7.3 JADERNÁ FYZIKA

Jaderná fyzika je část fyziky, která zkoumá vlastnosti atomového jádra a procesy při jaderných reakcích.

RADIOAKTIVITA

Radioaktivitou rozumíme schopnost některých atomových jader vysílat záření. Záření, které vysílají radioaktivní látky a které vzniká při jaderných přeměnách, se nazývá *jaderné (radioaktivní) záření*. Rozlišujeme záření alfa, beta a gama.

Záření alfa je proud jader helia ${}^4_2\mathrm{He}$, které jsou složeny ze dvou protonů a dvou neutronů. *Záření beta* je tvořeno rychle letícími elektrony. *Záření gama* je elektromagnetické vlnění o velmi krátké vlnové délce ($\lambda \leqq 10^{-10}$ m).

Jádra se při jaderných přeměnách rozpadají, a proto se počet nepřeměněných jader N s časem zmenšuje. Závislost počtu nepřeměněných jader N na čase t vyjadřuje *zákon radioaktivní přeměny*

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

kde N_0 je počet nepřeměněných jader v počátečním okamžiku (v čase $t = 0$), N počet nepřeměněných jader v čase t a λ je *přeměnová konstanta* ($e \doteq 2{,}718\ldots$ je základ přirozených logaritmů).

Poločas přeměny T je doba, za kterou se z počátečního počtu atomů radionuklidu přemění právě polovina. Mezi poločasem přeměny T a přeměnovou konstantou λ platí vztah

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

V praxi často neuvažujeme počet jader, která se dosud nepřeměnila, ale počet přeměn za 1 s, tj. počet částic vyzářených za 1 s radionuklidem.

Jestliže se za dobu Δt přemění ΔN jader zářiče, pak *aktivita zářiče* A je definována vztahem

$$A = \frac{\Delta N}{\Delta t}.$$

Aktivita zářiče A je přímo úměrná počtu N dosud nepřeměněných jader

$$A = \lambda N.$$

Aktivita A se s časem zmenšuje podle vztahu

$$A = A_0 e^{-\lambda t},$$

kde A_0 je aktivita zářiče v počátečním okamžiku (v čase $t = 0$), A aktivita zářiče v čase t a λ přeměnová konstanta.

JADERNÉ REAKCE

Jaderné reakce jsou jaderné přeměny, k nimž dochází při vzájemných srážkách atomových jader s různými částicemi nebo jinými jádry. Jaderné reakce zapisujeme rovnicemi, v nichž na levé straně jsou částice a jádra do reakce vstupující, na pravé straně z reakce vystupující. Schematicky lze jadernou reakci zapsat ve tvaru

$$\mathrm{X} + \mathrm{a} \longrightarrow \mathrm{Y} + \mathrm{b},$$

kde X je ostřelované jádro, a částice dopadající na jádro, Y nově vzniklé jádro a b nově vzniklá částice. Při jaderných reakcích musí být splněny *zákon zachování energie*, *zákon zachování hybnosti*, *zákon zachování elektrického náboje* a *zákon zachování počtu nukleonů*.

JADERNÁ ENERGETIKA

Mezi nukleony v jádře působí *jaderné síly*. Jsou to přitažlivé síly velmi krátkého dosahu, které drží jádro pohromadě a zajišťují jeho stabilitu. K rozložení jádra na jednotlivé nukleony je proto zapotřebí energie, která se nazývá *vazební energie* jádra E_j.

Soustava Z volných protonů a N volných neutronů má tedy větší energii než jádro atomu, které se z těchto částic skládá, a podle rovnice $\Delta m = \frac{E_j}{c^2}$ má také větší klidovou hmotnost. Rozdíl mezi klidovou hmotností volných nukleonů, z nichž se skládá jádro, a klidovou hmotností jádra atomu se nazývá *hmotnostní úbytek* Δm. V literatuře věnované jaderné fyzice se hmotnostní úbytek často také značí symbolem B.

Z definice hmotnostního úbytku vyplývá vztah

$$\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_j,$$

kde m_p je klidová hmotnost volného protonu, m_n klidová hmotnost volného neutronu, m_j klidová hmotnost jádra, Z protonové číslo a N neutronové číslo. Vazební energii E_j jádra atomu vypočteme pak z rovnice

$$E_j = \Delta mc^2 = (Zm_p + Nm_n - m_j)c^2.$$

Na jeden nukleon připadá vazební energie

$$\varepsilon_j = \frac{E_j}{A},$$

kde A je nukleonové číslo daného jádra. Různost vazebních energií připadajících na jeden nukleon v jádrech různých prvků lze využít k uvolňování *jaderné energie.*

Jadernou energii lze uvolnit dvěma způsoby: termojadernou reakcí a jaderným štěpením.

Při *termojaderné reakci* se spojují jádra lehkých prvků v jádra těžší. Při *štěpení jader* se těžší jádro štěpitelné látky (např. $^{238}_{92}U$) rozštěpí na dvě lehčí atomová jádra a současně se uvolňuje několik neutronů. Vzniklé neutrony mohou být pohlceny dalšími jádry štěpitelné látky a mohou tak vyvolat další štěpení. Vzniká *řetězová reakce*, při které se uvolňuje značná energie. Řízená řetězová reakce probíhá v *jaderných reaktorech* využívaných především v *jaderných elektrárnách.*

FYZIKA ČÁSTIC

Přístroje, které umožňují zachytit a zaznamenat různé částice (např. jaderného záření), se nazývají *detektory částic*. Fotony, které mají dostatečnou

energii (fotony ultrafialového, rentgenového a gama-záření), a elektricky nabité částice na své dráze ionizují atomy a molekuly plynu, ve kterém se pohybují. Takové záření nazýváme *ionizující záření* a podle ionizačních účinků ho můžeme také registrovat. K detekci částic se dnes používají různé druhy detektorů založené na různých principech.

Abychom mohli zkoumat složení částic a zákonitosti jejich přeměn, musíme použít rychle letící částice jako střely. Růstu rychlosti a energie částic dosahujeme na *urychlovačích*. Izotopové složení prvků zkoumáme pomocí *hmotnostních spektrometrů* založených na odlišném pohybu různě těžkých iontů v elektrických a magnetických polích. Hmotnostními spektrometry lze také zjistit relativní atomové hmotnosti izotopů určitého prvku.

