

DYNAMIKA, PEVNOST A PRUŽNOST
STROJE A ZAŘÍZENÍ – ČÁSTI A
MECHANISMY STROJŮ

DYNAMIKA

Vedle statiky a kinematiky je dynamika další částí mechaniky, která řeší chování „idealizovaných“ mechanismů.

Dynamika se zabývá hlavně pohyby a vzájemnými interakcemi mezi tuhými tělesy pohybujícími se jako celek s nenulovým zrychlením.

V dynamických soustavách je nutno kromě „standardních“ působících silových účinků známých ze statiky uvažovat i silové účinky související s neinerciálností vztažné soustavy (*setrvačné síly a setrvačné momenty*).

DYNAMIKA – POHYBOVÉ ROVNICE

Doplnění rovnic stat. rovnováhy pohybovými rovnicemi.

ROVNICE STATICKÉ ROVNOVÁHY

$\Sigma \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ - silová podmínka statické rovnováhy

$\Sigma \mathbf{M}_{oi} = \mathbf{0}$ - momentová podmínka statické rovnováhy vzhledem k ose \underline{o}

POHYBOVÉ ROVNICE

$\Sigma \mathbf{F}_i = m \mathbf{a}$ - pohybová rovnice pro translační pohyb tělesa

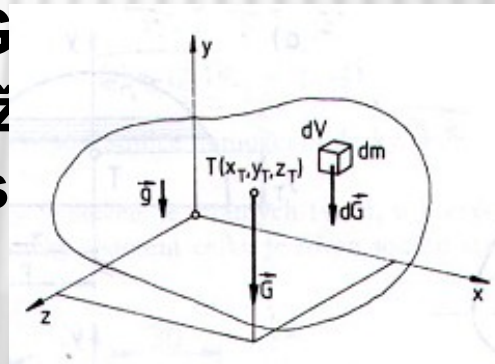
$\Sigma \mathbf{M}_{oi} = \mathbf{I}_o \boldsymbol{\alpha}$ - pohybová rovnice pro rotační pohyb tělesa kolem stálé osy otáčení

DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU

Z hlediska dynamiky je hmotný bod modelem reálného tělesa, které koná translační pohyb pod působením centrální silové soustavy, jejíž výslednice prochází v těžištěm.

Hmotný bod nemá rozměry, hmotnost je soustředěna do těžiště.

Těžiště – V gravitačním poli země působí na každé hmotné těleso gravitační síla (G), která tvoří soustavu rovnoběžných sil. V těžištěm působí výsledná tíhová síla \vec{G} .



gravitační tíhové síly G tvoří soustavu rovnoběžných sil. V těžištěm působí výsledná tíhová síla \vec{G} .

POHYBOVÉ ZÁKONY

1. Newtonův pohybový zákon (zákon setrvačnosti).

Nepůsobí-li na těleso žádná vnější síla, zůstává těleso v relativním klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu.

Je-li $F = 0$ je $v = \text{konst.}$

Matematické vyjádření:

Míru pohybu tělesa při translačním pohybu charakterizuje **hybnost** (součin hmotnosti a rychlosti) $\mathbf{h} = m \cdot \mathbf{v}$.

2. Newtonův pohybový zákon

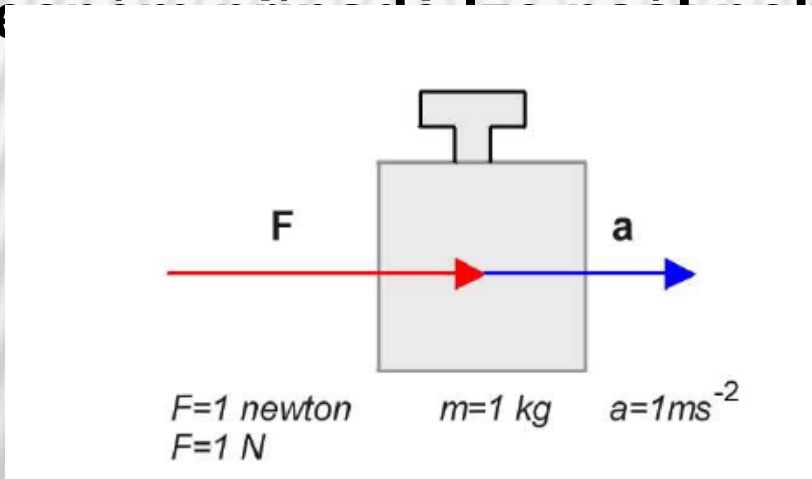
Těleso setrvává v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu, pokud není nuceno vnějšími silami tento stav změnit.

POHYBOVÉ ZÁKONY

Z 2. Newtonova zákona vyplývá (z hlediska dynamiky), že *časová změna hybnosti je úměrná působící síle a má stejný směr jako působící síle.*

Limitně lze psát, že $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$, kde \mathbf{a} je zrychlení tělesa.

V obecné formě lze psát hybovou rovnici $\sum \mathbf{F}_i = m \mathbf{a}$



POHYBOVÉ ZÁKONY

3. Newtonův pohybový zákon (akce a reakce)

Každá síla působící na těleso z vnějšku (akce) vyvolává stejně velkou, opačně orientovanou sílu (reakci).

