

Rovnice, nerovnice a jejich soustavy

(lineární, kvadratické, iracionální)

Repetitorium z matematiky

Podzim 2011

Ivana Vaculová

A) Rovnice a jejich řešení

- Mnoho fyzikálních, technických a jiných úloh lze matematicky formulovat jako úlohu typu:

*Jsou dány výrazy $L(x)$ a $P(x)$ s proměnnou x . Určete hodnoty této proměnné z daného číselného oboru M , pro něž jsou si rovny hodnoty obou výrazů. Zapisujeme **ROVNICÍ**:*

$$\begin{array}{ccc} \text{levá strana rovnice} & L(x) = P(x) & \text{pravá strana rovnice} \\ & \text{neznámá} & \end{array}$$

Kořeny rovnice (x_k) = hodnoty neznámé, pro něž je rovnice splněna

Obor řešení rovnice (M) = číselný obor, ve kterém hledáme kořeny rovnice

Definiční obor rovnice (D) = podmnožina množiny M , v níž jsou definovány výrazy $L(x)$ a $P(x)$.

Obor pravdivosti rovnice (K): Množina všech kořenů rovnice, $K \subset D \subset M$

Postup řešení rovnic

1.1 ROZBOR – rovnici postupně upravujeme na rovnici, jejíž kořeny známe, nebo je snadno dokážeme určit.

Důsledkové (implikační) úpravy – každý kořen dané rovnice je také kořenem rovnice získané její úpravou.



Ekvivalentní úpravy – množina všech kořenů nové rovnice = množině všech kořenů zadané rovnice.

Postup řešení rovnic

Ekvivalentní úpravy:

- **Vzájemná výměna stran** rovnice
- **Přičtení** téhož čísla nebo výrazu s neznámou k oběma stranám rovnice.
- **Vynásobení** obou stran rovnice tímž číslem nebo výrazem s neznámou, který je definován a různý od nuly v celém oboru řešení .
- **Umocnění** obou stran rovnice přirozeným mocnitelem (jsou-li obě strany rovnice nezáporné v celém oboru řešení rovnice).
- **Odmocnění** obou stran rovnice přirozeným odmocnitelem (jestliže jsou obě strany rovnice nezáporné v celém oboru řešení).
- **Zlogaritmování** obou stran rovnice při témž základu, jsou-li obě strany rovnice kladné.

Postup řešení rovnic

1.2 ZÁVĚR ROZBORU – určíme množinu M' všech kořenů/řešení rovnice získané důsledkovými úpravami.

Množina $M' \subset M$ představuje všechna možná řešení dané rovnice.

1.3 ZKOUŠKA - zjistíme, které z prvků x_k množiny M' jsou kořeny dané rovnice:

- Postupně dosadíme každé z čísel x_k do levé i pravé strany rovnice.
- Platí-li $L(x_k) = P(x_k)$, je x_k kořenem dané rovnice.
- Výsledkem zkoušky je získání množiny K všech kořenů rovnice.
- Přitom platí: $K \subset M' \subset M$

1 LINEÁRNÍ ROVNICE

= každá rovnice, kterou lze upravit na tvar :

$$ax + b = 0, \quad \text{pro } \forall a, b \in R$$

Při řešení mohou nastat tři případy.

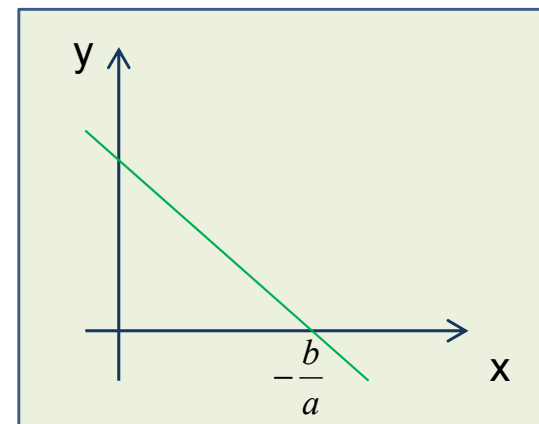
A) $a \neq 0 \Rightarrow K : \exists! x \in R$