ÚLOHY

RADIOAKTIVITA

Úloha 148

Ve vzorku radioaktivního fosforu $^{32}_{15}P$, který má poločas přeměny 14 dnů, je $4 \cdot 10^{18}$ atomů fosforu. Kolik atomů fosforu bude v tomto vzorku za čtyři týdny?

Řešení

$N_0 = 4 \cdot 10^{18}$, $T = 14$ d $= 2$ týdny, $t = 4$ týdny; $N = ?$

Poločas přeměny radioaktivního fosforu $^{32}_{15}P$ je 2 týdny, a proto po uplynutí této doby bude ve vzorku poloviční počet nerozpadlých atomů, tj. $2 \cdot 10^{18}$ atomů fosforu. Za další dva týdny se z tohoto počtu rozpadne opět polovina atomů, takže za čtyři týdny bude ve vzorku 10^{18} nerozpadlých atomů fosforu.

Úloha 149

Poločas přeměny nuklidu $^{226}_{88}Ra$ je 1 590 roků. Určete jeho přeměnovou konstantu. Rok má přibližně $3{,}154 \cdot 10^7$ sekund.

Řešení

$T = 1\,590$ r $= 1\,590 \cdot 3{,}154 \cdot 10^7$ s $\doteq 5{,}015 \cdot 10^{10}$ s; $\lambda = ?$

Mezi přeměnovou konstantou λ a poločasem přeměny T platí vztah

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}.$$

$$\text{Číselně}\quad \lambda = \frac{\ln 2}{5{,}015 \cdot 10^{10}}\ \mathrm{s}^{-1} \doteq 1{,}38 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Přeměnová konstanta nuklidu ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ je přibližně $1{,}38 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{s}^{-1}$.

Úloha 150

V kousku starého dřeva klesl obsah radionuklidu ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ na 72 % původní hodnoty. Určete stáří dřeva, je-li poločas přeměny nuklidu 5 570 r.

Řešení

$N = 0{,}72 N_0$, $T = 5\,570$ r; $t = ?$

Jestliže v počátečním okamžiku je počet nepřeměněných jader radionuklidu N_0, pak v čase t je počet nepřeměněných jader N určen vztahem

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{a}$$

kde $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ je přeměnová konstanta (T je poločas přeměny radionuklidu). Vztah (a) vyjádříme nejprve ve tvaru

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

a najdeme přirozený logaritmus jeho levé a pravé strany

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t.$$

Pro hledaný čas t odtud vyplývá

$$t = -\ln\left(\frac{N}{N_0}\right)\frac{1}{\lambda} = -\ln\left(\frac{N}{N_0}\right)\frac{T}{\ln\ 2}.$$

$$\text{Číselně}\quad t = -\ln(0{,}72)\frac{5\,570}{\ln 2}\ \mathrm{r} \doteq 2\,640\ \mathrm{r}.$$

Stáří dřeva je přibližně 2 640 roků.

Poznámka

Radionuklid uhlíku ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ vzniká v zemské atmosféře vlivem kosmického záření. Radionuklid ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ se pak chemicky váže s atmosférickým kyslíkem a vytváří molekuly oxidu uhličitého CO_2. Radioaktivní oxid uhličitý je spolu s ostatním oxidem uhličitým obsaženým ve vzduchu pohlcován rostlinami a dostává se tak i do organismu býložravých živočichů.

Když živý organismus zemře (např. když je pokosen len, ze kterého bylo vyrobeno plátno, když je pokácen strom, když zahyne živočich), žádné nové atomy radionuklidu ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ v organismu již nepřibývají a pokračuje jen radioaktivní rozpad. Aktivita uhlíku se při tom postupně zmenšuje a podle toho lze určit stáří zbytků rostlin, semen, plátna, dřevěných předmětů, zuhelnatěné třísky nalezené v jeskyni s nástěnnými malbami, kostí živočichů apod. Výsledky získané radiouhlíkovou metodou jsou v dobré shodě s výsledky, ke kterým dospěli archeologové.

Kromě radiouhlíkové metody se používají také metody založené na postupném rozpadu jiných radioaktivních prvků. Užitím těchto metod je možné určit stáří hornin, nerostů, různých archeologických nálezů apod.

Úloha 151

Uran ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ o hmotnosti 1 g vyzáří za sekundu $1{,}24 \cdot 10^4$ částic alfa. Určete počáteční aktivitu vzorku a poločas přeměny. Relativní atomová hmotnost uranu ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ je 238, atomová hmotnostní konstanta $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg. Rok má přibližně $3{,}154 \cdot 10^7$ sekund.

Řešení

$m = 10^{-3}$ kg, $\Delta t = 1$ s, $\Delta N = 1{,}24 \cdot 10^4$, $A_\mathrm{r} = 238$, $m_\mathrm{u} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg, $1\ \mathrm{r} \doteq 3{,}154 \cdot 10^7$ s; $A(0) = ?$, $T = ?$

Aktivita radionuklidu je vyjádřena počtem radioaktivních přeměn za 1 sekundu. Počáteční aktivita $A(0)$ vzorku uranu ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ o hmotnosti 1 g je tedy

$$A(0) = \frac{\Delta N}{\Delta t}. \tag{a}$$

Aktivita radionuklidu $A(t)$ v čase t je přímo úměrná celkovému počtu dosud nepřeměněných jader $N(t)$. Platí tedy

$$A(t) = \lambda N(t),$$

kde $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ je přeměnová konstanta (T je poločas přeměny daného radionuklidu). Pro počáteční aktivitu $A(0)$ v čase $t = 0$ odtud dostáváme

$$A(0) = \lambda N(0), \tag{b}$$

kde $N(0)$ je počáteční počet jader vzorku uranu ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ o hmotnosti 1 g. Tento počet lze vyjádřit vztahem

$$N(0) = \frac{m}{m_a} = \frac{m}{A_r m_u},$$

kde m je hmotnost daného vzorku uranu, m_a hmotnost jednoho atomu uranu, A_r relativní atomová hmotnost uranu ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ a m_u atomová hmotnostní konstanta. Dosazením do vztahu (b) dostáváme

$$A(0) = \lambda \frac{m}{A_r m_u} = \frac{\ln 2}{T} \frac{m}{A_r m_u}$$

$$\text{a odtud} \quad T = \frac{\ln 2 \cdot m}{A(0) A_r m_u}. \qquad \text{(c)}$$

