

8. Parametrické vyjádření a obecná rovnice přímky a roviny

Repetitorium z matematiky

Podzim 2011

Ivana Vaculová

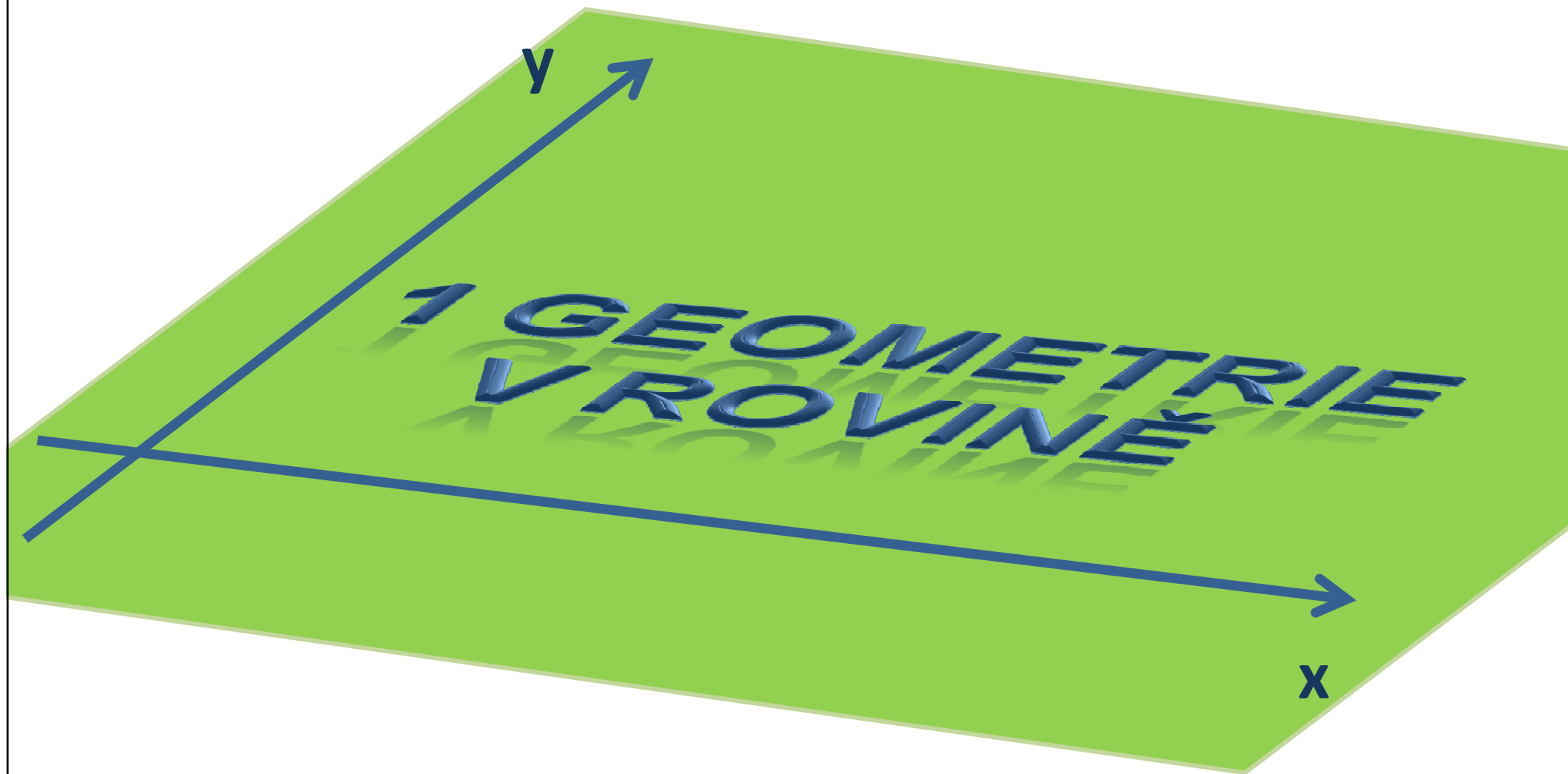
Osnova:

1 Geometrie v rovině

- 1. 1 Parametrické vyjádření přímky
- 1. 2 Obecná rovnice přímky
- 1. 3 Vzájemná poloha přímek

