DIDAKTIKA MATEMATIKY

GEOMETRIE – PLANIMETRIE

Úlohy k rozvoji geometrické představivosti
Úlohy početní a důkazové

Růžena Blažková, Irena Sytařová

Brno 2007

1. Základní pojmy

1. Zvolte si čtyři různé body v rovině.
   a) Kolik různých přímek je těmito body určeno?
   b) Jak se mění počet přímek v závislosti na poloze zvolených bodů?

2. Jakou vzájemnou polohu mohou mít tři různé přímky v rovině? Najděte všechny možnosti.
   a) Kolik různých průsečíků může vzniknout?
   b) Na kolik oblastí rozdělí tři různé přímky rovinu?

3. Jakou vzájemnou polohu mohou mít čtyři různé přímky v rovině?
   a) Kolik různých průsečíků jimi může být určeno?
   b) Na kolik oblastí rozdělí rovinu?

4. Jakou vzájemnou polohu mohou mít dvě různé polopřímky v rovině?

5. Zvolte si 5 různých bodů A, B, C, D, E tak, aby ležely na jedné přímce. Kolik různých úseček je těmito body určeno ?

6. Kolik různých přímek je určeno *k* body v rovině, jestliže žádné tři body neleží v téže přímce?

7. Kolik úseček je určeno *k* body v rovině, jestliže
   a) všechny body leží na jedné přímce
   b) žádné dva body neleží na jedné přímce.

8. Jaký útvar může vzniknout jako společná část
   a) dvou úseček
   b) dvou polopřímek
   c) dvou přímek ?

9. Jaký útvar může vzniknout jakou společná část (průnik) dvou konvexních úhlů?

10. Jaký útvar může vzniknout jako průnik dvou trojúhelníků?

11. Nakreslete:
   a) dva čtverce, abyste viděli tři čtverce,
   b) tři čtverce, abyste viděli sedm čtverců,
   c) dva obdélníky, abyste viděli pět obdélníků,
   d) dva obdélníky, abyste viděli osm obdélníků
   e) dva trojúhelníky, abyste viděli pět trojúhelníků,
   f) dva trojúhelníky, abyste viděli osm trojúhelníků,
   g) dva čtverce, abyste viděli osm trojúhelníků a jeden osmiúhelník.

12. Narýsujte libovolný čtyřúhelník a rozdělte jej posupně na 2, 3, 4, 5, 6 trojúhelníků.

13. Narýsujte libovolný trojúhelník. Kolik způsoby jej můžete rozdělit na 3 trojúhelníky?

14. Narýsujte libovolný obdélník a rozdělte jej na 13 shodných částí.

2. Úlohy o úhlech a trojúhelníku

1. Ověřte a zdůvodněte, proč platí:
   a) Osy dvou vedlejších úhlů jsou polopřímky na sebe kolmé.
   b) Osy dvou vrcholových úhlů jsou polopřímky navzájem opačné.

2. Na ose konvexního úhlu EFG leží bod H tak, že přímky EH a FG jsou rovnoběžné. Ověřte (dokažte), že úsečky EF a EH jsou shodné.

3. Jeden vnitřní úhel rovnoramenného trojúhelníku má velikost 76°. Vypočítejte velikosti ostatních vnitřních úhlů a velikosti vnějších úhlů trojúhelníků.

4. Narýsujte libovolný trojúhelník ABC a osy jeho vnějších úhlů. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku KLM, kde body K, L, M jsou průsečíky os vnějších úhlů trojúhelníku ABC.

5. Zdůvodněte, zda a proč se osy dvou vnějších úhlů trojúhelníku a osa vnitřního úhlu při zbývajícím vrchol protínají v jednom bodě.

6. Vnitřní úhly α, β, γ v trojúhelníku ABC jsou v poměru 2 : 3 : 5. V jakém poměru jsou příslušné vnější úly tohoto trojúhelníku?

7. Vnější úhly α', β', γ' trojúhelníku ABC jsou v poměru 3 : 4 : 5. V jakém poměru jsou příslušné vnitřní úhly tohoto trojúhelníku?

8. Můžete najít trojúhelník, ve kterém by součet dvou jeho vnitřních úhlů byl roven velikosti úhlu třetího?

9. Je dán tupoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC a tupým úhlem při vrcholu C. Narýsujte výšky k jeho ramenům AC a BC. Stačilo by vám k určení velikostí všech vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, kdybyste věděli, že narýsované výšky svírají úhel 48°?

10. Narýsujte pravoúhlý trojúhelník FGH s pravým úhlem při vrcholu F. Sestrojte kolmici bodu F na přímku GH, její patu označte K. Který úhel je shodný a úhlem HFK?