Obecné řešení je tedy určeno vztahy (a) a (c).

$$\text{Číselně} \quad A(0) = \frac{1{,}24 \cdot 10^4}{1}\ \mathrm{Bq} = 1{,}24 \cdot 10^4\ \mathrm{Bq}.$$

$$T = \frac{\ln 2 \cdot 10^{-3}}{1{,}24 \cdot 10^4 \cdot 238 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}}\ \mathrm{s} \doteq 1{,}415 \cdot 10^{17}\ \mathrm{s} =$$

$$= \frac{1{,}415 \cdot 10^{17}}{3{,}154 \cdot 10^7}\ \mathrm{r} \doteq 4{,}49 \cdot 10^9\ \mathrm{r} \doteq 4{,}5 \cdot 10^9\ \mathrm{r}.$$

Počáteční aktivita vzorku uranu ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ o hmotnosti 1 g je $1{,}24 \cdot 10^4$ Bq. Uran ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ má poločas rozpadu $4{,}5 \cdot 10^9$ roků.

JADERNÉ REAKCE

Úloha 152

Jádro kyslíku ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$ bylo ostřelováno částicí alfa, která v něm uvízla, a při tom se uvolnil neutron. Zapište příslušnou reakci a zjistěte, jaký nuklid v důsledku této reakce vznikl.

Řešení

Označme symbolem ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ jádro, které vznikne v důsledku reakce. Uvažovanou jadernou reakci můžeme pak zapsat ve tvaru

$${}^{16}_{8}\mathrm{O} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \longrightarrow {}^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{A}_{Z}\mathrm{X}.$$

Vzhledem k tomu, že při jaderných reakcích se zachovává elektrický náboj i počet nukleonů, platí

$$8 + 2 = 0 + Z, \quad 16 + 4 = 1 + A,$$

$$\text{odkud} \quad Z = 10 \quad \text{a} \quad A = 19.$$

Z tabulky periodické soustavy prvků zjistíme, že atom s protonovým číslem $Z = 10$ je neon (Ne). Jadernou reakci můžeme tedy napsat ve tvaru

$${}^{16}_{8}\mathrm{O} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \longrightarrow {}^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{19}_{10}\mathrm{Ne}.$$

Úloha 153

Při ostřelování nuklidu dusíku ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$ protony vznikl nuklid kyslíku ${}^{15}_{8}\mathrm{O}$, který vysílal záření β^+. Zapište proběhlé reakce a zjistěte, jaký nuklid v důsledku těchto reakcí vznikl.

Řešení

Reakci, která je důsledkem ostřelování nuklidu dusíku ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$ protony, můžeme zapsat ve tvaru

$${}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{15}_{8}\mathrm{O}.$$

Záření β^+ je tvořeno pozitrony ${}^{0}_{1}\mathrm{e}$, takže platí

$${}^{15}_{8}\mathrm{O} \longrightarrow {}^{0}_{1}\mathrm{e} + {}^{15}_{7}\mathrm{X}.$$

Výsledný nuklid má protonové číslo $Z = 8 - 1 = 7$; ostřelováním nuklidu ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$ vznikl tedy jiný nuklid dusíku ${}^{15}_{7}\mathrm{N}$. Poslední reakci můžeme proto napsat ve tvaru

$${}^{15}_{8}\mathrm{O} \longrightarrow {}^{0}_{1}\mathrm{e} + {}^{15}_{7}\mathrm{N}.$$

JADERNÁ ENERGETIKA

Úloha 154

Vypočítejte vazební energii připadající na jeden nukleon jádra uranu ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$. Klidová hmotnost protonu je $1{,}672\,6 \cdot 10^{-27}$ kg, neutronu $1{,}674\,9 \cdot 10^{-27}$ kg, relativní atomová hmotnost uranu ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ je 238,05 a atomová hmotnostní konstanta $1{,}660\,5 \cdot 10^{-27}$ kg. Rychlost světla ve vakuu je $2{,}997\,9 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Hledanou energii vyjádřete v MeV ($1\ \mathrm{eV} \doteq 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J).

Řešení
$m_p = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ kg, $m_n = 1{,}6749 \cdot 10^{-27}$ kg, $A_{rU} = 238{,}05$,
$m_u = 1{,}6605 \cdot 10^{-27}$ kg, $c = 2{,}9979 \cdot 10^8$ m · s^{-1}, $Z = 92$, $A = 238$,
$N = A - Z = 146$; $\varepsilon_j = ?$

Hmotnost jádra uranu m_j lze vypočítat ze vztahu

$$m_j = A_{rU} m_u,$$

kde A_{rU} je relativní atomová hmotnost uranu $^{238}_{92}U$ a m_u atomová hmotnostní konstanta. Hmotnostní úbytek jádra uranu Δm lze pak vyjádřit vztahem

$$\Delta m = Z m_p + N m_n - m_j = Z m_p + N m_n - A_{rU} m_u,$$

kde m_p je klidová hmotnost volného protonu, m_n klidová hmotnost volného neutronu, Z protonové číslo a N neutronové číslo uranu $^{238}_{92}U$. Vazební energie E_j jádra uranu $^{238}_{92}U$ je určena vztahem

$$E_j = \Delta m c^2.$$

Na jeden nukleon v jádře uranu $^{238}_{92}U$ připadá tedy vazební energie

$$\varepsilon_j = \frac{E_j}{A},$$

kde A je nukleonové číslo uranu $^{238}_{92}U$.