Pohybová rovnice pro bodové těleso:

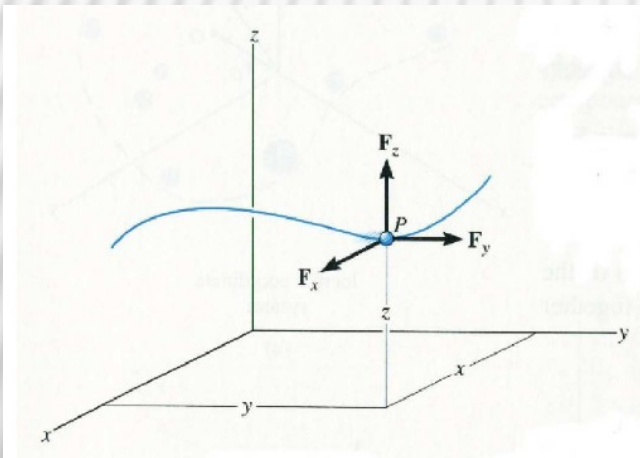
$$\sum \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}$$



$$x: \sum F_{ix} = ma_x = m\ddot{x}$$

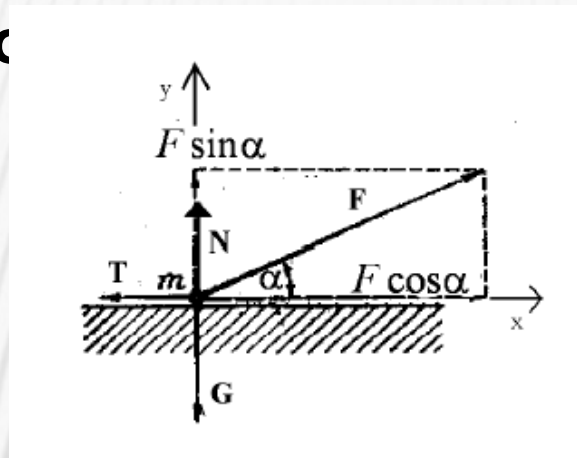
$$y: \sum F_{iy} = ma_y = m\ddot{y}$$

$$z: \sum F_{iz} = ma_z = m\ddot{z}$$



ZRYCHLENÍ BODU PŘI TRANSLAČNÍM POHYBU

Př. Výpočtu zrychlení hmotného bodu při translačním pohybu po



Vektorová pohybová rovnice: $\mathbf{F} + \mathbf{T} + \mathbf{N} + \mathbf{G} = m\mathbf{a}$.

Rozložíme-li sílu na složku kolmou a tečnou k rovině pak ve složkách platí

$$x : F \cos \alpha - T = ma$$

$$y : F \sin \alpha + N - G = 0$$

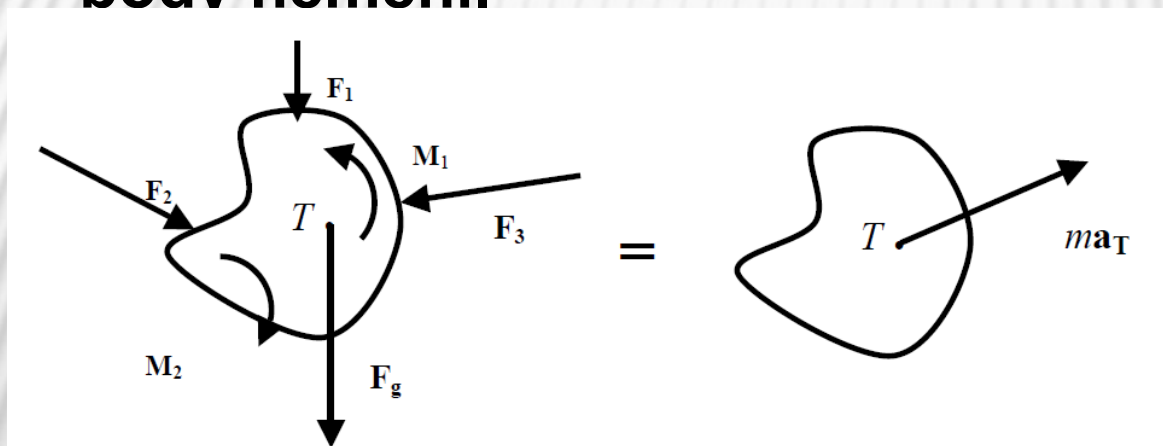
Pro normálovou sílu pak vychází: $N = G - F \sin \alpha$. Uvážíme-li že třecí síla: $T = Nf$

dostáváme pro zrychlení

$$a = \frac{F \cos \alpha - (G - F \sin \alpha) f}{m}.$$

DYNAMIKA TUHÉHO TĚLESA

Tuhé těleso chápeme jako zvláštní případ soustavy hmotných bodů, pro kterou platí, že bez ohledu na pohyb a působící síly se vzdálenost mezi jednotlivými body nemění.