11. Narýsujte ostroúhlý trojúhelník RST. Sestrojte kolmici z bodu R na přímku ST, její patu označte P. Sestrojte kolmici z bodu S na přímku RT, její patu označte U. Zdůvodněte, proč úhel PRT je shodný s úhlem UST.

12. V trojúhelníku ABC je úhel $\alpha > \beta$. Osa úhlu γ svírá s výškou na stranu c úhel
$\omega = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Ověřte.

13. V trojúhelníku ABC svírají osy úhlů α a β úhel $\varphi = R + \frac{\gamma}{2}$. Ověřte.

14. Ve čtverci ABCD o straně délky *a je* narýsován rovnostranný trojúhelník ABK. Určete velikost úhlu CKB.

15. Je dán trojúhelník KLM. Jeho vrcholy veďte rovnoběžky s protějšími stranami. Průsečíky těchto přímek – body T,U,V určí vrcholy trojúhelníku TUV. Tento trojúhelník je sjednocením čtyř trojúhelníků a každý z nich je shodný s trojúhelníkem KLM. Zdůvodněte proč.

16. Narýsujte rovnostranný trojúhelník ABC a zvolte libovolný jeho vnitřní bod, např. K. Sestrojte kolmice z bod K na strany trojúhelníku. Paty kolmic označte postupně L, M, N. Porovnejte úsečku KL + KM + KN s výškou trojúhelníku ABC.

17. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ. Sestrojte výšky na strany AC a BC, jejich paty označte E, F. Narýsujte trojúhelník EFC a vyjádřete jeho vnitřní úhly pomocí úhlů α, β, γ.

18. Narýsujte libovolný trojúhelník ABC a opište tomuto trojúhelníku kružnici. Zvolte si libovolný bod K této kružnice a sestrojte z bodu K kolmice k přímkám AB, AC, BC. Ověřte, že paty těchto kolmic leží v jedné přímce.

19. Uměli byste vypočítat obvod rovnostranného trojúhelníku, kdybyste znali:

a) velikost jeho výšky,
b) velikost jeho těžnice,
c) délku poloměru kružnice trojúhelníku opsané,
d) délku poloměru kružnice trojúhelníku vepsané?

20. Dokažte, že součet všech tří těžnic daného trojúhelníku je menší než obvod tohoto trojúhelníku.

21. Těžnice trojúhelníku rozdělí tento trojúhelník na šest trojúhelníků. Jaký je vztah mezi obsahy jednotlivých trojúhelníků a obsahem původního trojúhelníku.

22. Narýsujte libovolný trojúhelník ABC a sestrojte jeho těžnici BD. Narýsujte střed F této těžnice a sestrojte úsečky AF a CF. V jakém vztahu jsou obsahy trojúhelníků AFD, CFD, BCF a ABF a obsahu trojúhelníku ABC.

23. Nakreslete trojúhelník, jehož obsah je $\frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$.

24. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC a body M, N, P, které dělí jeho strany BC, CA, AB postupně v poměru 2 : 1. Jakou část trojúhelníku ABC zaujímá trojúhelník XYZ, jehož vrcholy X, Y, Z jsou průsečíky přímek AM, BN, CP.

3. Úlohy o čtyřúhelnících

1. Narýsujte obdélník ABCD. Na straně AD zvolte bod K a na straně BC zvolte bod L tak, aby platilo AK $\cong$ CL. Dokažte, že trojúhelníky ALD a BKC jsou shodné.

2. Narýsujte rovnoběžník KLMN a sestrojte středy jeho stran. Dokažte, že tyto středy jsou vrcholy nového rovnoběžníku. Budete-li pokračovat dále v sestrojování středů stran nového rovnoběžníku, zjistíte, že vždy středy stran jsou vrcholy nových rovnoběžníků.

3. Jak byste rozdělili (rozstřihli) pravidelný šestiúhelník na co nejmenší počet částí, ze kterých byste složili rovnoběžník?

4. Obdélník má obsah 36 cm^2. Jaké mohou být délky jeho stran? Který z obdélníků má nejmenší obvod?

5. Obdélník má obvod 48 cm. Jaké mohou být délky jeho stran? Který z obdélníků má největší obsah?

6. Určete obsah jednotlivých částí praporu, jestliže prapor má tvar obdélníku, jehož délky stran jsou 30 cm a 20 cm, je rozdělen na modrý klín tvaru trojúhelníku (strana 20 cm, výška 15 cm) a dva shodné lichoběžníky - bílý a červený.