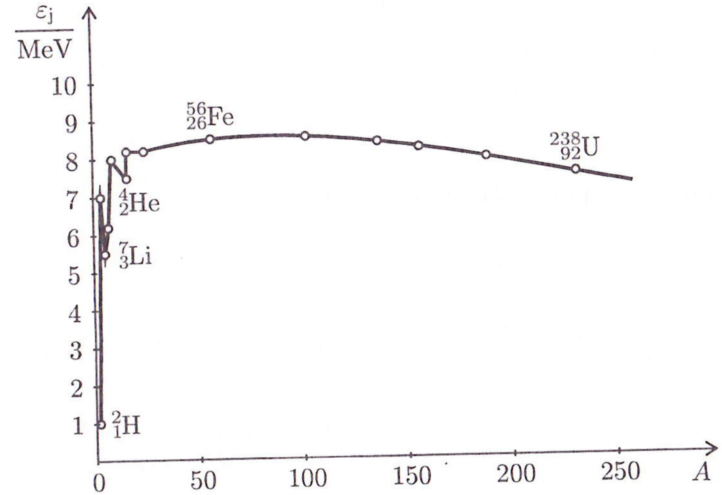
Číselně $\Delta m = 92 \cdot 1{,}6726 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} + 146 \cdot 1{,}6749 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} -$
$- 238{,}05 \cdot 1{,}6605 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \doteq 3{,}1326 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$

$$E_j = 3{,}1326 \cdot 10^{-27} \cdot \left(2{,}9979 \cdot 10^8\right)^2\ \text{J} \doteq$$
$$\doteq 2{,}8154 \cdot 10^{-10}\ \text{J} \doteq 1\,757{,}2\ \text{MeV}$$
$$\varepsilon_j = \frac{1\,757{,}2}{238}\ \text{MeV} \doteq 7{,}4\ \text{MeV}.$$

Na jeden nukleon v jádře uranu $^{238}_{92}U$ připadá vazební energie asi 7,4 MeV.

Poznámka
Podobným způsobem jako v této úloze bychom mohli vypočítat vazební energii připadající na jeden nukleon také u dalších jader. Závislost této energie na počtu nukleonů v jádře je znázorněna na obr. 77. Z grafu na obr. 77 vyplývá, že největší vazební

energii ε_j připadající na jeden nukleon mají jádra prvků nacházejících se uprostřed tabulky periodické soustavy prvků, kdežto jádra prvků umístěných na začátku nebo na konci tabulky periodické soustavy prvků mají tutu energii menší. Různost vazebních energií připadajících na jeden nukleon v jádrech různých prvků lze využít při uvolňování jaderné energie.



Obr. 77

Úloha 155
Určete energii, kterou lze získat štěpením 1 kg uranu $^{235}_{92}U$, jestliže se při štěpení jednoho jádra uranu $^{235}_{92}U$ uvolní energie asi 200 MeV. Jakou hmotnost by muselo mít černé uhlí s výhřevností $3 \cdot 10^7$ J · kg^{-1}, aby se získala stejná energie? Relativní atomová hmotnost uranu $^{235}_{92}U$ je 235, atomová hmotnostní konstanta je $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg.

Řešení
$m = 1$ kg, $E_0 = 200 \cdot 10^6$ eV, $A_r = 235$, $m_u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg,
$H = 3 \cdot 10^7$ J · kg^{-1}; $E = ?$, $m_x = ?$

a) Energie E uvolněná štěpením 1 kg uranu $^{235}_{92}U$ je

$$E = N E_0 = \frac{m}{m_a} E_0 = \frac{m E_0}{A_r m_u},$$

kde N je počet atomů v 1 kg uranu ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$, E_0 energie uvolněná štěpením jednoho jádra ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$, m hmotnost uranu a $m_\mathrm{a} = A_\mathrm{r} m_\mathrm{u}$ hmotnost jednoho atomu uranu.

Číselně $E = \dfrac{1 \cdot 200 \cdot 10^6}{235 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}}\ \mathrm{eV} \doteq 5{,}13 \cdot 10^{32}\ \mathrm{eV} \doteq 8{,}2 \cdot 10^{13}\ \mathrm{J}.$

b) Z definice výhřevnosti paliva

$$H = \frac{E}{m_\mathrm{x}}$$

dostáváme pro hledanou hmotnost m_x černého uhlí

$$m_\mathrm{x} = \frac{E}{H}.$$

Číselně $m_\mathrm{x} = \dfrac{8{,}2 \cdot 10^{13}}{3 \cdot 10^7}\ \mathrm{kg} \doteq 2{,}7 \cdot 10^6\ \mathrm{kg} = 2\,700\ \mathrm{t}.$

Štěpením 1 kg uranu ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ lze získat energii asi $8{,}2 \cdot 10^{13}$ J. Stejnou energii bychom získali spálením černého uhlí o hmotnosti 2 700 t.

Úloha 156

Blok jaderné elektrárny, která přeměňuje jadernou energii v elektrickou s účinností 40 %, má elektrický výkon 600 MW. Určete hmotnost uranu ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$, který se spotřebuje v elektrárně za 24 hodin, jestliže při štěpení jednoho jádra ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ se uvolní energie 200 MeV. Relativní atomová hmotnost ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ je 235, Avogadrova konstanta $6{,}02 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$.

Řešení

$P = 6 \cdot 10^8$ W, $\eta = 0{,}4$, $E_0 = 200 \cdot 10^6\ \mathrm{eV} = 3{,}2 \cdot 10^{-11}$ J,
$t = 24\ \mathrm{h} = 8{,}64 \cdot 10^4$ s, $A_\mathrm{r} = 235$, $M_\mathrm{m} = 235 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$,
$N_\mathrm{A} = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$; $m = ?$

Účinnost η bloku jaderné elektrárny je určena vztahem

$$\eta = \frac{Pt}{E}, \qquad \text{(a)}$$

kde Pt je elektrická energie získaná v bloku jaderné elektrárny za dobu t a E energie, která se za tuto dobu uvolní štěpením jaderného paliva o hmotnosti m. Tuto energii lze vyjádřit vztahem

$$E = NE_0 = \frac{m}{m_\mathrm{a}} E_0 = \frac{m}{\frac{M_\mathrm{m}}{N_\mathrm{A}}} E_0 = \frac{m E_0 N_\mathrm{A}}{M_\mathrm{m}}, \qquad \text{(b)}$$

kde N je počet jader uranu ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ rozštěpených za 24 hodin, E_0 energie uvolněná štěpením jednoho jádra uranu ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$, m hledaná hmotnost uranu, m_a hmotnost jednoho atomu uranu, M_m molární hmotnost uranu a N_A Avogadrova konstanta.
Po dosazení z (b) do (a) dostáváme

$$\eta = \frac{Pt}{\frac{m E_0 N_\mathrm{A}}{M_\mathrm{m}}} = \frac{Pt M_\mathrm{m}}{m E_0 N_\mathrm{A}} \quad \text{a odtud} \quad m = \frac{Pt M_\mathrm{m}}{\eta E_0 N_\mathrm{A}}.$$

Číselně $m = \dfrac{6 \cdot 10^8 \cdot 8{,}64 \cdot 10^4 \cdot 235 \cdot 10^{-3}}{0{,}4 \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}\ \mathrm{kg} \doteq 1{,}58\ \mathrm{kg}.$

V bloku elektrárny o výkonu 600 MW se při účinnosti 40 % spotřebuje za 24 h jaderné palivo o hmotnosti 1,58 kg.