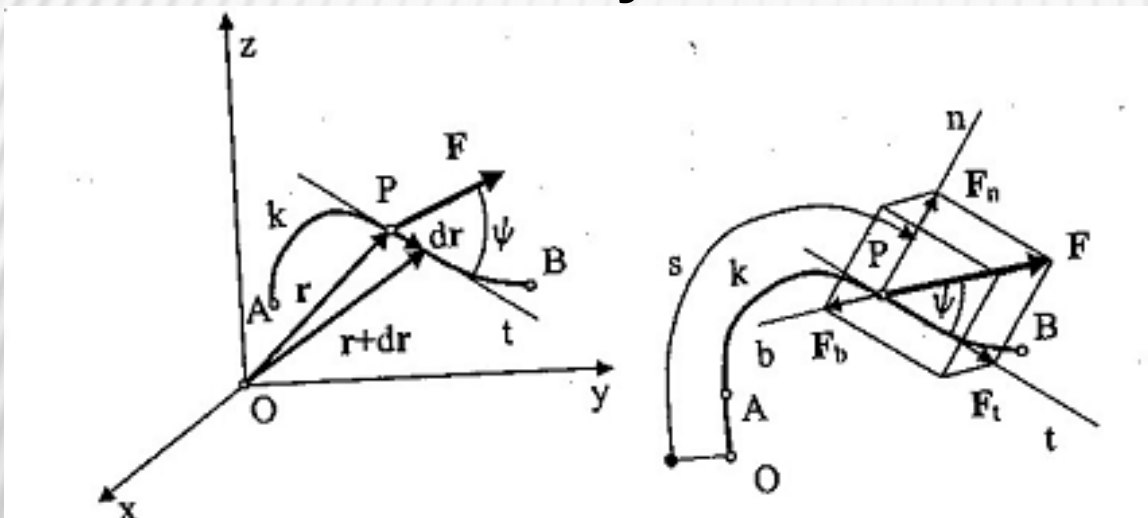
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_T$$

$$\mathbf{M}_T = 0$$

$$\sum_i F_{ix} = ma_{Tx}, \sum_i F_{iy} = ma_{Ty}, \sum_i (M_{Ti})_z = \sum_i (x_i F_{yi} - y_i F_{xi}) = 0$$

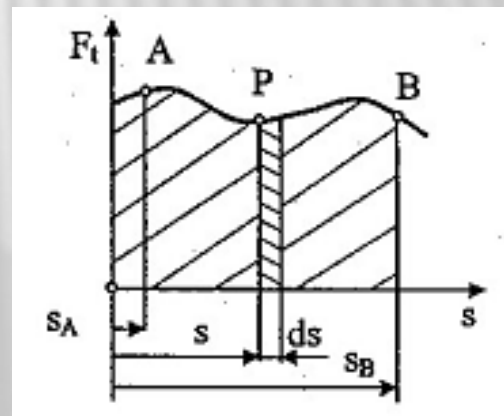
MECHANICKÁ PRÁCE A ENERGIE

Mechanická práce - při posouvání působí síly ve směru jejího působení koná síla mechanickou práci. Tento účinek síly vede ke **změně energií** ve zkoumané



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos \psi ds$$

Pokud známe závislost síly na
Proběhnuté dráze lze práci vyjádřit jako
Plochu pod diagramem závislosti



VÝKON A ÚČINNOST

Výkon je definován jako množství práce za čas. Vyjadřuje intenzitu konání práce.

Okamžitý výkon je definován jako podíl elementární práce dW a elementárního času dt .

$$P = \frac{dW}{dt}$$

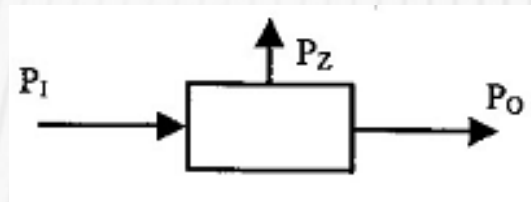
Jednotkou výkonu je 1 W (watt) = N.m.s⁻¹ = J. s⁻¹

Okamžitý výkon je proměnný v čase:

$$P_{\text{eff.}} = \frac{W}{t}$$

VÝKON A ÚČINNOST

Účinnost – v každém reálném zařízení dochází ke ztrátám (P_z - ztráty), které představují pasívní odpory.



Základní energetická bilance systému je dána $P_0 = P_1 - P_z$

kde P_0 je výkon, P_1 je příkon, P_z jsou ztráty (nejčastěji ve formě tepla).

Platí, že $P_z > 0$

pak $P_0 < P_1$

Definujeme pojem okamžitá účinnost.

VÝKON A ÚČINNOST

Okamžitá mechanická účinnost – je poměr okamžitého výkonu (P_0) a okamžitého příkonu (P_1)