2 Geometrie v prostoru

- 2. 1 Parametrické vyjádření přímky
- 2. 2 Parametrické vyjádření roviny
- 2. 3 Obecná rovnice roviny
- 2. 4 Vzájemná poloha přímek
- 2. 5 Vzájemná poloha rovin
- 2. 6 Vzájemná poloha přímky a roviny



1.1 Parametrické vyjádření přímky

- Každé dva body **A**, **B** určují přímku **AB**
- Vektor $\mathbf{u} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$ se nazývá **směrový vektor** přímky **AB**
- **Rovnice**

$$X = A + tu, \quad \text{kde } t \in R$$

se nazývá **parametrická rovnice** nebo také **parametrické vyjádření** přímky určené bodem **A** a vektorem **u**, tj. $p(\mathbf{A}, \mathbf{u})$.
Proměnná t se nazývá **parametr**.

Body **X**, **A** a vektor **u** můžeme vyjádřit pomocí souřadnic:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} & [x, y] \\ \mathbf{A} & [a_1, a_2] \\ \mathbf{u} & = (u_1, u_2). \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x & = a_1 + tu_1, \\ y & = a_2 + tu_2, \quad \text{kde } t \in R \end{aligned}$$

Př.1: Napište parametrické vyjádření přímky AB:

a) A [1,-1] a B[2,3],

b) A [2,-3] a B[0,2].

Př.2: Zjistěte, zda bod C leží na přímce AB:

a) A [1, 2], B [-1, 3], C [5, 0]

b) A [3, 1], B [1, 5], C [-1, 2]

Př.3: Zjistěte, zda jsou vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5$ směrovými vektory přímky AB, kde A [1, 3], B[-1, 5],

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2)$$

$$\mathbf{v}_2 = (3, -3)$$

$$\mathbf{v}_3 = (1, -1)$$

$$\mathbf{v}_4 = (2, 2)$$

$$\mathbf{v}_5 = (2, -2)$$

1.2 Obecná rovnice přímky

Rovnice

$$p : ax + by + c = 0,$$

kde alespoň jedno z čísel **a**, **b**, je nenulové, se nazývá **obecná rovnice přímky**.

- Vektor $\mathbf{n} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ se nazývá **normálový vektor přímky p** a je kolmý ke směrovému vektoru \mathbf{u} přímky p.
- Dvě přímky **p**, **q** jsou totožné právě tehdy, je-li obecná rovnice přímky **p** násobkem obecné rovnice přímky **q**.
- Dvě přímky **p**, **q** jsou rovnoběžné právě tehdy, je-li normálový vektor přímky **p** násobkem normálového vektoru přímky **q**.

Př.1: Napište obecnou rovnici přímky procházející body A [1, 3] a B[-2,1].



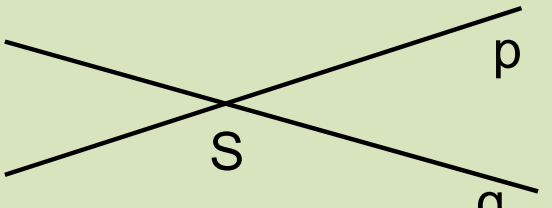
- Postup:
1. Určíme směrový vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$
 2. Určíme normálový vektor $\mathbf{n} = (-u_2, u_1)$
 3. Napíšeme obecnou rovnici přímky, do které dosadíme koeficienty $a = -u_2$, $b = u_1$
 4. Do rovnice dosadíme jeden z bodů A, B a vypočítáme koeficient c.
 5. Napíšeme obecnou rovnici přímky.