FYZIKA ČÁSTIC

Úloha 157

Částice alfa s energií 5 MeV vytvoří ve vzduchu $150 \cdot 10^3$ párů jednomocných iontů. Určete ionizační proud, který vytváří radioaktivní látka vyzařující $3{,}7 \cdot 10^{10}$ částic za 1 s za předpokladu, že všechny vytvořené ionty se účastní vedení proudu. Elementární elektrický náboj je $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

Řešení

$N_0 = 150 \cdot 10^3$, $N = 3{,}7 \cdot 10^{10}$, $t = 1$ s, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $I = ?$

Nasycený ionizační proud lze vyjádřit vztahem

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

kde $\Delta Q = NN_0(e + e)$ je součet nábojů kladných částic (jednomocných iontů), které za dobu Δt projdou ve směru intenzity elektrického pole, a absolutní hodnoty nábojů záporných částic (elektronů), které projdou ve směru opačném. Dosazením dostáváme

$$I = \frac{2NN_0e}{\Delta t}. \tag{a}$$

Číselně $I = \frac{2 \cdot 3{,}7 \cdot 10^{10} \cdot 150 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{1}\ \mathrm{A} \doteq$

$$\doteq 1{,}8 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A} = 1{,}8\ \mathrm{mA}.$$

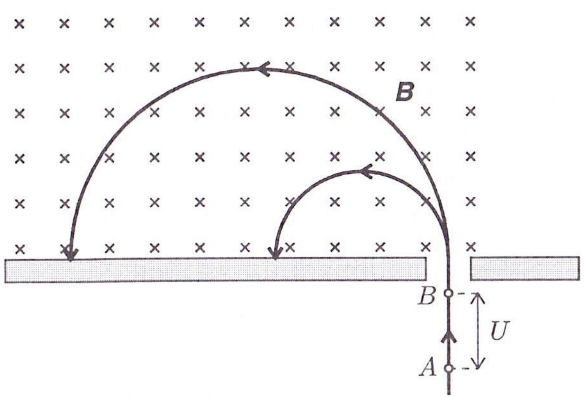
Radioaktivní látka vytváří ionizační proud 1,8 mA.

Poznámka

Ze vztahu (a) vyplývá, že s rostoucím počtem částic N jaderného záření roste také nasycený ionizační proud I. Tuto závislost lze využít k měření aktivity radioaktivních látek.

Úloha 158

Kladné jednomocné ionty neonu urychlené v elektrickém poli mezi dvěma body A a B, mezi kterými je napětí 1 000 V, vlétnou do homogenního magnetického pole kolmo k jejich indukčním čarám (obr. 78). V magnetickém poli se ionty pohybují po dvou kružnicích o poloměrech 14,6 cm a 15,3 cm. Určete relativní atomové hmotnosti obou izotopů neonu. Velikost magnetické indukce homogenního magnetického pole je 0,14 T, elementární elektrický náboj $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C a atomová hmotnostní konstanta $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg.



Obr. 78

Řešení

$U = 10^3$ V, $r_1 = 0{,}146$ m, $r_2 = 0{,}153$ m, $B = 0{,}14$ T, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg; $A_{r1} = ?$, $A_{r2} = ?$

Práce eU vykonaná elektrickým polem při urychlení iontu o hmotnosti m mezi body A a B se rovná přírůstku jeho kinetické energie $\frac{1}{2}mv^2$; dostáváme proto

$$eU = \frac{1}{2}mv^2. \tag{a}$$

Na iont neonu pohybující se v magnetickém poli působí kolmo ke směru jeho pohybu magnetická síla o velikosti $F_m = evB$, která uděluje iontu o hmotnosti m dostředivé zrychlení o velikosti $a = \frac{v^2}{r}$. Podle druhého pohybového zákona platí

$$m\frac{v^2}{r} = evB, \quad \text{odkud} \quad v = \frac{eBr}{m}. \tag{b}$$

Dosazením z (b) do (a) dostáváme vztah

$$eU = \frac{1}{2}m\frac{e^2B^2r^2}{m^2},$$

ze kterého pro hmotnost m iontu izotopu neonu vyplývá

$$m = \frac{eB^2r^2}{2U}.$$

Relativní atomová hmotnost iontu izotopu neonu je pak

$$A_r = \frac{m}{m_u} = \frac{eB^2r^2}{2Um_u}.$$

Číselně $A_{r1} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}14^2 \cdot 0{,}146^2}{2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}} \doteq 20{,}1 \doteq 20$

$$A_{r2} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}14^2 \cdot 0{,}153^2}{2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}} \doteq 22{,}1 \doteq 22.$$

První nuklid má relativní atomovou hmotnost 20, druhý 22.

Poznámky

1. Úloha ukazuje princip hmotnostního spektrometru, kterým lze zjistit relativní atomové hmotnosti izotopů daného prvku.
2. Neon, který se vyskytuje v přírodě, se skládá z 90 % nuklidu $^{20}_{10}$Ne a 9,73 % nuklidu $^{22}_{10}$Ne. Zbytek 0,27 % tvoří nuklid $^{21}_{10}$Ne.

Úloha 159

Při setkání elektronu s pozitronem (částice, která má stejnou klidovou hmotnost jako elektron, má však kladný náboj) obě částice zmizí a místo nich se objeví zpravidla dva fotony záření gama. Určete vlnovou délku tohoto záření. Předpokládáme, že kinetická energie elektronu a pozitronu je v porovnání s klidovou energií obou částic malá. Klidová hmotnost elektronu (popř. pozitronu) je $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, rychlost světla $3 \cdot 10^8$ m · s^{-1}, Planckova konstanta $6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s.