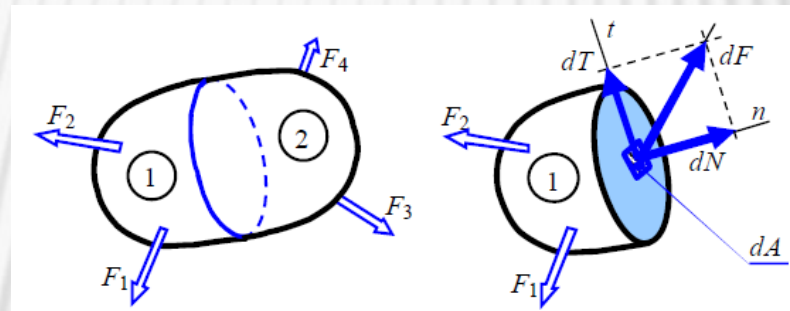
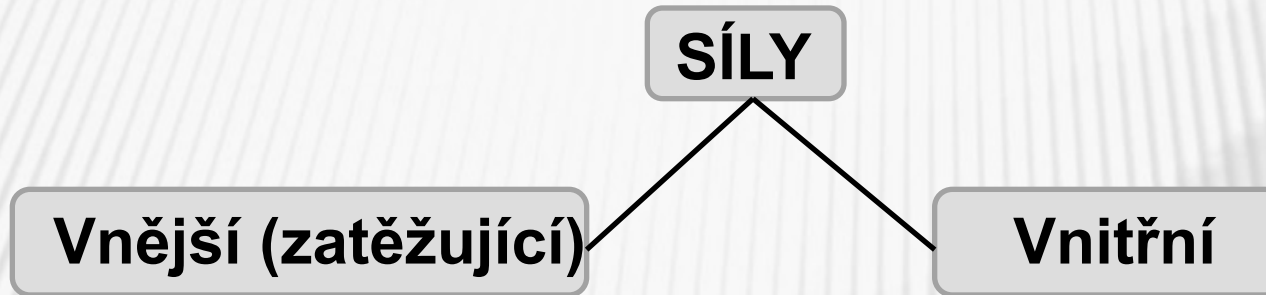
$$\eta = \frac{P_0}{P_1}$$

platí, že $\eta < 1$

Okamžitou účinnost, lze vypočítat také dosazením elementárních prací soustavy – vstupního stavu a výstupního stavu.

$$\eta = \frac{dW_0}{dW_1}$$

PEVNOST A PRUŽNOST – ZÁKL. POJMY



Pevnost tělesa – schopnost tělesa odolávat porušení.

Pružnost tělesa – schopnost tělesa vrátit se po odlehčení do výchozího stavu.

Tuhost tělesa - odolnost tělesa proti deformaci.

STATICKÁ PEVNOST A DEFORMACE

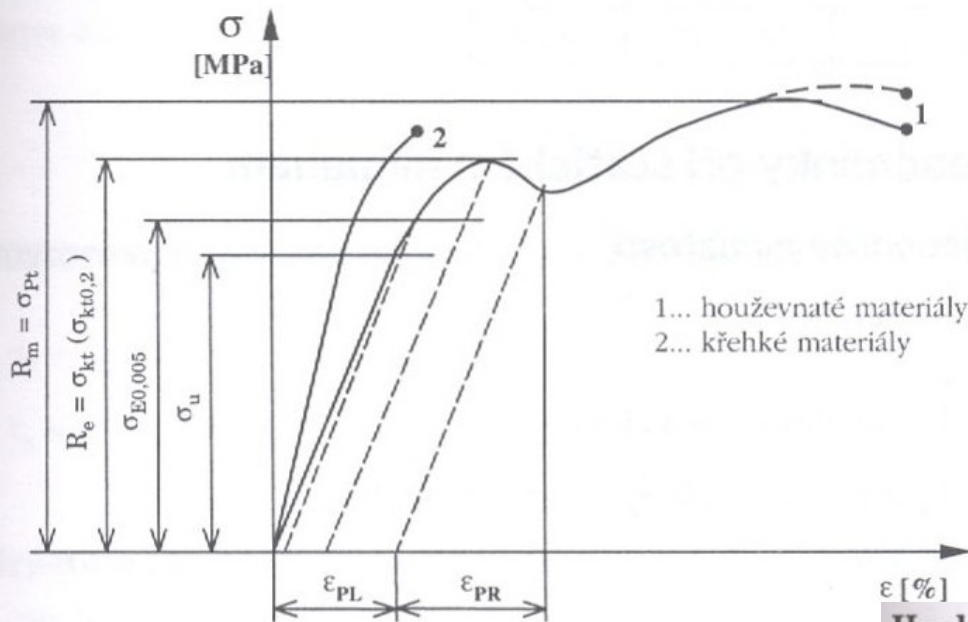
Reálné strojní součásti jsou charakterizovány materiálem z kterého jsou vyrobeny. Předchozí části technické mechaniky (statika, kinematika, ..), tyto vlastnosti těles zanedbávaly!

Vlastnosti každého technického materiálu (ocel, litina, plast, ..) jsou popsány materiálovými charakteristikami jako jsou mez pevnosti (R_m), mez kluzu (R_e), prodloužení, modul pružnosti (E , G) apod.

Tyto charakteristiky lze zjistit z pracovního diagramu např. tahového.

STATICKÁ PEVNOST A DEFORMACE

Př. Tahového diagramu



1... houževnaté materiály
2... křehké materiály

$$\sigma_{kt} \cong (0,6 + 0,8) \cdot \sigma_{Pt}$$

pro nižší σ_{Pt} pro vyšší σ_{Pt}

$R_m = \sigma_{Pt}$... smluvní mez pevnosti

$R_e = \sigma_{kt} (\sigma_{kt0,2})$... mez kluzu (smluvní mez kluzu)

$\sigma_{E0,005}$... smluvní mez pružnosti

σ_u ... mez úměrnosti

Hookeův zákon

pro tah:

$$\sigma = \frac{F}{S} = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \quad \rightarrow \quad \Delta l = \frac{F \cdot l}{F \cdot S}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

pro smyk:

$$\tau = \frac{F}{S} = G \cdot \gamma = G \cdot \frac{\Delta \varphi}{l} \quad \rightarrow \quad \Delta \varphi = \frac{F \cdot l}{G \cdot S}; \quad \gamma = \frac{\Delta \varphi}{l}$$

