

# ÚHEL A JEHO VELIKOST

Růžena Blažková

POJMY a dovednosti

Úhel, vrchol úhlu, ramena úhlu. Klasifikace úhlů (úhel konvexní, nekonvexní, úhel ostrý, pravý, tupý, přímý, plný, nulový).

Přenášení úhlu k dané polopřímce do dané poloroviny. Porovnávání úhlů. Shodnost úhlů. Grafický součet úhlů. Grafický rozdíl úhlů. Násobek úhlu.

Osa úhlu, její konstrukce.

Dvojice úhlů: úhly styčné, vedlejší vrcholové, souhlasné, střídavé.

Velikost úhlu. Měření úhlů, úhloměř. Jednotky velikosti úhlu – radián, stupeň.

Rýsování úhlu dané velikosti – pomocí úhloměru i pomocí kružítka (některé úhly).

## Definice 1.

Jsou dány tři různé body A, B, V, které neleží v jedné přímce. Konvexním úhlem AVB nazýváme průnik poloroviny AVB a poloroviny BVA.

Symbolicky:  $\angle VB = \rightarrow AVB \cap \rightarrow BVA$

Jestliže body A, B, V leží v jedné přímce a bod V leží mezi body A, B, pak konvexním úhlem AVB nazýváme každou polorovinu s hraniční přímkou AB. Úhel AVB se nazývá úhel přímý.

Jestliže body A, B, V leží v jedné přímce a bod A leží mezi body V, B, pak konvexním úhlem AVB nazýváme

- každou rovinu, obsahující přímkou AB – úhel AVB je úhel plný
- polopřímku VA – úhel AVB je úhle nulový.

## Definice 2.

Jsou dány tři různé body A, B, V, které neleží v jedné přímce. Neconvexním úhlem AVB nazýváme sjednocení polorovin opačných k polorovinám AVB a BVA.

Symbolicky:  $\angle AVB = \leftarrow AVB \cup \leftarrow BVA$

## Definice 3

Jsou dány tři různé body A, B, V, které neleží v jedné přímce. Konvexním úhlem AVB rozumíme množinu všech bodů X roviny  $\rho$ , které leží na všech polopřímkách VY, kde bod Y leží na úsečce AB.

Symbolicky:  $\angle AVB = \{ X \in \rho, X \in Y \wedge Y \in AB \}$

Úhly označujeme také písmeny řecké abecedy, např.  $\alpha, \beta, \omega, \varphi$  aj.

*Poznámka:* V uvedených definicích je úhel chápán ve smyslu rovinného úhlu. V budoucnu se mohou žáci setkat s dalšími významy úhlu, jako je např. úhel otočení, orientovaný úhel, prostorový úhel aj.

## Školská matematika

Rámcový vzdělávací program:

Očekávané výstupy:

Žák

- zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů, využívá potřebnou matematickou symboliku.
- Charakterizuje a třídí základní rovinné útvary - úhly.
- Určuje velikost úhlu měřením a výpočtem.
- Načrtne a sestrojí úhel.

### Motivace:

Při zavádění pojmu úhel vyhledáváme co nejvíce reprezentací tohoto pojmu v praxi, např.:

Úhel hodinových ručiček, úhel stoupání, úhel klesání, střelecký úhel, úhel dopadu, úhel odrazu, aj.

### Úhel

Ve školské matematice se úhel zavádí pomocí dvou polopřímek se společným počátkem.

Dvě polopřímky VA a VB určují v rovině dva úhly – jeden konvexní a jeden nekonvexní. Rozlišují se buď barevně nebo pomocí jednoho vnitřního bodu daného úhlu.

Bod V se nazývá vrchol úhlu AVB, polopřímky VA a VB se nazývají ramena úhlu AVB.

Toto intuitivní zavedení je možné doplnit ukázkou, kdy se konvexní úhel uvádí jako společná část dvou polorovin (viz definice 1), např. pomocí dvou barevných průsvitných fólií.

### Osa úhlu

Osa úhlu AVB je přímka, která prochází vrcholem úhlu a dělí úhel na dva shodné úhly.

