

Posloupnosti

Repetitorium z matematiky

Podzim 2011

Ivana Vaculová

Osnova:

1 Posloupnosti

1.1 Vlastnosti posloupností

2 Aritmetická posloupnost

3 Geometrická posloupnost

4 Limita posloupnosti

1 Posloupnosti

- Posloupnost je funkce, která je definovaná v množině přirozených čísel \mathbf{N} .

A) Konečná posloupnost, $D(f) =$ je množina prvních k přirozených čísel

$$\{a_n\}_{n=1}^k = a_1, a_2, a_3 \dots a_k$$

B) Nekonečná posloupnost, $D(f) = \mathbf{N}$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, a_3 \dots a_n$$

Úlohy

Př.1: Napište prvních pět členů posloupnosti dané vzorcem pro n-tý člen:

a) $(3n)_{n=1}^{\infty}$

b) $\left(\frac{n-1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

c) $(0,5 + 0,5 \cdot (-1)^n)_{n=1}^{\infty}$

d) $((n-1)n)_{n=1}^{\infty}$

Zadáno vzorcem pro n-tý člen

Př.2: Zapište dané posloupnosti vzorcem pro n-tý člen:

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

b) 1, 4, 9, 16, 25

c) 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5

d) 3, -3, 3, -3, 3, -3, 3, -3, 3, -3

e) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \dots$

Př.3: Je dána posloupnost $(n^2 + 2n + 1)_{n=1}^{\infty}$. Rozhodněte, zda číslo 223 je členem této posloupnosti.

Zadání posloupnosti rekurentním vzorcem

= jsou zadány první členy posloupnosti a vztah pro výpočet dalších členů posloupnosti pomocí členů předcházejících

$$\begin{array}{l} \text{Např.: } a_1 = 4 \\ a_{n+1} = -2a_n \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} a_2 = -2a_1 = -8 \\ a_3 = -2a_2 = 16 \\ a_4 = -2a_3 = -32 \end{array}$$

Úlohy

Př.1: Napište prvních pět členů posloupnosti určené rekurentně:

$$a) \quad a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$b) \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$c) \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$d) \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

1.1 Vlastnosti posloupností

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá:

- **rostoucí** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$
- **klesající** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$
- **nerostoucí** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$
- **neklesající** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$
- **omezená shora** \Leftrightarrow existuje takové $h \in \mathbf{R}$, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ je $a_n \leq h$
- **omezená zdola** \Leftrightarrow existuje takové $d \in \mathbf{R}$, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ je $a_n \geq d$
- **omezená** \Leftrightarrow posloupnost je omezená shora i zdola zároveň

Úlohy

Př.1: Rozhodněte, která z daných posloupností je rostoucí či klesající:

$$a) \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad a_n = (-2)^n$$

$$b) \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad b_n = \frac{n}{n+1}$$

2 Aritmetická posloupnost

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **aritmetická**, právě když existuje takové $d \in \mathbf{R}$, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ je :

$$a_{n+1} = a_n + d$$

diference aritmetické
posloupnosti

Dále platí:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= d \\ a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ a_s &= a_r + (s - r)d \end{aligned}$$

Pro **součet** s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, tj. pro $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, platí:

$$s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

Úlohy

Př.1: Vypište první 3 členy aritmetické posloupnosti, ve které platí:

$$a) \quad a_1 = 4, \quad d = -1$$

$$b) \quad a_1 = 0,5, \quad d = -3$$

$$c) \quad a_5 = 6, \quad d = 2$$

$$d) \quad a_5 = 7, \quad a_9 = 11,$$

Př.2: Určete součet prvních dvanácti členů aritmetické posloupnosti, pro kterou platí:

$$a) \quad a_1 = 6, \quad a_{12} = 28$$

$$b) \quad a_1 = 0, \quad d = 1,5$$

$$c) \quad a_1 = 2, \quad a_8 = -19$$

$$d) \quad a_4 = 7, \quad a_8 = -1$$

Př.3: Vypočítejte součet všech dvojciferných přirozených čísel.

3 Geometrická posloupnost

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **geometrická**, právě když existuje takové $q \in \mathbf{R}$, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ je :

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Kvocient geometrické
posloupnosti

Dále platí:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$a_s = a_r \cdot q^{s-r}$$

Pro **součet** s_n prvních n členů geometrické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, s kvocientem q platí:

a) je-li $q = 1$, pak

$$s_n = n \cdot a_1$$

b) Je-li $q \neq 1$, pak

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Úlohy

Př.1: Vypočtěte kvocient dané geometrické posloupnosti a určete členy a_5 a a_8 :

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad a_1 = 6, \quad a_2 = 24$$

Př.2: Vypočtěte kvocienty daných geometrických posloupností a určete první 3 členy.