STATICKÁ PEVNOST A DEFORMACE

Pevnostní podmínky při statickém zatěžování (jednoosá napjatost).

a) pro houževnaté materiály:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_D = \frac{\sigma_{kt}}{k_k} \quad \text{kde orientačně požadováno:}$$

$k_k \cong 1,5 \div 2,5$... bezpečnost k mezi kluzu

b) pro křehké materiály:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_D = \frac{\sigma_{pt}}{k_p} \quad \text{kde orientačně požadováno:}$$

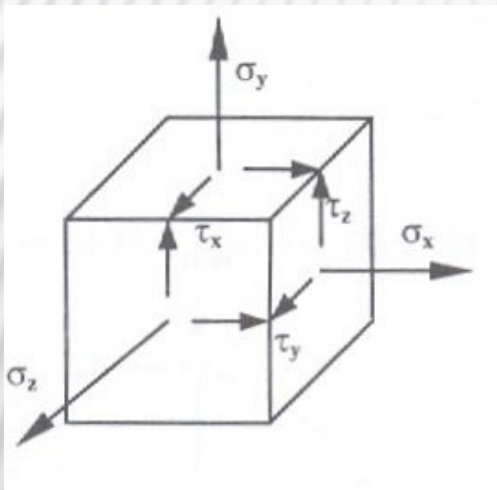
$k_p \cong 2,5 \div 3,5$ – pro oceli ... bezpečnost k mezi pevnosti

$k_p \cong 4,0 \div 5,0$ – pro šedou litinu ... bezpečnost k mezi pevnosti

PEVNOSTNÍ HYPOTÉZY

V praxi jsou tělesa namáhána tahovým nebo smykovým napětím či jejich kombinací.

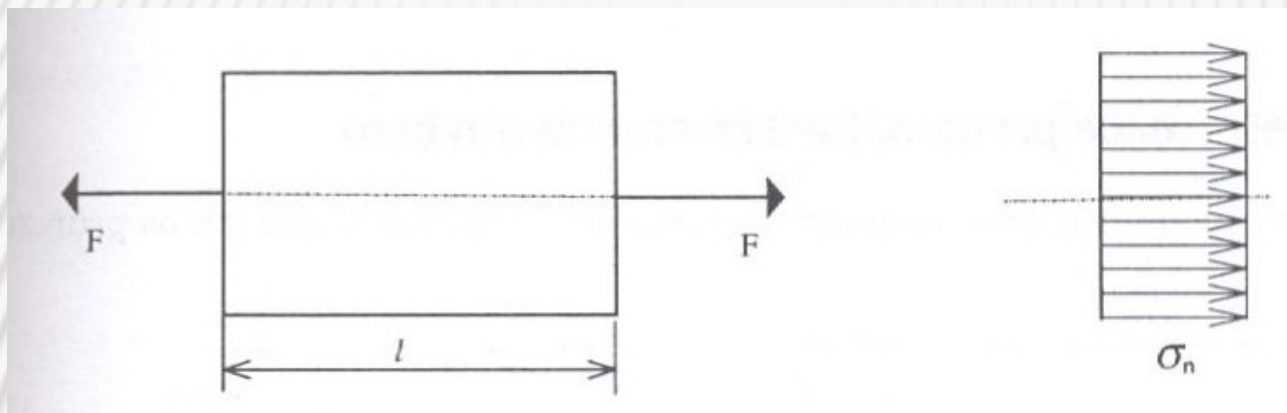
Obecná trojoosá napjatost je znázorněna na obrázku.



$$\sigma_{\text{red}} = \text{složitá funkce } f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z)$$

U strojních součástí namáhaných staticky se nejčastěji řeší charakteristiky napětí a deformace při namáhání tahem, tlakem, smykem, ohybem, krutem.