Př.2: Napište rovnici přímky s normálovým vektorem \mathbf{n} , která obsahuje bod A:

a) $\mathbf{n} = (1, 3)$, A [-1, 5]

b) $\mathbf{n} = (2, -1)$, A [3, 0]

1.3 Vzájemná poloha **přímek** v rovině

Obrázek	Vzájemná poloha	Příklad
 <p style="text-align: center;">$p = q$</p>	<p>Přímky jsou totožné $p \parallel q$</p>	<p>p: $2x + 3y - 1 = 0$ q: $4x + 6y - 2 = 0$</p>
	<p>Přímky jsou rovnoběžné různé $p \parallel q \wedge p \neq q$</p>	<p>p: $2x + 3y - 1 = 0$ q: $4x + 6y - 3 = 0$</p>
	<p>Přímky jsou různoběžné $p \nparallel q \wedge \exists! S : S \in p \wedge S \in q$</p>	<p>p: $2x + 3y - 1 = 0$ q: $4x + 1y - 3 = 0$</p>

Př.1: Určete vzájemnou polohu přímek p, q:

a) p: $2x - y + 1 = 0$

q: $3x + 2 = 0$

b) p: $x + 2y + 1 = 0$

q: $2x + y - 1 = 0$

c) p: $3x - y + 1 = 0$

q: $6x - 2y + 1 = 0$

d) p: $2x + 3y - 4 = 0$

q: $-x - \frac{3}{2}y + 2 = 0$



A 3D coordinate system is shown with three axes: x, y, and z. The x-axis points to the right, the y-axis points upwards, and the z-axis points towards the bottom-left. A green plane is depicted, extending from the origin and following the y and z axes. The text "2 GEOMETRIE V PROSTORU" is written in large, blue, 3D block letters on the green plane. The text is arranged in two lines: "2 GEOMETRIE" on the top line and "V PROSTORU" on the bottom line. The letters have a slight shadow on the white surface below them.

2 GEOMETRIE V PROSTORU

2.1 Parametrické vyjádření přímky

- Každé dva body **A**, **B** určují přímku **AB**
- Vektor $\mathbf{u} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$ se nazývá **směrový vektor** přímky **AB**
- **Rovnice**

$$p: X = A + tu, \quad \text{kde } t \in R$$

se nazývá **parametrická rovnice** nebo také **parametrické vyjádření** přímky určené bodem **A** a vektorem **u**, tj. $p(\mathbf{A}, \mathbf{u})$.
Proměnná t se nazývá **parametr**.

Body **X**, **A** a vektor **u** můžeme vyjádřit pomocí souřadnic:

$$\mathbf{X} [x, y, z]$$

$$\mathbf{A} [a_1, a_2, a_3]$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3).$$



$$x = a_1 + tu_1,$$

$$y = a_2 + tu_2,$$

$$z = a_3 + tu_3, \quad \text{kde } t \in R$$

Úlohy

Př.1: Napište parametrické vyjádření přímky AB:

a) $A [1, 0, 3]$ a $B[0, 3, -5]$,

b) $A [2, -1, 1]$ a $B[1, 1, 3]$.

Př.2: Zjistěte, zda bod $Q = [-3, 8, -3]$ leží na přímce $p (A, \mathbf{u})$, kde:

$A [1, 2, -1]$, $\mathbf{u} = [2, 3, 1]$.

2.2 Parametrické vyjádření roviny

- Každé **tři** body **A, B, C** určují **rovinu ABC**
- Vektory $\mathbf{u} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$ a $\mathbf{v} = \mathbf{C} - \mathbf{A}$ se nazývají **směrové vektory** roviny **ABC**.
- **Rovnice**

$$\rho: X = A + tu + sv, \quad \text{kde } t, s \in R$$

se nazývá **parametrická rovnice** nebo také **parametrické vyjádření** roviny určené bodem **A** a vektory **u, v**, tj. $\rho(\mathbf{A}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$.
Proměnné **t, s** se nazývají **parametry**.

Body **X, A** a vektory **u, v** můžeme vyjádřit pomocí souřadnic:

$$\mathbf{X} [x, y, z]$$

$$\mathbf{A} [a_1, a_2, a_3]$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3).$$



$$x = a_1 + tu_1 + sv_1,$$

$$y = a_2 + tu_2 + sv_2,$$

$$z = a_3 + tu_3 + sv_3, \quad \text{kde } t, s \in R$$

Př.1: Napište parametrické vyjádření roviny ABC:

a) $A [1, 0, 1]$, $B [1, 2, 3]$, $C [2, 3, -1]$

b) $A [2, -1, 1]$ a $B [1, 1, 3]$, $C [1, 2, -2]$.