$$a) \left(\frac{2}{(-2)^n} \right)_{n=1}^{\infty}$$

$$b) (2^n \cdot 3^{2-n})_{n=1}^{\infty}$$

Př.3: Určete součet prvních deseti členů geometrické posloupnosti, pro kterou platí:

$$a) \quad a_1 = -2, \quad a_2 = 4$$

$$b) \quad a_1 = 6, \quad a_2 = 24$$

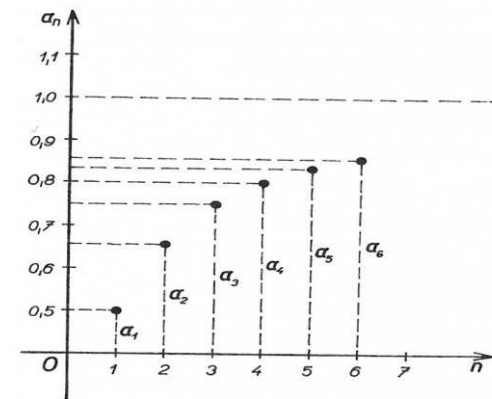
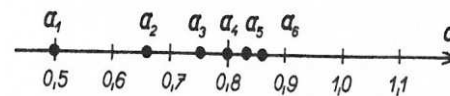
4 Limita posloupnosti

Pro každou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ může nastat jeden z těchto tří typových případů:

a) S rostoucím n se členy posloupnosti neomezeně blíží k určitému $a \in \mathbf{R}$, pak a je **vlastní limitou** posloupnosti.

Např.:

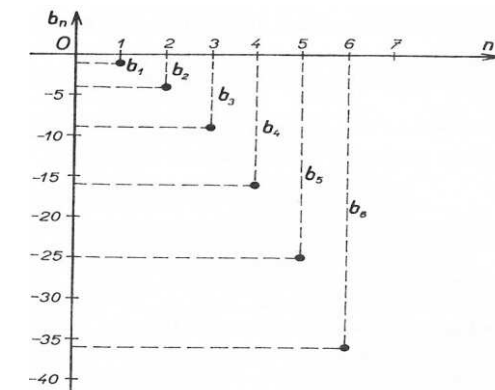
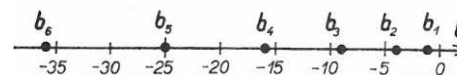
$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{n}{n+1} \right)_{n=1}^{\infty}$$



b) S rostoucím n se členy posloupnosti blíží k $+\infty$ nebo $-\infty$, pak říkáme, že posloupnost má **nevlastní limitu $+\infty$ nebo $-\infty$** .

Např.:

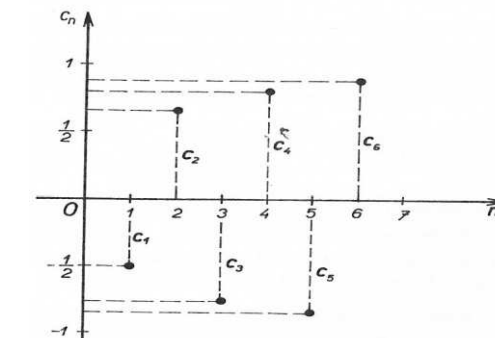
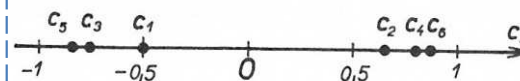
$$(b_n)_{n=1}^{\infty} = (-n^2)_{n=1}^{\infty}$$



c) S rostoucím n se členy posloupnosti **neblíží** ani k $a \in \mathbf{R}$, ani k $+\infty$ nebo $-\infty$, pak říkáme, že posloupnost **nemá** ani vlastní, ani nevlastní limitu.

Např.:

$$(c_n)_{n=1}^{\infty} = \left((-1)^n \frac{n}{n+1} \right)_{n=1}^{\infty}$$



Věty o limitách posloupností

- Pokud $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je:

- aritmetická posloupnost, kde $d = 0, a_1 = a$

- geometrická posloupnost, kde $q = 1, a_1 = a$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

- Pokud je u aritmetické posloupnosti $d \neq 0 \Rightarrow$ nemá vlastní limitu.

- Pokud pro geometrickou posloupnost platí:

$$|q| < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$|q| > 1 \text{ nebo } q = -1 \quad \Rightarrow \quad \text{nemá vlastní limitu}$$

- Při výpočtu limit využíváme následující vztahy:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0).$$

$$\text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left((-1)^n \cdot \frac{1}{n} \right) = 0$$

Úlohy

Př.1: Určete limity:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{6n + 5}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 1}{n^2 + 5}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 1}{3n - 5} \right)^3$$

Literatura

- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Odvárko, O. Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady, Praha: Prometheus, 1996.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- Vošický Zdeněk. Matematika v kostce pro střední školy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.