NAMÁHÁNÍ TAHEM/TLAKEM

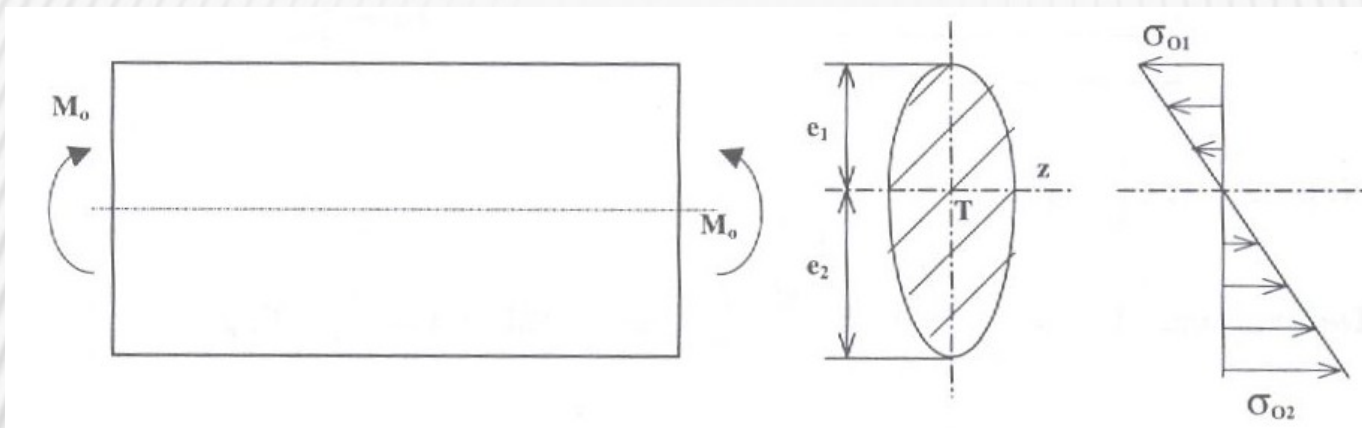


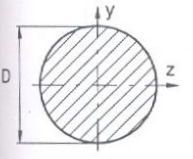
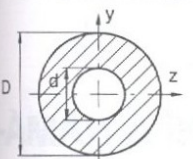
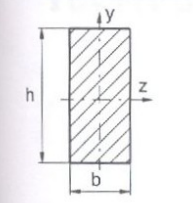
a) **Napětí:** $\sigma = \frac{F}{S} \leq \sigma_{Dt}$

b) **Deformace:** $E \cdot \varepsilon = \frac{F}{S} \rightarrow E \cdot \frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{S} \rightarrow (\Delta l =) y = \frac{Fl}{E.S} = F \cdot p$

Poddajnost: $p = \frac{y}{F} = \frac{l}{E.S}$ Tuhost: $k = \frac{l}{p}$

NAMÁHÁNÍ OHYBEM



Tvar průřezu	Kvadratický moment průřezu J [mm ⁴]		Průřezový modul v ohybu W_0 [mm ³]	
	J_z	J_y	W_{0z}	W_{0y}
	$\frac{\pi D^4}{64}$		$\frac{\pi D^3}{32}$	
	$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$		$\frac{\pi(D^3 - d^3)}{32D}$	
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{hb^2}{6}$

a) **Napětí:** $\sigma_{0\max} = \frac{M_0}{W_{0\min}} \leq \sigma_D$

Napětí v krajních vláknech:

$$\sigma_{01} = \frac{M_0}{W_{01}}$$

$$W_{01} = \frac{J_z}{e_1}$$

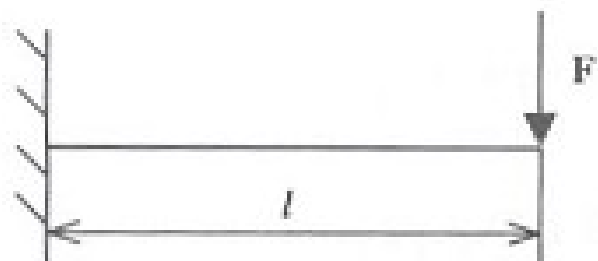
$$\sigma_{02} = \frac{M_0}{W_{02}}$$

$$W_{02} = \frac{J_z}{e_2}$$

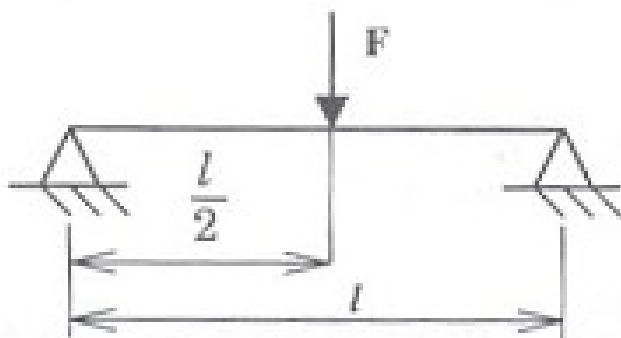
b) **Deformace:** $y''(x) = -\frac{M_0(x)}{E \cdot J_z}$

NAMÁHÁNÍ OHYBEM - NOSNÍK

Pro nosník stálého průřezu se průhyb (y) vypočte:



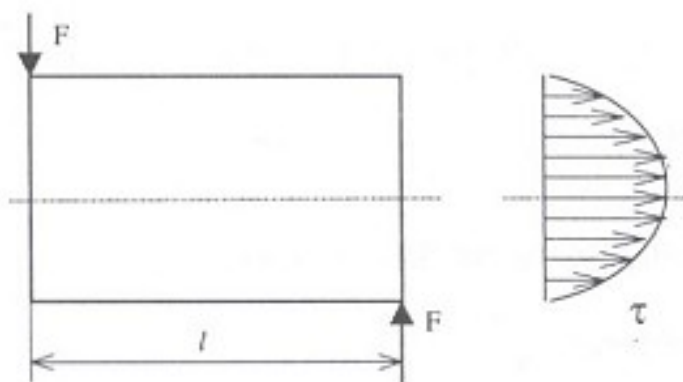
$$y = \frac{F \cdot l^3}{3EJ} \quad ; \quad \varphi = \frac{F \cdot l^2}{2EJ} \quad \dots \text{ v místě } F$$



$$y = \frac{F \cdot l^3}{48EJ} \quad ; \quad \varphi = 0 \quad \dots \text{ v místě } F$$

NAMÁHÁNÍ SMYKEM (ZA OHYBU)