*Poznámka:* V případě konvexního úhlu se někdy osou úhlu rozumí polopřímka VX – zejména v případě, kdy osou úhlu rozumíme množinu všech bodů daného úhlu, které mají od obou ramen úhlu sobě rovné vzdálenosti.

Pomocí osy úhlu přímého můžeme vyvodit pojem úhlu pravého a následně uvést klasifikaci úhlů (zatím bez velikosti úhlu) vzhledem k úhlu pravému:

Úhel ostrý – menší než úhel pravý

Úhel pravý

Úhel tupý – větší než úhel pravý a menší než úhel přímý

Úhel přímý.

Poznamenejme, že pravý úhel vytyčovali staří Egypťané pomocí provazců s uzly. Pravý úhel se definuje jako úhel, který je shodný se svým úhlem vedlejším.

### Dvojice úhlů

**Úhly styčné** – jsou takové dva úhly, které mají společný vrchol a jedno rameno.

**Úhly vedlejší** – jsou takové dva úhly, které mají společný vrchol a jedno rameno a druhá ramena úhlů leží na opačných polopřímkách. Sjednocením vedlejších úhlů je úhel přímý.

**Úhly vrcholové** – jsou takové dva úhly, které mají společný vrchol a jejich ramena leží na opačných polopřímkách. Vrcholové úhly jsou shodné.

## Úhly souhlasné a střídavé

Jsou dány dvě různoběžné přímky  $a$ ,  $b$  a přímka  $p$ , které obě přímky protíná (tzv. příčka).

**Souhlasné úhly** jsou takové úhly, které leží v téže polorovině určené přímkou  $p$  (v této polorovině mají oba úhly jedno z ramen) a průnikem jejich druhých ramen je polopřímka. Pokud jsou přímky  $a$ ,  $b$  rovnoběžné, jsou odpovídající si souhlasné úhly shodné.

**Střídavé úhly** jsou takové úhly, které leží v opačných polorovinách s hranicí  $p$ , průnikem jejich ramen je buď úsečka nebo je průnik prázdný.

Pokud jsou přímky  $a$ ,  $b$  rovnoběžné, jsou střídavé úhly shodné.

*Poznámka 1.* Dětem definice nesdělujeme, avšak pomocí obrázku vytvoříme pojmy v duchu správných definic.

*Poznámka 2:* Dvojic úhlů střídavých nebo souhlasných užíváme zejména v případě, chceme-li dokázat rovnoběžnost přímek.

### Úkoly pro studenty:

1. Ke všem výše uvedeným definicím a pojmům narýsujte obrázky.
2. Popište přesně, jak se přenáší daný úhel k dané polopřímce do dané poloroviny
  - a) modelováním pomocí papírových modelů,
  - b) konstrukčně pomocí kružítka.
3. Popište přesně, jak porovnáváme úhly
  - a) modelováním pomocí papírových modelů,
  - b) konstrukčně pomocí kružítka.
4. Definiujte shodnost úhlů a uveďte její vlatnosti.
5. Pokuste se vytýčit pravý úhel pomocí provázku s uzly, podobně, jak to prováděli staří Egypťané.
6. Popište přesně konstrukci osy úhlu pomocí kružítka.
7. Uveďte několik příkladů, jak můžeme pomocí osy úhlu narýsovat úhly různých velikostí.
8. Uveďte alespoň jeden příklad, kde se můžete setkat v praxi s dvojicemi úhlů.
9. Uveďte alespoň jeden příklad, kdy využijete dvojic úhlů souhlasných nebo střídavých k důkazu rovnoběžnosti přímek.
10. Popište přesně, jak provádíme grafický součet dvou úhlů. Uveďte praktické využití.
11. Popište přesně, jak provádíme grafický rozdíl dvou úhlů. Uveďte praktické využití.
12. Popište, jak narýsujete určitý násobek daného úhlu.

## VELIKOST ÚHLU

Pro to, aby bylo možné měřit úhly, potřebujeme jednak jednotku, jednak určité měřidlo. Jednotkou je vhodně zvolený úhel, měřidlem je zpravidla úhloměr.