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

$$K = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$$



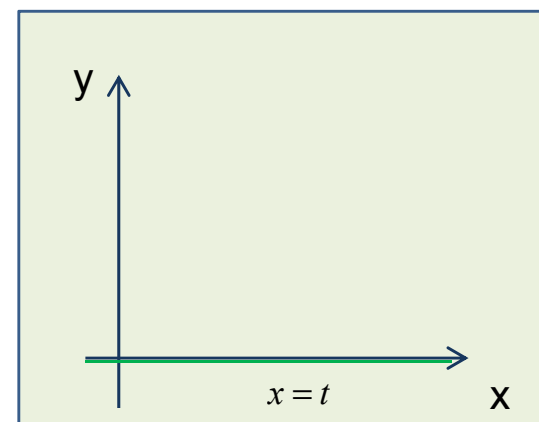
B) $a = 0 \wedge b = 0 \Rightarrow K : \forall x \in R$

$$ax + b = 0$$

$$0x = 0$$

$$x = t; t \in R$$

$$K = R$$



C) $a = 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow$ nemá řešení

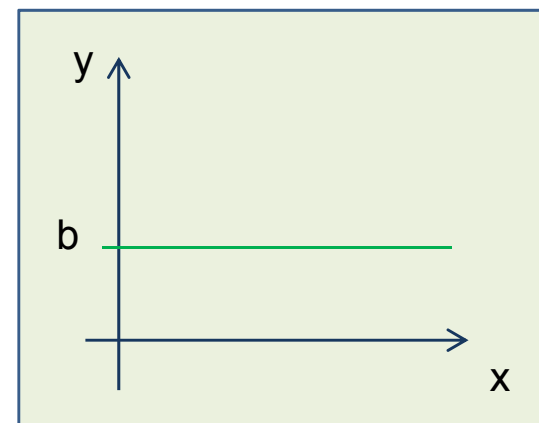
$$ax + b = 0$$

$$0x + b = 0$$

$$0x = -b$$

$$x = \{ \}$$

$$K = \{ \}$$



1. 1 Řešení rovnic v daném oboru

Př.: Zjistěte, zda má rovnice $3x + 5 = 3\sqrt{3}$ řešení v oboru

- a) přirozených čísel (N)
- b) celých čísel (Z)
- c) kladných čísel (R+)

Řešení:

$$3x + 5 = 3\sqrt{3}$$

$$3x = 3\sqrt{3} - 5$$

$$x = \frac{1}{3} \cdot (3\sqrt{3} - 5)$$

$$a) K = \{ \}$$

$$b) K = \{ \}$$

$$c) K = \left\{ \frac{1}{3} \cdot (3\sqrt{3} - 5) \right\}$$

1.2 Lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli

➤ Rovnice typu: $\frac{ax+b}{cx+d} = 0$

Řešení:

Stanovíme definiční obor (D) a po vyřešení rovnice zkontrolujeme, zda získané řešení vyhovují tomuto definičnímu oboru.

$$cx + d \neq 0 \Rightarrow ax + b = 0,$$

Úlohy: a) $\frac{3x-2}{x+5} = 2$

b) $\frac{3x+6}{x+2} = 3$

a) $\frac{3x+6}{x+2} = 5$

1.3 Lineární rovnice s absolutní hodnotou

➤ Při řešení vycházíme z definice absolutní hodnoty výrazu $M(x)$ obsahujícího proměnnou x , pro kterou platí:

$$|M(x)| = M(x), \quad \text{je-li } M(x) > 0$$

$$|M(x)| = 0, \quad \text{je-li } M(x) = 0$$

$$|M(x)| = -M(x), \quad \text{je-li } M(x) < 0$$

Řešení metodou intervalů:

- 1) Výrazy v absolutních hodnotách pokládáme rovny nule -> dostáváme tzv. **nulové body**.
- 2) Provedeme dílčí řešení pro každý interval, v němž nahrazujeme absolutní hodnoty výrazy bez absolutních hodnot, a to s ohledem na definici absolutní hodnoty.
- 3) Dostaneme tolik dílčích oborů pravdivosti K_i , kolik je intervalů.
- 4) Konečný obor pravdivosti K získáme sjednocením dílčích oborů pravdivosti.

2 KVADRATICKÉ ROVNICE

= každá rovnice, kterou lze vyjádřit ve tvaru :

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{pro } \forall a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

kvadratický člen

lineární člen

absolutní člen

Při řešení mohou nastat tři případy.

