

Úkoly domácí

podzim 2010, MA2BP_CGE

V eukleidovském prostoru máme dány krychli $ABCDEFGH$ s hranou délky 1 m. Body P a Q na hranách krychle jsou dány dělicími poměry $(PGC) = (QEH) = 5$. Rovinu, vzhledem k níž jsou body P a Q navzájem souměrné, označíme σ . Zvolte vhodně souřadnou soustavu a vhodně řešte následující úlohy.

1. Určete rovnici roviny σ a řez této roviny s krychlí, tj. průsečíky roviny σ s hranami krychle.
2. V závislosti na parametru $j \in \mathbb{R}$ rozhodněte o vzájemné poloze roviny σ a přímky $p = HJ$, kde $J = jG + (1 - j)C$.
3. Určete kolmou projekci přímky $p = CG$ do roviny σ a odchylku $\angle(p, \sigma)$.
4. Určete obsah mnohoúhelníku řezu roviny σ s krychlí a objem části krychle vymezené rovinou σ a vrcholem G .
5. Určete transformační rovnice kolmé projekce do roviny σ a kolmý průmět bodu G .

Bonus. Vyjádřete posunutí ve směru vektoru \overrightarrow{DF} jako složení dvou (a) rotací, (b) symetrií podle rovin, (c) stejnoolehlostí, (d) elací.

Další bonus. V eukleidovském prostoru \mathbb{E}^4 jsou dány roviny ρ a τ , jejichž zaměření jsou

$$Z(\rho) = \langle (1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1) \rangle, \quad Z(\tau) = \langle (1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0) \rangle.$$

Dokažte, že $Z(\rho)$ a $Z(\tau)$ mají nulový průnik a určete

- matici kolmé projekce $f : Z(\rho) \rightarrow Z(\tau)$ vzhledem k vhodným bázím,
- matici kolmé projekce $g : Z(\tau) \rightarrow Z(\rho)$ vzhledem k vhodným bázím,
- charakteristická čísla složeného zobrazení $f \circ g : Z(\tau) \rightarrow Z(\tau)$,
- odchylku rovin $\angle(\rho, \tau)$.

Poznámky.

Dělicí poměr (ABC) tří kolineárních bodů je reálné číslo d jednoznačně určené rovností $\overrightarrow{AC} = d \cdot \overrightarrow{BC}$, neboli $A = C + d \cdot \overrightarrow{CB}$, tj. $A = (1 - d)C + dB, \dots$

Všechny příklady jsou hodnoceny 6 body, celkem lze tedy řešením úloh získat 30 (+6 bonusových) bodů a stejně tak za písemky během semestru; k zápočtu je požadováno alespoň $\frac{2}{3}(30 + 30) = 40$ bodů.

Řešení domácích úloh může být diskutováno ve skupině nebo s cvičícím, nicméně zpracování musí být originální se zřejmým pochopením problému a srozumitelným postupem řešení. Úlohy vykazující přílišnou podobnost s některou dříve odevzdanou prací nebudou hodnoceny!