Rozvoj matematických představ 1. - Příklady

Helena Durnová

prosinec 2010

Přehled okruhů - RMP 1

(Převzato z materiálů pro dálkové studium)

1. Výrok. Negace výroku. Složené výroky (logické spojky: konjunkce, disjunkce, ostrá disjunkce, implikace, ekvivalence)

2. Výroková forma. Výroková formule, pravdivostní ohodnocení výrokových formulí

3. Kvantifikované výroky: obecný a existenční kvantifikátor, negace kvantifikovaných výroků.

4. Množina. Podmnožina. Doplněk množiny.

5. Sjednocení dvou množin. Průnik, rozdíl, symetrický rozdíl dvou množin. Využití množinových diagramů k řešení úloh.

6. Kartézský součin dvou množin.

7. Binární relace z množiny do množiny. Binární relace na množině, Uspořádání množiny. Ekvivalence na množině a rozklad množiny.

8. Zobrazení z množiny do množiny. Typy zobrazení: prosté, vzájemně jednoznačné.

9. Přirozená čísla: zavedení a základní vlastnosti. Operace s přirozenými čísly. Vytváření pojmu přirozeného čísla. Přirozená čísla a předškoláci.

Literatura (základní)

1 Růžena Blažková: *Rozvoj matematických pojmů a představ u dětí předškolního věku.*

http://is.muni.cz/elportal/?id=893208

Výroky

Definice 1 Výrok *je tvrzení, o němž má smysl prohlásit, že je pravdivé nebo že pravdivé není.*

Negace výrokuA: $\neg A$

Konjunkce (A a zároveň B): $A \wedge B$

Disjunkce (A nebo B): $A \vee B$

Implikace (když A, pak B): $A \Rightarrow B$

Ekvivalence (A právě tehdy když B): $A \Leftrightarrow B$

Tautologie: výrok, který je vždy pravdivý

Kontradikce: výrok, který není nikdy pravidvý

Příklad 2 Napište negace následujících výroků:

1. Neexistují neomylní učitelé.
2. Existují omylní učitelé.
3. Každý učitel je omylný.
4. Žádný učitel není neomylný.
5. Jen omylní lidé jsou učitelé.
6. Žádný učitel není omylný.
7. Jen ti lidé, kteří jsou učiteli, mohou být omylní.
8. Nejen omylní lidé jsou učiteli.

Příklad 3 Sestavte tabulku pravdivostních hodnot následujících složených výroků:

1. $\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg(\neg B \vee \neg A)$
2. $\neg(A \vee \neg B) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$
3. $\neg(A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$

4. $(A \vee B) \wedge C$
5. $(A \wedge C \vee B)$
6. $[(A \vee B) \wedge C] \Rightarrow [(A \wedge C \vee B)]$
7. $A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C)$
8. $\neg(B \wedge C)$
9. $[A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C)] \Leftrightarrow [\neg(B \wedge C)]$
10. $[(A \Rightarrow B) \wedge B] \Rightarrow A$
11. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
12. $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$

Příklad 4 Napište negace následujících výroků (s kvantifikátory):

1. Všechna zvířata mají čtyři nohy.
2. Existuje ryba, která mluví.
3. Existuje nejméně 5 druhů sladkovodních ryb.
4. Aspoň jeden jehličnatý strom na zimu opadává.
5. V Evropě rostou alespoň dva druhy borovic.
6. Duha obsahuje všechny základní barvy.
7. Každou barvu lze namíchat ze základních barev.

Množiny a operace s nimi

Definice 5 *Soubor prvků nazýváme* množinou. *Množiny označujeme zpravidla velkými písmeny latinské abecedy.*

x je prvkem A: $x \in A$;

A je podmnožinou B: $A \subset B$;

A je podmnožinou nebo je rovno B: $A \subseteq B$;

Sjednocení dvou množin: $A \cup B$;

Průnik dvou množin: $A \cap B$;

Rozdíl dvou množin: $A \setminus B$;

Doplněk množiny A vzhledem k množině M (platí $A \subseteq M$: $\overline{A} = M \setminus A$);

Kartézský součin dvou množin A, B: $A \times B$ (kartézský součin je množina uspořádaných dvojic, v nichž první prvek je z množiny A a druhý prvek z množiny B).