V praxi jsou tělesa namáhána smykem v kombinaci s ohybem



a) Napětí: $\tau_{\max} = \alpha \cdot \frac{F}{S} \leq \tau_D$

$\alpha = \frac{4}{3}$... pro kruhový průřez

$\alpha = \frac{3}{2}$... pro obdélníkový průřez

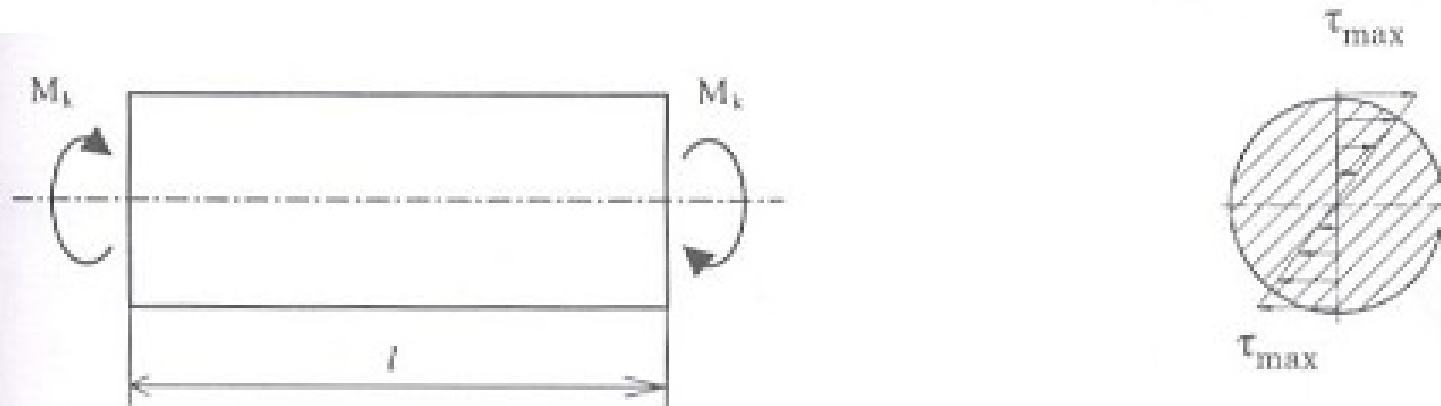
b) Deformace: $G \cdot \gamma = \beta \frac{F}{S} \rightarrow G \cdot \frac{\Delta\varphi}{l} = \beta \frac{F}{S} \rightarrow \Delta\varphi = \beta \frac{F \cdot l}{G \cdot S}$

$\beta \cong \frac{10}{9}$... pro kruhový průřez

$\beta \cong \frac{6}{5}$... pro obdélníkový průřez

Napětí: $\tau_{\max} = \frac{F}{S} \leq \tau_D$

NAMÁHÁNÍ KRUTEM



a) Napětí:
$$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_k} \leq \tau_D$$

b) Deformace:

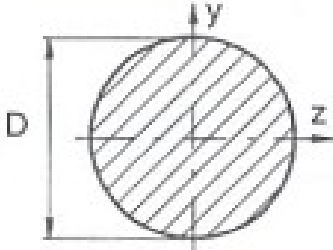
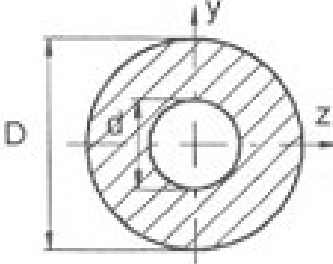
$$G \cdot \vartheta = \frac{M_k}{J_k}, \quad \rightarrow \quad G \cdot \frac{\Delta\varphi}{l} = \frac{M_k}{J_k}, \quad \rightarrow \quad \Delta\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_k}$$

Pro n úseků konstantního průřezu:

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i = \frac{M_k}{G} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{J_{ki}}$$

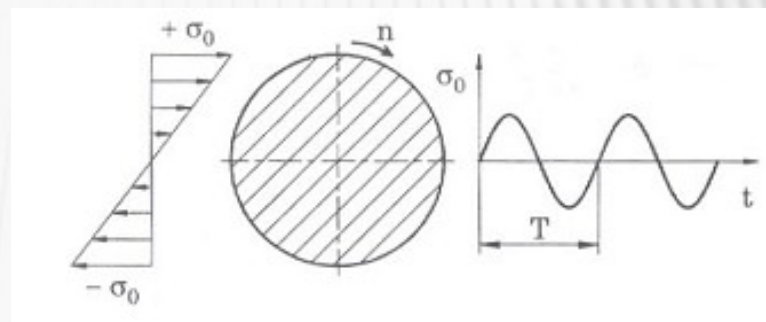
NAMÁHÁNÍ KRUTEM

Moment tuhosti a model průřezu v krutu.