A) Ryze kvadratická rovnice

$$b = 0 \Rightarrow ax^2 + c = 0$$
$$ax^2 = -c$$
$$x^2 = -\frac{c}{a}$$
$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$-\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow K = \{ \}$

$-\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow K = \left\{ \pm \sqrt{-\frac{c}{a}} \right\}$

$-\frac{c}{a} = 0 \Rightarrow K = \{0\}$

B) Rovnice bez absolutního členu

$$c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = 0$$
$$x \cdot (ax + b) = 0$$
$$x_1 = 0 \vee x_2 = -\frac{b}{a}$$
$$K = \left\{ 0, -\frac{b}{a} \right\}$$

C) Obecná kvadratická rovnice

$$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$
$$D = b^2 - 4ac$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Je-li $D > 0 \Rightarrow$ rovnice má právě 2 různé kořeny.

Je-li $D = 0 \Rightarrow$ rovnice má 1 dvojnásobný kořen.

Je-li $D < 0 \Rightarrow$ rovnice nemá v \mathbb{R} řešení.

$$K = \left\{ \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \right\}$$

$$K = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$$

$$K = \{ \}$$

Vlastnosti kořenů kvadratické rovnice

Má-li rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, pro $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$

kořeny $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, platí:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Důkaz:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

2.1 Vlastnosti kořenů kvadratické rovnice

Pro rovnici $x^2 + px + q = 0$, (= normovaná rovnice, kde $p=b/a$, $q=c/a$)

platí:

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

} **Vietovy vzorce**

Důkazy:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} + \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \cdot \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{4q}{4} = q$$

$$x^2 + px + q = x^2 + (-x_1 - x_2)x + x_1x_2 = x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

$\Rightarrow x_1, x_2$ jsou kořeny dané rovnice

2.1 Vlastnosti kořenů kvadratické rovnice

Má-li rce $ax^2 + bx + c = 0$ kořeny x_1, x_2 , platí:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

kořenoví činitelé

Má-li rce $ax^2 + bx + c = 0$ dvojnásobný kořen $x_1 = x_2$, platí:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1)^2$$

Př.1: Na základě Vietových vzorců určete kořeny rovnice $x^2 + 7x + 12 = 0$.

Př.1: Najděte kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou čísla -3 a 8.

3 IRACIONÁLNÍ ROVNICE

= rovnice s neznámou v odmocněnci. Obsahují odmocniny z výrazů s neznámou. Upravujeme **neekvivalentními úpravami**, proto je **zkouška** nezbytnou součástí řešení těchto rovnic.

3.1 Rovnice obsahující jednu odmocninu

Př.: $1 + \sqrt{x+11} = x$

Řešení: $\sqrt{x+11} = x-1$ |²

$$x+11 = (x-1)^2$$

$$x+11 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x-5) \cdot (x+2) = 0$$

$$x_1 = 5, x_2 = -2,$$

Postup řešení:

1. Osamostatníme odmocninu
2. Umocníme obě strany rovnice (neekvivalentní úprava)
3. Dořešíme rovnice
4. Provedeme zkoušku

Zkouška:

$$L(5) = 1 + \sqrt{5+11} = 5 \quad L(-2) = 1 + \sqrt{-2+11} = 4$$

$$P(5) = 5 \quad P(-2) = -2$$

$$L(5) = P(5) \quad L(-2) \neq P(-2)$$

Závěr: $K = \{5\}$

3 IRACIONÁLNÍ ROVNICE

3.2 Rovnice obsahující dvě odmocniny

$$2 \cdot \sqrt{x+18} + \sqrt{4x-3} = 15$$

$$\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{x-2} = 2$$

3.3 Rovnice obsahující více odmocnin

$$x - \sqrt{x} - \sqrt{x \cdot \sqrt{x} - x} = 0$$

3.4 Řešení rovnic pomocí substituce

$$\sqrt{2 \cdot (x^2 + 3x + 6)^2 - 7} = x^2 + 3x + 7$$

B) Nerovnice a jejich řešení

Jsou dány výrazy $L(x)$ a $P(x)$ s proměnnou x . Určete hodnoty této proměnné z daného číselného oboru M , pro něž platí:

$$L(x) < P(x), \text{ resp. } L(x) > P(x)$$

$$L(x) \leq P(x), \text{ resp. } L(x) \geq P(x)$$

Tento zápis se nazývá **NEROVNICE**.