Příklad 6 Ukažte, že platí následující tvrzení (pomocí Vennových diagramů)

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
5. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
6. $A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

Příklad 7 Rozhodněte,která z následujících množinových inkluzí platí:

1. $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$
2. $A \setminus (B \cup C) \subset A \setminus (B \setminus C)$

Příklad 8 Ukažte, že platí následující tvrzení:

* $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$, pokud $C \subset A$
* $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

Relace a zobrazení

Definice 9 Relací *na množině A nazýváme podmnožinu kartézského součinu $A \times A$; tj. prvky relace jsou některé uspořádané dvojice prvků množiny A:* $R \subseteq A \times A$

Vlastnosti relace

Relace symetrická: pro $\forall a, b \in A$ platí: $(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R$

Relace reflexivní: pro $\forall a \in A$ platí: $(a, a) \in R$

Relace antisymetrická: pokud $(a, b) \in A \wedge (b, a) \in A)$, pak: $a = b$

Relace tranzitivní: pro $\forall a, b, c \in A$ platí: $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Leftrightarrow (a, c) \in R$

Relaci, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní nazýváme uspořádání*. Tuto relaci lze zakreslit* hasseovským diagramem*.*

Relaci, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní nazýváme ekvivalence*. Ke každé ekvivalenci přísluší* rozklad*.*

Příklad 10 Relaci na množině $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ zadanou výčtem zapište do tabulky a určete, zda je

(a) reflexivní,

(b) symetrická,

(c) antisymetrická,

(d) tranzitivní,

(e) uspořádání,

(f) ekvivalence.

V případě, že se jedná o uspořádání, nakreslete hasseovský diagram zadané relace; v případě, že se jedná o ekvivalenci, najděte příslušný rozklad.

$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$;

$S = R \cup \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$;

$T = R \cup \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 6)\}$

$$P = R \cup \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\}$$

$$Q = R \cup \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6)\}$$

Definice 11 *Relace $f \subset A \times B$ se nazývá zobrazením, pokud je každému prvku množiny A přiřazen nejvýše jeden prvek množiny B (tj. žádný prvek množiny A nelze zobrazit na dva různé prvky).*

Zobrazení se nazývá

prosté*, pokud má každý prvek množiny B právě jeden vzor;*

"na"*, pokud má každý prvek množiny B alespoň jeden vzor;*

vzájemně jednoznačné*, pokud má každý prvek množiny A právě jeden obraz a každý prvek množiny B právě jeden vzor.*

Příklad 12 Určete, která z následujících zobrazení jsou vzájemně jednoznačná; která jsou prostá; a která jsou 'na'. Nakreslete názorný obrázek.

$$A = \{1,2,3,4\}, B = \{1,2,3,4,5\}, f = \{(1,1),(2,3),(3,5),(4,2)\}$$

$$A = \{1,2,3\}, B = \{1,2,3,4\}, f = \{(1,1),(2,3),(3,4)\}$$

$$A = \{1,2,3,4\}, B = \{a,b,c,d\}, f = \{(1,d),(2,a),(3,c),(4,b)\}$$

Přirozená čísla a operace s nimi

Definice 13 *Binární operace* $+$ *a* $\cdot$ *na množině přirozených čísel* $\mathbb{N}$ *jsou*

komutativní, tj. platí $a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a$*;*

asociativní, tj. platí $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$*;*

Dále platí distributivní zákon: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Příklad 14 *Sečtěte následující čísla ve dvojkové soustavě*

1. $10101 + 1011$
2. $10111 + 10101$
3. $11001 + 10001$
4. $11111 + 11111$

Příklad 15 Zapište následující čísla vyjádřená římskými číslicemi v poziční desítkové soustavě:

1. XLIII
2. MCM
3. MDCCCLIV
4. MXMIX
5. MDCXVIII