Řešení

$m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, $c = 3 \cdot 10^8$ m · s^{-1}, $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; $\lambda = ?$

Při setkání elektronu s pozitronem se klidová energie těchto částic přemění v energii dvou fotonů záření gama. Platí proto

$$2m_0c^2 = 2hf, \quad \text{odkud} \quad f = \frac{m_0c^2}{h}.$$

Pro vlnovou délku λ záření gama pak dostáváme

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{c}{\frac{m_0c^2}{h}} = \frac{h}{m_0c}.$$

$$\text{Číselně} \quad \lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8}\ \text{m} \doteq 2{,}4 \cdot 10^{-12}\ \text{m}.$$

Poznámka

Energie fotonů záření gama může být obecně větší než součet klidových energií elektronu a pozitronu, neboť elektron a pozitron mohou mít před srážkou také určitou kinetickou energii.

8

ASTROFYZIKA

ASTROFYZIKA

Astrofyzika je vědní obor, který zkoumá fyzikální a chemické vlastnosti kosmických těles a mezihvězdného prostředí. Přehled základních poznatků astrofyziky nalezne čtenář v knize [37] na str. 451.

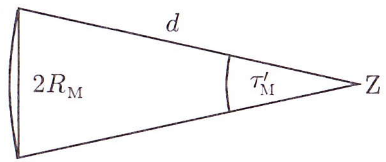
ÚLOHY

Úloha 160

Pod jakým úhlem vidí průměr Měsíce pozorovatel na Zemi a naopak pod jakým úhlem vidí průměr Země pozorovatel na Měsíci? Poloměr Měsíce je $1{,}74 \cdot 10^6$ m, poloměr Země $6{,}38 \cdot 10^6$ m a střední vzdálenost Měsíce od Země je 384 000 km.

Řešení

$R_{\mathrm{M}} = 1{,}74 \cdot 10^6$ m, $R_{\mathrm{Z}} = 6{,}38 \cdot 10^6$ m, $d = 384\,000$ km $= 3{,}84 \cdot 10^8$ m;
$\tau_{\mathrm{M}} = ?$, $\tau_{\mathrm{Z}} = ?$



Obr. 79

a) *Výpočet úhlového průměru Měsíce pozorovaného ze Země*

Průměr Měsíce $2R_{\mathrm{M}}$ je v porovnání se střední vzdáleností d Měsíce od Země malý; proto ho můžeme přibližně nahradit obloukem kružnice, jejíž střed leží na Zemi (obr. 79). Úhlový průměr Měsíce v míře obloukové (v radiánech) je pak

$$\tau'_{\mathrm{M}} = \frac{2R_{\mathrm{M}}}{d}.$$

V míře stupňové má tento úhel velikost

$$\tau_{\mathrm{M}} = \frac{180}{\pi}\tau'_{\mathrm{M}}.$$

Číselně $$\tau'_{\mathrm{M}} = \frac{2 \cdot 1{,}74 \cdot 10^6}{3{,}84 \cdot 10^8}\ \mathrm{rad} \doteq 9{,}06 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{rad}$$

$$\tau_{\mathrm{M}} = \left(\frac{180}{3{,}14} \cdot 9{,}06 \cdot 10^{-3}\right)^{\circ} \doteq 0{,}52^{\circ} = 0^{\circ}31'.$$

b) *Výpočet úhlového průměru Země pozorovaného z Měsíce*

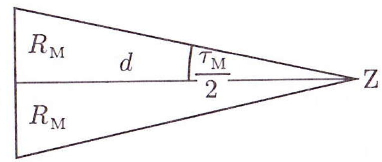
Analogickými výpočty dostáváme

$$\tau'_{\mathrm{Z}} = \frac{2R_{\mathrm{Z}}}{d} \quad \text{a} \quad \tau_{\mathrm{Z}} = \frac{180}{\pi}\tau'_{\mathrm{Z}}.$$

Číselně $$\tau'_{\mathrm{Z}} = \frac{2 \cdot 6{,}38 \cdot 10^6}{3{,}84 \cdot 10^8}\ \mathrm{rad} \doteq 3{,}32 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{rad}$$

$$\tau_{\mathrm{Z}} = \left(\frac{180}{3{,}14} \cdot 3{,}32 \cdot 10^{-2}\right)^{\circ} \doteq 1{,}9^{\circ} = 1^{\circ}54'.$$

Pozorovatel na Zemi vidí průměr Měsíce pod úhlem $31'$, pozorovatel na Měsíci vidí průměr Země pod úhlem $1^{\circ}54'$.



Obr. 80

Poznámka

Úhlový průměr Měsíce můžeme vypočítat přímo ve stupních podle obr. 80. Z obr. 80 vyplývá

$$\mathrm{tg}\,\frac{\tau_{\mathrm{M}}}{2} = \frac{R_{\mathrm{M}}}{d}.$$

Číselně $$\mathrm{tg}\,\frac{\tau_{\mathrm{M}}}{2} = \frac{1{,}74 \cdot 10^6}{3{,}84 \cdot 10^8} \doteq 4{,}53 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{\tau_{\mathrm{M}}}{2} = 0{,}26^{\circ}$$

$$\tau_{\mathrm{M}} = 2 \cdot 0{,}26^{\circ} = 0{,}52^{\circ} \doteq 0^{\circ}31'$$

Analogicky pro úhlový průměr Země dostáváme

$$\mathrm{tg}\,\frac{\tau_{\mathrm{Z}}}{2} = \frac{R_{\mathrm{Z}}}{d}.$$

Číselně $\operatorname{tg}\frac{\tau_Z}{2} = \frac{6{,}38\cdot 10^6}{3{,}84\cdot 10^8} \doteq 1{,}66\cdot 10^{-2}$

$$\frac{\tau_Z}{2} \doteq 0{,}95^\circ$$

$$\tau_Z = 2\cdot 0{,}95^\circ = 1{,}9^\circ \doteq 1^\circ 54'$$

Úloha 161

Určete dobu, po kterou se k nám šíří světlo z galaxie M 31 ze souhvězdí Andromedy, která je od nás vzdálená 680 kpc. Převodní vztah mezi jednotkou pc (paprsek) používanou v astronomii a kilometry je 1 pc $\doteq$ $\doteq 30{,}9\cdot 10^{12}$ km, převodní vztah mezi rokem a sekundou je 1 r $\doteq 3{,}15\cdot 10^7$ s. Rychlost světla ve vakuu je $3\cdot 10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Řešení

$s = 680\ \mathrm{kpc} = 680\cdot 30{,}9\cdot 10^{18}\ \mathrm{m} \doteq 2{,}1\cdot 10^{22}\ \mathrm{m}$, $c = 3\cdot 10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $t = ?$

Hledanou dobu vypočteme ze vztahu

$$t = \frac{s}{c}.$$

Číselně $t = \frac{2{,}1\cdot 10^{22}}{3\cdot 10^8}\ \mathrm{s} = 7\cdot 10^{13}\ \mathrm{s} = \frac{7\cdot 10^{13}}{3{,}15\cdot 10^7}\ \mathrm{r} \doteq 2{,}2\cdot 10^6\ \mathrm{r}.$

Světlo z galaxie M 31 ze souhvězdí Andromedy se k nám šíří po dobu 2,2 milionu roků.