Ekvivalentní úpravy:

- **Vzájemná výměna stran** nerovnice se současnou **změnou znaménka**.
- **Přičtení** téhož čísla nebo výrazu s neznámou k oběma stranám rovnice.
- **Vynásobení** obou stran rovnice **kladným** číslem nebo výrazem s neznámou, který je definován a **kladný** v celém oboru řešení. **Znak nerovnosti se nemění.**
- **Vynásobení** obou stran rovnice **záporným** číslem nebo výrazem s neznámou, který je definován a **záporný** v celém oboru řešení. **Znak nerovnosti se změzí v obrácený.**
- **Umocnění** obou stran rovnice přirozeným mocnitelem (jsou-li obě strany rovnice nezáporné v celém oboru řešení rovnice). **Znak nerovnosti se nemění.**
- **Odmocnění** obou stran rovnice přirozeným odmocnitelem (jestliže jsou obě strany rovnice nezáporné v celém oboru řešení). **Znak nerovnosti se nemění.**
- **Zlogaritmování** obou stran rovnice při téměř základu **větším než 1**, jsou-li obě strany rovnice kladné v celém oboru řešení. **Znak nerovnosti se nemění.**

B) Nerovnice a jejich řešení

1 Lineární nerovnice

$$ax + b < 0, \text{ resp. } ax + b > 0$$

$$ax + b \leq 0, \text{ resp. } ax + b \geq 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

2 Lineární nerovnice v podílovém tvaru

3 Kvadratické nerovnice $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$

$$ax^2 + bx + c < 0, \text{ resp. } ax^2 + bx + c > 0$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0, \text{ resp. } ax^2 + bx + c \geq 0$$

Řešení: pomocí rozkladu kvadratického trojčlenu převedeme nerovnici na součinnový tvar a řešíme analogicky jako nerovnici v podílovém tvaru.

4 Nerovnice s absolutní hodnotou

Řešení: metodou intervalů

5 Iracionální nerovnice

Řešení: umocněním, případně substitucí.

$$\text{Př.: } 3x - 7 \leq 5x - 13$$

$$\text{Př.: } \frac{x-1}{2-x} \leq 1$$

$$\text{Př.: } x^2 - 6x - 27 > 0$$

$$\text{Př.: } \left| \frac{x-5}{x+1} \right| \leq 4$$

$$\text{Př.: } \sqrt{6-x} < 3x-4$$

C) Soustavy rovnic

- **Soustavy lineárních rovnic** – řešení metodou **dosazovací** nebo **sčítací**
- **Soustavy s kvadratickými rovnicemi** – řešení metodou **dosazovací**

Literatura

- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Odvárko, O. a kol. Funkce. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1996.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.

$$\frac{(2^{10} \cdot 3)^2}{2 \cdot 3^{13}} \cdot \left(\frac{81}{64}\right)^3 =$$

$$\frac{2x^5 y^3}{(2x^2 y)^2} \div \left(\frac{xy}{2xy^2}\right)^3 =$$

$$\left(\sqrt{2a} - \frac{2a}{a + \sqrt{2a}}\right) \div \left(\frac{\sqrt{2a} - 2}{a - 2}\right)$$

$$(x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16) \div (x + 2) =$$

$$2p^4 - p^3 + p - 2 =$$

$$xr - yr - x^2 + 2xy - y^2 =$$

$$(x + y)^4 - x^4 =$$

$$\left(a - \frac{4ab}{a+b} + b\right) \div \left(\frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a} - \frac{2ab}{a^2 - b^2}\right) =$$

$$\left(\frac{1}{2x-y} + \frac{3y}{y^2 - 4x^2} - \frac{2}{2x+y}\right) \div \left(\frac{4x^2 + y^2}{4x^2 - y^2} + 1\right) =$$

$$\frac{1 - \frac{n-1}{m}}{\frac{n}{m+1}} =$$

$$x - \frac{x-1}{3} - \frac{2x-5}{5} + \frac{x+8}{6} = 7$$

$$3 \cdot (x+5) - 4x = 5 - x$$

$$\frac{4}{(x-1) \cdot (x+3)} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{x+2}{x+3}$$

$$|2x+1| = |x-1| + 2$$

$$\text{a) } x^2 + 10x + 24 = 0$$

$$\text{b) } x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\text{c) } x^2 + x - 12 = 0$$

$$\text{a) } 2x^2 + 11x + 12 = 0$$

$$\text{b) } 4x^2 - 12x + 25 = 0$$

$$\text{a) } \sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$$

$$\text{b) } \sqrt{x^2 - 3x + 11} = 4x^2 - 12x + 11$$

$$\text{a) } \frac{2}{3}x + 1 > 2 \cdot (2x+1) - 3x$$

$$\text{b) } |x-1| + |2-x| > 3+x$$