Př.2: Zjistěte, zda bod M leží v rovině určené bodem $A [1, 1, 3]$

a přímkou $p (P, \mathbf{u})$, $P [3, -1, -7]$ a $\mathbf{u} (1, 1, 1)$:

a) $M [0, 0, 2]$

b) $M [1, -1, 3]$

2.3 Obecná rovnice roviny

Rovnice

$$\rho : ax + by + cz + d = 0,$$

kde alespoň jedno z čísel **a**, **b**, **c** je nenulové, se nazývá **obecná rovnice roviny**.

- Vektor $\mathbf{n} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ se nazývá **normálový vektor roviny ρ** a je kolmý k rovině ρ , tzn. je kolmý ke všem vektorům ležícím v rovině ρ .
- Dvě roviny ρ , σ jsou totožné právě tehdy, je-li obecná rovnice roviny ρ násobkem obecné rovnice roviny σ .
- Dvě roviny ρ , σ jsou rovnoběžné právě tehdy, je-li normálový vektor roviny ρ násobkem normálového vektoru roviny σ .

Př.1: Napište obecnou rovnici roviny ABC, kde:

a) $A [1, 0, 2]$, $B[-1, 1, -2]$, $C[3, 2, 0]$,

b) $A [1, 1, 4]$, $B[-1, 2, 1]$, $C[0, -1, 0]$

Postup: 1. Určíme dva směrové vektory \mathbf{u} , \mathbf{v} .

2. Určíme normálový vektor $\mathbf{n} = (a, b, c)$, který je kolmý k oběma vektorům \mathbf{u} , \mathbf{v} .

3. Napíšeme obecnou rovnici přímky, do které dosadíme koeficienty a , b , c .

4. Do rovnice dosadíme jeden z bodů A , B , C a vypočítáme koeficient d .

5. Napíšeme obecnou rovnici roviny.

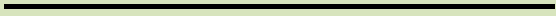
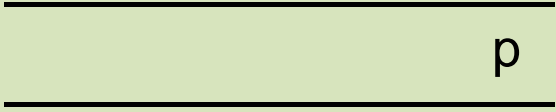
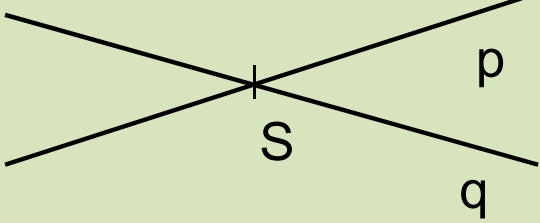
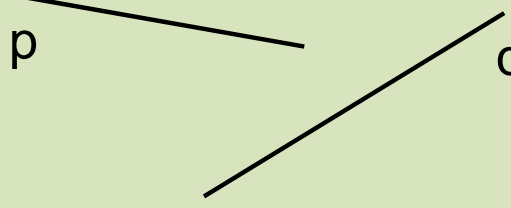
Př.2: Zjistěte, zda bod M leží v rovině ρ :

a) $M [1, 1, -1]$, $\rho: 3x - 2y + z = 0$

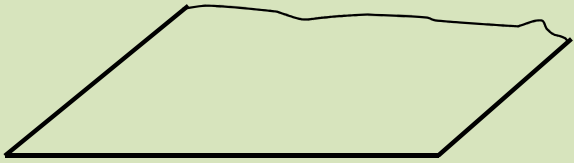
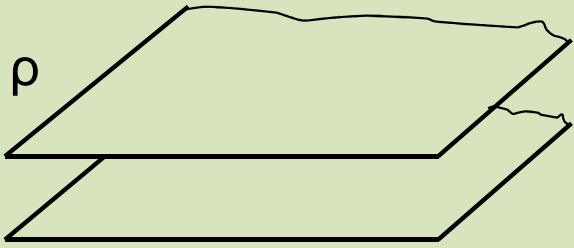
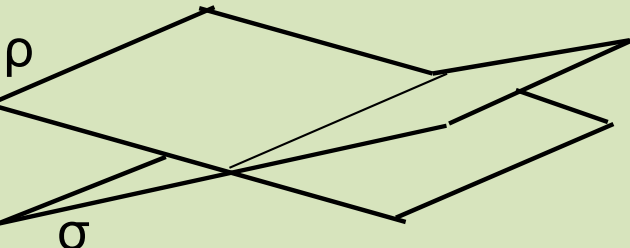
b) $M [0, 2, 1]$, $\rho: x - 2y - 2z + 1 = 0$