7. Je dán rovnoběžník ABCD. Úhlopříčky tohoto rovnoběžníku jej rozdělí na čtyři trojúhelníky, které jsou po dvou shodné. Dokažte. Jaké budou tyto trojúhelníky, jestliže rovnoběžníkem bude kosočtverec?

8. Je dán rovnoběžník ABCD, délka jeho jedné úhlopříčky je rovna délce jeho jedné strany. Jakou velikost mají vnitřní úhly tohoto rovnoběžníku?

9. Nakreslete několik různých čtyřúhelníků, jejichž úhlopříčky jsou na sebe kolmé.

10. Velikost jednoho vnitřních úhlů rovnoběžníku je 58°. Vypočtěte velikosti zbývajících vnitřních úhlů rovnoběžníku.

11. Součet velikostí dvou vnitřních úhlů rovnoběžníku je 100°. Rozhodněte, zda tyto úhly jsou

a) úhly sousední
b) úhly protější
c) libovolná dvojice vnitřních úhlů rovnoběžníku.

12. V rovnoběžníku ABCD je bod K střed strany BC a bod L střed strany CD. Určete, v jakém poměru dělí úsečky AK a AL úhlopříčku BD.

13. Narýsujte libovolný konvexní čtyřúhelník ABCD a sestrojte středy všech jeho stran. Ověřte (dokažte) že platí: Úsečky spojující středy sousedních stran konvexního čtyřúhelníku rozdělují tento čtyřúhelník na rovnoběžník a čtyři trojúhelníky.

14. Narýsujte libovolný konvexní čtyřúhelník ABCD, středy jeho stran označte K, L, M, N. Ověřte, že čtyřúhelník KLMN je rovnoběžník.

15. V lichoběžníku ABCD pro jeho základny platí: AB = 2 CD. Dokažte, že úhlopříčky tohoto lichoběžníku dělí střední příčku na tři shodné úsečky.

16. Dokažte, že část střední příčky lichoběžníku vymezená jeho úhlopříčkami (tj. úsečka, jejímiž krajními body jsou body úhlopříček), je rovna polovině rozdílu jeho základen.

17. Lichoběžník je svými úhlopříčkami rozdělen na čtyři trojúhelníky. V jakém vztahu jsou obsahy těchto trojúhelníků?

18. Je dán lichoběžník ABCD, narýsujte jeho úhlopříčky AC, BD. Kolik dvojic geometrických útvarů, které mají sobě rovné obsahy, můžete najít?

19. Kružnici se středem S je opsán rovnoramenný lichoběžník ABCD. Vzdálenost jednoho vrcholu od středu S je 7 cm, vzdálenost druhého vrcholu je 4 cm. Vypočítejte obsah lichoběžníku ABCD.

20. Vypočítejte poloměr kružnice vepsané do kosočtverce, jehož strana je bodem dotyku rozdělena na úsečky dlouhé 6 cm a 4 cm.

21. Daný trojúhelník ABC doplňte bodem D na tětivový čtyřúhelník, kterému je možno vepsat kružnici.

22. Ověřte, že platí:
   a) Čtyřúhelníku můžeme opsat kružnici (čtyřúhelník tětivový), právě když součet velikostí libovolných dvou protějších úhlů je 180°.
   b) Čtyřúhelníku můžeme vepsat kružnici (čtyřúhelník tečnový), právě když se součty dvou protějších stran sobě rovnají.
   c) V každém tětivovém čtyřúhelníku je součin délek úhlopříček roven součtu součinů délek protějších stran (Ptolemaiova věta).

4. Mnohoúhelníky

1. Pravidelný šestiúhelník rozdělte na
   a) dva shodné čtyřúhelníky
   b) tři shodné šestiúhelníky
   c) šest shodných trojúhelníků
   d) šest shodných rovnoběžníků

2. Dokažte, že v pravidelném šestiúhelníku dělí úhlopříčky úhel u každého vrcholu na čtyři shodné úhly.

3. Do téže kružnice je vepsán pravidelný šestiúhelník a rovnostranný trojúhelník. Dokažte, že obsah šestiúhelníku je dvakrát větší než obsah rovnostranného trojúhelníku.

4. V jakém poměru jsou
   a) obvody
   b) obsahy

rovnostranného trojúhelníku o straně délky a, čtverce o straně délky a, a pravidelného šestiúhelníku o straně délky a.

