čísla a, b, je-li: a) $D(a,b) = 2$, $n(a,b) = 12$ b) $D(a,b) = 7$, $n(a,b) = 22$

22) Určete nejmenší nenulové přirozené číslo, kterým je třeba násobit
a) číslo 1224, abychom dostali druhou mocninu přirozeného čísla
b) číslo 600, abychom dostali třetí mocninu přirozeného čísla.

23) Připíšeme-li k libovolnému trojcifernému číslo totéž číslo zprava, dostaneme šesticiferné číslo, které je dělitelné sedmi, jedenácti a třinácti. Dokažte.

24) Dokažte, že čísla 353 535, 424 242, 666 666, tj čísla tvaru *ababab*, jsou dělitelná čísly 3, 7, 13 a 37.

25) Obdélník o rozměrech 56cm a 98cm se má rozdělit příčkami rovnoběžnými se stranami obdélníku na čtverce co možná největší. Kolik bude čtverců a jak velká bude jejich strana?

26) V krabici jsou tužky. Víme, že je jich více než 200 a méně než 300 a že se dají svázat do svazků po 10 a po 12. Kolik je v krabici tužek?

27) Řešte neurčité rovnice: a) $-3x + 7y = 4$ b) $6x - 22y = 12$ c) $-14x - 3y = 10$ d) $5x - 3y = 15$

28) Kolika způsoby můžeme vyplatit 69 Kč pouze dvoukorunovými a pětikorunovými mincemi?

29) Určete největší (nejmenší) trojciferné číslo, které při dělení třemi dává zbytek 2 a při dělení sedmi dává zbytek 5.

30) Číslo 91 rozložte na součet dvou sčítanců, z nichž jeden je dělitelný pěti a druhý devíti.

31) Alenka si chce za 50 Kč koupit lízátka a žvýkačky. Lízátko stojí 4 Kč, žvýkačka 6 Kč. Kolik lízátek a kolik žvýkaček může Alenka koupit, chce-li utratit celou padesátikorunu?

32) Rozdíl dvou přirozených čísel, z nichž první je dělitelné čísle 23, druhé číslem 29, je roven 1. Určete nejmenší taková kladná čísla.

33) Ve třídě je více než 20 žáků a méně než 30 žáků. Vytvoří-li žáci ve třídě čtveřice, jeden žák zbude, vytvoří-li trojice, zbudou dva žáci. Kolik žáků je ve třídě?

Poziční číselné soustavy - počítání po jedné

Základ / Číslo	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	10	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	11	10	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	100	11	10	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	101	12	11	10	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	110	20	12	11	10	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	111	21	13	12	11	10	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	1000	22	20	13	12	11	10	8	8	8	8	8	8	8	8
9	1001	100	21	14	13	12	11	10	9	9	9	9	9	9	9
10	1010	101	22	20	14	13	12	11	10	A	A	A	A	A	A
11	1011	102	23	21	15	14	13	12	11	10	B	B	B	B	B
12	1100	110	30	22	20	15	14	13	12	11	10	C	C	C	C
13	1101	111	31	23	21	16	15	14	13	12	11	10	D	D	D
14	1110	112	32	24	22	20	16	15	14	13	12	11	10	E	E
15	1111	120	33	30	23	21	17	16	15	14	13	12	11	10	F
16	10000	121	100	31	24	22	20	17	16	15	14	13	12	11	10
17	10001	122	101	32	25	23	21	18	17	16	15	14	13	12	11
18	10010	200	102	33	30	24	22	20	18	17	16	15	14	13	12
19	10011	201	103	34	31	25	23	21	19	18	17	16	15	14	13
20	10100	202	110	40	32	26	24	22	20	19	18	17	16	15	14
21	10101	210	111	41	33	30	25	23	21	1A	19	18	17	16	15
22	10110	211	112	42	34	31	26	24	22	20	1A	19	18	17	16
23	10111	212	113	43	35	32	27	25	23	21	1B	1A	19	18	17
24	11000	220	120	44	40	33	30	26	24	22	20	1B	1A	19	18
25	11001	221	121	100	41	34	31	27	25	23	21	1C	1B	1A	19
26	11010	222	122	101	42	35	32	28	26	24	22	20	1C	1B	1A
27	11011	1000	123	102	43	36	33	30	27	25	23	21	1D	1C	1B
28	11100	1001	130	103	44	40	34	31	28	26	24	22	20	1D	1C
29	11101	1002	131	104	45	41	35	32	29	27	25	23	21	1E	1D
30	11110	1010	132	110	50	42	36	33	30	28	26	24	22	20	1E
31	11111	1011	133	111	51	43	37	34	31	29	27	25	23	21	1F
32	100000	1012	200	112	52	44	40	35	32	2A	28	26	24	22	20
33	100001	1020	201	113	53	45	41	36	33	30	29	27	25	23	21
34	100010	1021	202	114	54	46	42	37	34	31	2A	28	26	24	22
35	100011	1022	203	120	55	50	43	38	35	32	2B	29	27	25	23
36	100100	1100	210	121	100	51	44	40	36	33	30	2A	28	26	24
37	100101	1101	211	122	101	52	45	41	37	34	32	2B	29	27	25
38	100110	1102	212	123	102	53	46	42	38	35	32	2C	2A	28	26
39	100111	1110	213	124	103	54	47	43	39	36	33	30	2B	29	27
40	101000	1111	220	130	104	55	50	44	40	37	34	31	2C	2A	28

Přímé převody zápisů čísel

z = 2	z = 4
00	0
01	1
10	2
11	3

z = 2	z = 8
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

z = 2	z = 16
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

z = 4	z = 16
00	0
01	1
02	2
03	3
10	4
11	5
12	6
13	7
20	8
21	9
22	A
23	B
30	C
31	D
32	E
33	F

z = 3	z = 9
00	0
01	1
02	2
10	3
11	4
12	5
20	6
21	7
22	8