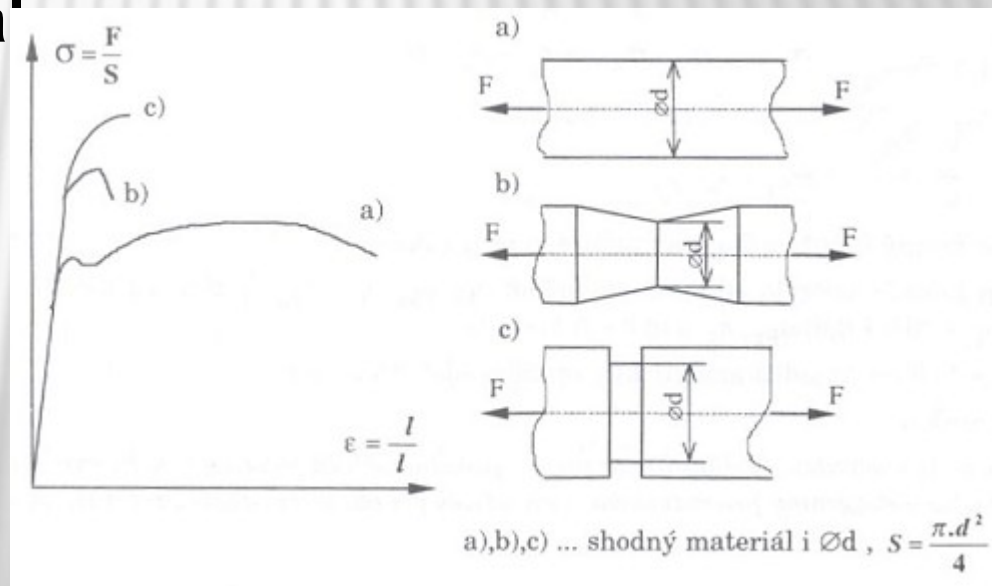
Tvar průřezu	Moment tuhosti v krutu J_k [mm ⁴]	Modul průřezu v krutu W_k [mm ³]
	$J_k = \frac{\pi D^4}{32} = 2J_0$	$W_k = \frac{\pi D^3}{16} = 2W_0$
	$J_k = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = 2J_0$	$W_k = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = 2W_0$

DALŠÍ FAKTORY OVLIVŇUJÍCÍ PEVNOST

1) Dynamické zatěžování.



2) Vliv vrubu. Vrub – koncentrátor napětí, snižuje pevnost a houževnatost materiálu

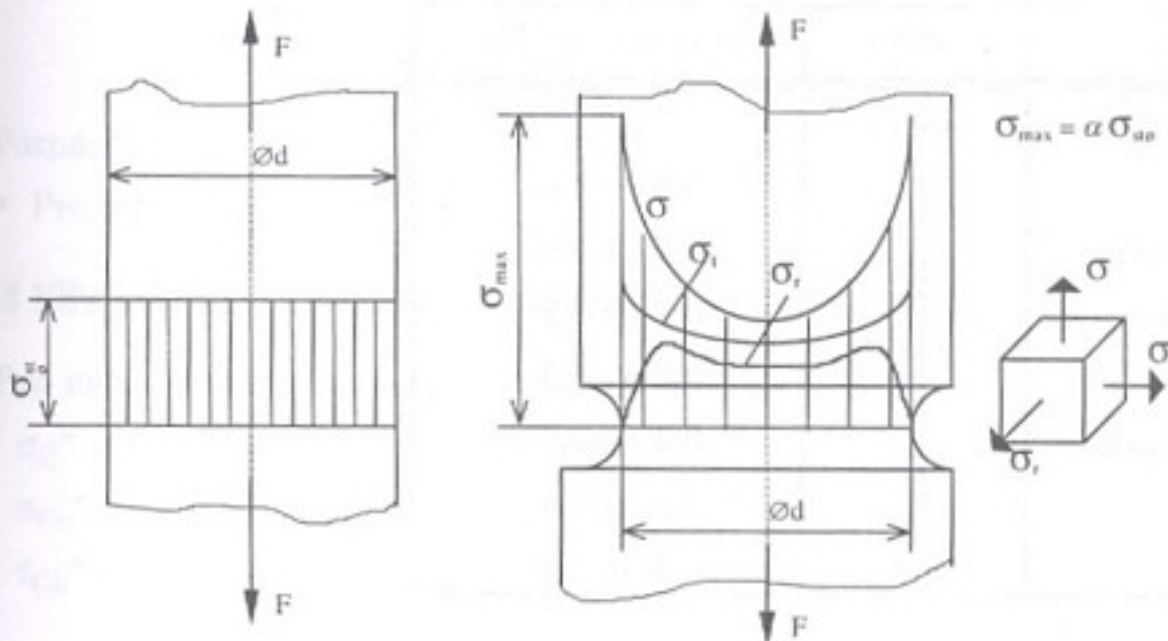


DALŠÍ FAKTORY OVLIVŇUJÍCÍ PEVNOST

Vrub

	<i>při stat. zatížení</i>	<i>při dynam. zatížení</i>
<i>Uvažování vrubů u houževnatých materiálů:</i>	<i>běžně NE</i>	<i>ANO</i>
<i>Uvažování vrubů u křehkých materiálů:</i>	<i>ANO</i>	<i>ANO</i>

Vliv tvaru vrubu – součinitel tvaru vrubu α



σ_{max}
max. napětí

vrubu

σ_{stat}
napětí při
statickém

ZÁVĚR

Literatura:

- [1] Stejskal, V. a kol. *Mechanika 1*. ČVUT, 1998, 163 s.
- [2] *Mechanika - skripta*. 2003,
- [3] Hosnedl, S., Krátký, J. *Příručka strojího inženýra 1*, Computer press, 1999, 313 s.
- [4] Zelený, J. *Stavba strojů*, Cpress, 2007, 2. vydání, 157 s.