Úloha 162

Určete hustotu látky neutronové hvězdy, která má poloměr 10 km a hmotnost $1{,}4M_\odot$. Veličina $M_\odot \doteq 2\cdot 10^{30}$ kg je hmotnost Slunce.

Řešení

$r = 10\ \mathrm{km} = 10^4\ \mathrm{m}$, $m = 1{,}4M_\odot \doteq 1{,}4\cdot 2\cdot 10^{30}\ \mathrm{kg} \doteq 2{,}8\cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$; $\varrho = ?$

Budeme-li předpokládat, že neutronová hvězda má tvar koule o objemu $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, dostaneme pro hustotu ϱ její látky vztah

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3m}{4\pi r^3}.$$

Číselně $\varrho = \frac{3\cdot 2{,}8\cdot 10^{30}}{4\cdot 3{,}14\cdot (10^4)^3}\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}} \doteq$

$$= 6{,}69\cdot 10^{17}\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}} \doteq 7\cdot 10^{17}\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}.$$

Hustota látky dané neutronové hvězdy je asi $7\cdot 10^{17}\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

Poznámka
Vysokou hustotu látky neutronové hvězdy lze vysvětlit těsným uspořádáním neutronů, ze kterých se neutronová hvězda skládá. Na Zemi se látka v tomto stavu nevyskytuje.

Úloha 163

Některé neutronové hvězdy se otáčejí s frekvencí až 640 Hz. Určete velikost obvodové rychlosti bodů, které leží na jejich rovníku. Poloměr neutronové hvězdy je 10 km.

Řešení

$f = 640$ Hz, $r = 10\ \mathrm{km} = 10^4\ \mathrm{m}$; $v = ?$

Pro velikost rychlosti bodů ležících na rovníku rotující neutronové hvězdy platí

$$v = 2\pi r f.$$

Číselně $v = 2\cdot 3{,}14\cdot 10^4\cdot 640\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 4\cdot 10^7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} =$

$$= 4\cdot 10^4\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}.$$

Body na rovníku dané neutronové hvězdy mají obvodovou rychlost o velikosti 40 000 $\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

Poznámka
Pro porovnání připomeňme, že body ležící na rovníku naší Země mají obvodovou rychlost o velikosti 470 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (viz Sbírku řešených úloh I, úloha 41, str. 44).

Úloha 164

První přistání lidí na Měsíc se uskutečnilo dne 20. 7. 1969. Jako první vstoupil na měsíční povrch americký kosmonaut N. A. Armstrong a 18 minut poté E. E. Aldrin.
Aldrin se skafandrem a zásobou kyslíku měl hmotnost 180 kg. Určete gravitační sílu, která působila na Aldrina na povrchu Měsíce, a porovnejte ji s tíhovou silou, která by působila na téhož kosmonauta na povrchu Země.

Hmotnost Měsíce je 7,4 · 10^{22} kg, poloměr Měsíce 1,7 · 10^6 m a gravitační konstanta 6,67 · 10^{-11} N · m² · kg^{-2}. Tíhové zrychlení na povrchu Země je přibližně 10 m · s^{-2}.

Řešení

$m = 180$ kg, $M_\mathrm{M} \doteq 7{,}4 \cdot 10^{22}$ kg, $R_\mathrm{M} = 1{,}7 \cdot 10^6$ m,
$\varkappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $F_\mathrm{M} = ?$, $F_\mathrm{Z} = ?$, $\dfrac{F_\mathrm{Z}}{F_\mathrm{M}} = ?$

Velikost gravitační síly F_M, kterou byl Aldrin přitahován k Měsíci, je určena Newtonovým gravitačním zákonem

$$F_\mathrm{M} = \varkappa \frac{mM_\mathrm{M}}{R_\mathrm{M}^2}.$$

Na Aldrina by na povrchu Země působila tíhová síla o velikosti

$$F_\mathrm{Z} = mg.$$

Číselně

$$F_\mathrm{M} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{180 \cdot 7{,}4 \cdot 10^{22}}{\left(1{,}7 \cdot 10^6\right)^2}\ \mathrm{N} \doteq 307\ \mathrm{N} \doteq 300\ \mathrm{N}.$$

$$F_\mathrm{Z} = 180 \cdot 10\ \mathrm{N} = 1\,800\ \mathrm{N}.$$

Poměr obou sil je tedy

$$\frac{F_\mathrm{Z}}{F_\mathrm{M}} \doteq \frac{1\,800\ \mathrm{N}}{300\ \mathrm{N}} = 6.$$

Na Měsíci působila na Aldrina gravitační síla 300 N. Tato síla je přibližně šestkrát menší než tíhová síla, která by působila na téhož kosmonauta na Zemi.

Poznámka
Kdybychom neznali tíhové zrychlení g na povrchu Země, museli bychom velikost tíhové síly F_Z, kterou je kosmonaut přitahován k Zemi, vypočítat přibližně také pomocí Newtonova gravitačního zákona

$$F_\mathrm{Z} = \varkappa \frac{mM_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}^2}.$$

V tomto vztahu je m hmotnost kosmonauta, M_Z hmotnost Země a R_Z její poloměr.

Úloha 165

Určete hmotnost planety Mars, jejíž měsíc Deimos obíhá kolem planety ve vzdálenosti 23 460 km za dobu 1,263 dne. Gravitační konstanta je 6,67 · 10^{-11} N · m² · kg^{-2}.