c) $M [-1, 0, -1]$, $\rho: -x - y + 3z + 2 = 0$

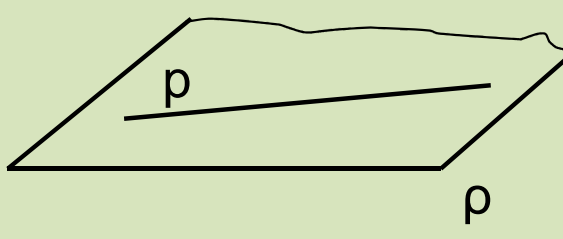
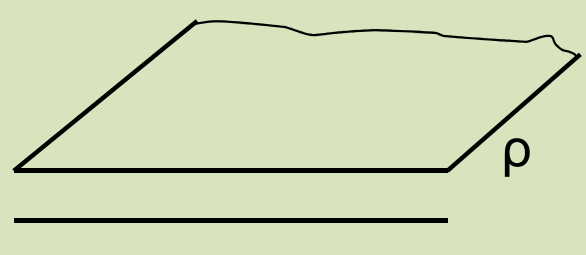
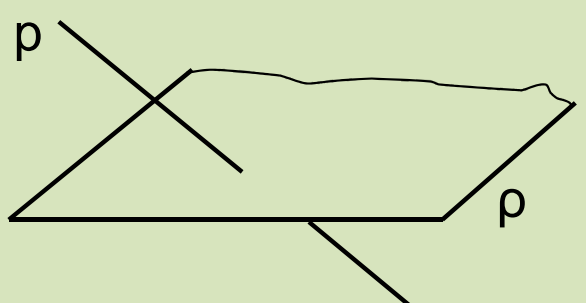
2.4 Vzájemná poloha **přímek** v prostoru

Obrázek	Vzájemná poloha
 $p = q$	Přímky jsou totožné $p = q$
 p q	Přímky jsou rovnoběžné různé $p \parallel q \wedge p \neq q$
 p q S	Přímky jsou různoběžné $p \nparallel q \wedge \exists! S : S \in p \wedge S \in q$
 p q	Přímky jsou mimoběžné $p \nparallel q \wedge \nexists S : S \in p \wedge S \in q$

2.5 Vzájemná poloha rovin v prostoru

Obrázek	Vzájemná poloha	Příklad
 <p style="text-align: center;">$\rho = \sigma$</p>	<p>Roviny jsou totožné $\rho = \sigma$</p>	<p>$\rho: 2x + 3y + z - 1 = 0$ $\sigma: 4x + 6y + 2z - 2 = 0$</p>
 <p style="text-align: center;">ρ σ</p>	<p>Roviny jsou rovnoběžné různé $\rho \parallel \sigma \wedge \rho \neq \sigma$</p>	<p>$\rho: 2x + 3y + z - 1 = 0$ $\sigma: 4x + 6y + 2z - 3 = 0$</p>
 <p style="text-align: center;">ρ σ</p>	<p>Roviny jsou různoběžné $\rho \nparallel \sigma \wedge \rho \neq \sigma$</p>	<p>$\rho: 2x + 3y + z - 1 = 0$ $\sigma: 4x + 5y + 2z - 3 = 0$</p>

2.4 Vzájemná poloha **přímky a roviny** v prostoru

Obrázek	Vzájemná poloha
 <p>A 3D perspective drawing of a parallelogram representing a plane ρ. A line p is drawn inside the plane, parallel to one of its edges.</p>	Přímka p leží v rovině ρ $p \in \rho$
 <p>A 3D perspective drawing of a parallelogram representing a plane ρ. A line p is drawn below the plane, parallel to one of its edges.</p>	Přímka je rovnoběžná s rovinou, ale neleží v ní. $p \parallel \rho \wedge p \notin \rho$
 <p>A 3D perspective drawing of a parallelogram representing a plane ρ. A line p is drawn intersecting the plane at a single point.</p>	Přímka je různoběžná s rovinou $p \# \rho$

Literatura

- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Kočandrlle, M. Boček, L. Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie, Praha: Prometheus, 1995.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- Vošický Zdeněk. Matematika v kostce pro střední školy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.