5. Uvažujte postupně pravidelné mnohoúhelníky, které mají n stran, n vrcholů, n vnitřních úhlů (n je postupně 3, 4, 5, 6, atd.). Sledujte postupně počet úhlopříček těchto mnohoúhelníků a velikosti jejich vnitřních úhlů. Odvoďte obecný vztah

5. Pythagorova věta

1.Dokažte Pythagorovu větu několika způsoby (využijte např. internetu)

2. Průměr kmene stromu v nejužším místě je 27 cm. Lze z něj vyříznout hranol se čtvercovým průřezem tak, aby strana čtverce měla délku 20 cm?

3. Je dán čtverec ABCD o straně délky 10 cm. Vypočítejte poloměr kružnice, která prochází body B,C a středem strany AD.

4. Uměli byste sestrojit úsečku délky $\sqrt{7}$ cm pomocí Pythagorovy věty?

5. Předpisy pro Pythagorejské trojice:

a)	$2n+1$	$2n^2+2n$	$2n^2+2n+1$
b)	$4n$	$4n^2-1$	$4n^2+1$
c)	$2ab$	a^2-b^2	a^2+b^2

6. Úlohy o kružnici a kruhu

1. Kolik různých kružnic můžete narýsovat tak, aby procházely
   a) jedním bodem
   b) dvěma různými body
   c) třemi různými body, které neleží v jedné přímce.

2. Narýsujte tři kružnice o různých středech a různých poloměrech tak, aby každé dvě kružnice měly vnější dotyk.

3. Vepište do kružnice o poloměru *r* postupně rovnostranný trojúhelník, čtverec, pravidelný šestiúhelník, pravidelný osmiúhelník. Vyjádřete jejich obvody a obsahy pomocí *r*.

4. Jak se změní a) délka kružnice
   b) obsah kruhu,
zvětšíme-li poloměr původní kružnice dvakrát (třikrát, obecně *n* – krát).

5. Počítejte a porovnejte délky čar:
   a) půlkružnice o poloměru *r*,
   b) dvou půlkružnic o poloměru $\frac{r}{2}$,
   c) čtyř půlkružnic o poloměru $\frac{r}{4}$.

6. Vypočítejte obsah mezikruží, které vznikne, když čtverci o straně délky 10 cm opíšeme a vepíšeme kružnici.

7. Z čtvercové desky vyřízneme kruh maximálního obsahu, Kolik procent činí odpad?

8. Z desky tvaru kruhu vyřízneme čtverec maximálního obsahu,. Kolik procent činí odpad?

9. Ověřte, že osa tětivy kružnice prochází vždy středem kružnice.

10. Vyslovte a dokažte Thaletovu větu.

11. Jaký úhel opíše hodinová ručička na kruhovém ciferníku za 180 minut?

12. Jakou dráhu vykoná krajní bod sekundové ručičky hodinek za jeden den, jestliže délka ručičky je 1,2 cm ?

13. Dokažte, že spojnice bodů, které vyznačují na ciferníku hodin 2 a 5 je kolmá na spojnici bodů, které vyznačují 3 a 10.

14. Jsou dány dvě shodné kružnice, které se dotýkají. Označme *t* jednu z vnějších společných tečen těchto kružnic. Vypočítejte poloměr kružnice *m*, která se dotýká obou daných kružnic a přímky *t*.

15. Narýsujte konvexní úhel AVB a kružnici *k*, která s ním nemá společný bod. Sestrojte všechny kosočtverce VZYX, které mají vrcholy na ramenech úhlu a a bod Z na kružnici *k*.

Literatura

FRANCOVÁ, M., MATOUŠKOVÁ, K., VAŇUROVÁ, M.: *Sbírka úloh z elementární geometrie.* Brno: PdF MU 1992,
KRUPKA, P.: *Sbírka úloh z matematiky pro 2. stupeň ZŠ a nižší ročníky víceletých gymnázií.* Praha: Prometheus, 2000.
KUPČÁKOVÁ, M.: *Geometrie ve světě dětí i dospělých.* Hradec Králové: Gaudeamus 2001.
KUŘINA, F.: *Umění vidět v matematice*. Praha: SPN 1989.
KUŘINA, F.: *Deset pohledů na geometrii*. Praha: Matematický ústav AV ČR a Albra, 1996.
KUŘINA, F.: *Geometrické praktikum I*. Praha: MÚ ČSAV, 1992.
KUŘINA, F.: *Geometrické praktikum II*. Praha: MÚ ČSAV, 1994.
SOUČKOVÁ, B.: *Sbírka písemných tématických prověrek a úloh z matematiky pro 6. ročník ZŠ*. Praha: JČSMF, 1986.
ŠVRČEK, J., VANŽURA, J.: *Geometrie trojúhelníka*. Praha: SNTL, 1988.
VYŠÍN, J.: *Geometrie pro pedagogické fakulty I.* Praha: SPN 1970