Řešení

$r = 23\,460\ \mathrm{km} = 2{,}346 \cdot 10^7\ \mathrm{m}$, $\varkappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$,
$T = 1{,}263\ \mathrm{d} = 1{,}263 \cdot 24 \cdot 3\,600\ \mathrm{s} \doteq 1{,}091 \cdot 10^5\ \mathrm{s}$; $M = ?$

Podle gravitačního zákona působí na měsíc Deimos gravitační síla o velikosti

$$F_\mathrm{D} = \varkappa \frac{mM}{r^2},$$

kde m je hmotnost měsíce Deimos, M hmotnost Marsu a r vzdálenost měsíce Deimos od planety Mars. Tato síla uděluje měsíci dostředivé zrychlení o velikosti

$$a_\mathrm{d} = \frac{v^2}{r}.$$

Z druhého pohybového zákona pak dostáváme

$$F_g = ma_\mathrm{d}$$

$$\varkappa \frac{mM}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

$$\text{a odtud} \quad v = \sqrt{\varkappa \frac{M}{r}}. \qquad \text{(a)}$$

V tomto vztahu je v velikost rychlosti měsíce Deimos, r jeho vzdálenost od středu Marsu, M hledaná hmotnost Marsu a $\varkappa$ gravitační konstanta. Pro velikost rychlosti v měsíce Deimos pohybujícího se rovnoměrným pohybem po kružnici platí také

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \qquad \text{(b)}$$

kde T je doba oběhu měsíce Deimos kolem Marsu. Porovnáním (a) a (b) dostáváme

$$\sqrt{\varkappa \frac{M}{r}} = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\varkappa\frac{M}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

$$\text{a odtud}\quad M = \frac{4\pi^2 r^3}{\varkappa T^2}.$$

Jednotková zkouška

$$[M] = \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}^{-2}\cdot\mathrm{s}^2} = \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}^{-2}\cdot\mathrm{s}^2} = \mathrm{kg}.$$

Číselně

$$M = \frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot\left(2{,}346\cdot 10^7\right)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\left(1{,}091\cdot 10^5\right)^2}\ \mathrm{kg} \doteq 6{,}41\cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}.$$

Planeta Mars má hmotnost asi $6{,}41\cdot 10^{23}$ kg.

Poznámka
Podle tabulek je hmotnost Země $M_Z = 5{,}976\cdot 10^{24}$ kg. Poměr hmotnosti Marsu M a hmotnosti Země M_Z je proto

$$\frac{M}{M_Z} = \frac{6{,}41\cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}}{5{,}976\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}} \doteq 0{,}107 \doteq 0{,}1.$$

Mars má tedy asi desetkrát menší hmotnost než Země.

Úloha 166

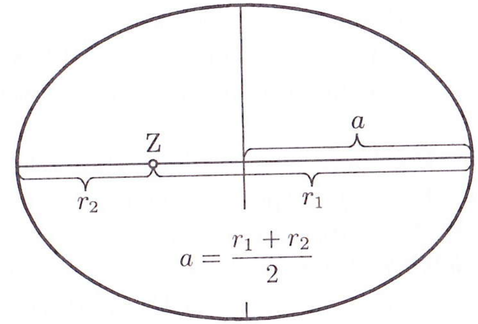
Družice obíhá kolem Země po elipse. Její největší vzdálenost od povrchu Země je 35 810 km a nejmenší vzdálenost 325 km. Vypočtěte oběžnou dobu družice, jestliže doba oběhu Měsíce kolem Země je 27,3 dne, největší vzdálenost Měsíce od středu Země je 406 730 km a nejmenší vzdálenost 356 400 km. Poloměr Země je 6 378 km.

Řešení
$h_{D1} = 35\,810$ km, $h_{D2} = 325$ km, $r_{M1} = 406\,730$ km, $r_{M2} = 356\,400$ km, $R_Z = 6\,378$ km, $T_M = 27{,}3$ d; $T_D = ?$

Podle třetího Keplerova zákona platí

$$\frac{T_D^2}{T_M^2} = \frac{a_D^3}{a_M^3},\quad \text{odkud}\quad T_D = \sqrt{\left(\frac{a_D}{a_M}\right)^3}\,T_M.$$

V tomto vztahu je T_D doba oběhu družice, T_M doba oběhu Měsíce, a_D délka velké poloosy eliptické dráhy družice a a_M délka velké poloosy eliptické dráhy Měsíce.



Obr. 81

Pro délky velkých poloos a_D a a_M družice a Měsíce podle obr. 81 platí

$$a_D = \frac{r_{D1} + r_{D2}}{2}\quad \text{a}\quad a_M = \frac{r_{M1} + r_{M2}}{2},$$

kde $r_{D1} = h_{D1} + R_Z$ a r_{M1} jsou maximální vzdálenosti družice a Měsíce od středu Země a $r_{D2} = h_{D2} + R_Z$ a r_{M1} jsou analogické vzdálenosti minimální (R_Z je poloměr Země).

Číselně
$$r_{D1} = 35\,810\ \mathrm{km} + 6\,378\ \mathrm{km} = 42\,188\ \mathrm{km}$$
$$r_{D2} = 325\ \mathrm{km} + 6\,378\ \mathrm{km} = 6\,703\ \mathrm{km}$$
$$a_D = \frac{42\,188 + 6\,703}{2}\ \mathrm{km} \doteq 2{,}44\cdot 10^4\ \mathrm{km}$$
$$a_M = \frac{406\,730 + 356\,400}{2}\ \mathrm{km} \doteq 3{,}82\cdot 10^5\ \mathrm{km}$$
$$T_D = \sqrt{\left(\frac{2{,}44\cdot 10^4}{3{,}82\cdot 10^5}\right)^3}\cdot 27{,}3\ \mathrm{d} \doteq 0{,}44\ \mathrm{d} \doteq 10{,}6\ \mathrm{h}.$$

Oběžná doba družice je asi 10,6 hodin.

Poznámka
Při řešení úlohy je třeba si uvědomit, že v úloze jsou dány vzdálenosti h_{D1} a h_{D2} družice od povrchu Země, a nikoliv od jejího středu. Vzdálenosti družice r_{D1} a r_{D2} od středu Země je proto třeba nejprve vypočítat.