Podnět k měření úhlů daly astronomické práce starých Babyloňanů, kteří rozdělili plný úhel na  $360^\circ$ , tj. jednotek úhlové míry. Z Babylonie se kolem roku 200 dostalo dělení úhlu na  $360^\circ$  do Alexandrie.

Velikost rovinného úhlu se odvozuje z délky oblouku  $AB$  na jednotkové kružnici.

Úhel AVB má velikost **1 radián** (1 rad), jestliže oblouk AB je dlouhý 1 m a leží-li na kružnici o poloměru 1 m (míra oblouková). Radián je základní jednotkou pro měření velikosti úhlu v soustavě SI.

Úhel AVB má velikost **1 stupeň**, jestliže je oblouk AB dlouhý ( $\pi : 180$ ) m a leží-li na kružnici o poloměru 1 m (míra stupňová).

Název stupeň pochází z latinského gradus (schody, žebřík).

Minuta pochází z latinského pars minutae primae, což jsou části prvního dělení.

Vteřina – sekunda – z latinského pars minutae secundae – části druhého dělení.

Převodní vztah mezi radiány a stupni:  $1 \text{ rad} = 58^\circ 17' 45''$ .

Převodní vztah mezi stupni, úhlovými minutami a úhlovými vteřinami:

$$1^\circ = 60' = 3600''$$

*Poznámka:* Označení sekunda se používá k označení jednotky času, označení vteřina se používá k označení jednotky velikosti úhlu (soustava SI).

Velikost úhlu zapisujeme symbolicky  $|\sphericalangle AVB|$  nebo písmeny řecké abecedy  $\alpha, \beta, \delta$ , aj.

Pozor: je nutné rozlišovat pojmy úhel – jako část roviny a velikost úhlu – jako číslo s příslušnou jednotkou.

Ve školské matematice se většinou uvádí  $1^\circ$  jako jedna devadesátina úhlu pravého.

Úhly měříme úhломěrem

Úhломěr má zpravidla dvě stupnice – vnější a vnitřní, které jsou vyznačeny na půlkružnicích vždy od  $0^\circ$  do  $180^\circ$ . Střed půlkružnic se současně středem úhломěru.

Podle velikosti klasifikujeme úhly:

Název úhlu	nulový	ostrý	pravý	Tupý	přímý	nekonvexní	plný
velikost	$0^\circ$	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$90^\circ$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$180^\circ$	$180^\circ < \alpha < 360^\circ$	$360^\circ$

*Poznámka:* Kromě radiánů a stupňů se užívaly a užívají i jiné jednotky, např.

V období Velké francouzské revoluce se byl pravý úhel rozdělen na 100 dílků a jeden díl se nazýval grad, menší jednotky byly decigrad, centigrad, miligrad. Desetinného dělení se užívá i v zeměměřičství a ve vojenství.

Dáje se užívá tzv. dělostřelecký dílec, což je jedna třítisícina přímého úhlu.

Pod pojmem „dílec“ se rozumí zorný úhel, pod nímž je vidět tyč výšky 1 m na vzdálenost 1 km.

Na středních školách se studenti seznamují s dalšími pojmy, jako je např. orientovaný úhel neb prostorový úhel.

**Úkoly pro studenty:**

1. Popište, jak se užívá úhломěru k měření velikosti daného úhlu (pro úhel ostrý, pro úhel tupý, pro úhel větší než  $180^\circ$  a menší než  $360^\circ$ ).
2. Vysvětlete přesně, jak se používá úhломěr k rýsování úhlu dané velikosti.
3. Vysvětlete, jak se sčítají velikosti úhlů, např.  $36^\circ 47' + 57^\circ 38'$ .
4. Vysvětlete, jak se odčítají velikosti úhlů, např.  $85^\circ 23' - 39^\circ 48'$ .
5. Vypočítejte násobek velikosti úhlu, např.  $3 \cdot 29^\circ 45'$ .
6. Vysvětlete dělení velikosti úhlu dvěma.

7. Narýsujte úhel velikosti  $135^\circ$  a pomocí kružítka jej rozdělte na čtyři shodné úhly.  
Určete velikost každého z úhlů.
8. Narýsuje úhel velikosti  $250^\circ$  a narýsujte jeho osu.