Rozvoj matematických představ 1.

Helena Durnová

prosinec 2012

Přehled okruhů - RMP 1

1. Výrok. Negace výroku. Složené výroky (logické spojky: konjunkce, disjunkce, ostrá disjunkce, implikace, ekvivalence). Výroková forma. Výroková formule, pravdivostní ohodnocení výrokových formulí. Kvantifikované výroky: obecný a existenční kvantifikátor, negace kvantifikovaných výroků.

2. Množina. Podmnožina. Doplněk množiny. Sjednocení dvou množin. Průnik, rozdíl, symetrický rozdíl dvou množin. Využití množinových diagramů k řešení úloh. Kartézský součin dvou množin.

3. Binární relace z množiny do množiny. Binární relace na množině, Uspořádání množiny. Ekvivalence na množině a rozklad množiny. Zobrazení z množiny do množiny. Typy zobrazení: prosté, vzájemně jednoznačné.

4. Přirozená čísla: zavedení a základní vlastnosti. Operace s přirozenými čísly. Vytváření pojmu přirozeného čísla. Přirozená čísla a předškoláci.

V následujícím textu najdete stručné shrnutí látky a příklady k procvičení.

Hvězdičkou (*) jsou označeny obtížnější příklady.

1 Výroky

Definice 1 Výrok *je tvrzení, o němž má smysl prohlásit, že je pravdivé nebo že pravdivé není.*

Negace výrokuA: $\neg A$

Konjunkce (A a zároveň B): $A \wedge B$

Disjunkce (A nebo B): $A \vee B$

Implikace (když A, pak B): $A \Rightarrow B$

Ekvivalence (A právě tehdy když B): $A \Leftrightarrow B$

Tautologie: výrok, který je vždy pravdivý

Kontradikce: výrok, který není nikdy pravdivý

Tabulka pravdivostních hodnot složených výroků

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

Příklad 2 Uveďte příklad jednoduchého výroku.

Příklad 3 Uveďte příklad složeného výroku - konjunkce.

Příklad 4 Uveďte příklad složeného výroku - disjunkce.

Příklad 5 Uveďte příklad složeného výroku - implikace.

Příklad 6 Uveďte příklad složeného výroku - ekvivalence.

Příklad 7 Vyslovte negace předchozích výroků.

Příklad 8 Uveďte příklad výroku, který je vždy pravdivý (tautologie).

Příklad 9 Uveďte příklad výroku, který nikdy není pravdivý (kontradikce).

Příklad 10 Napište negace následujících výroků:

1. Neexistují neomylní učitelé.

   [Existuje alespoň jeden neomylný učitel.]

2. Žádný učitel není neomylný.

   [Alespoň jeden učitel je omylný. (Všimněte si, že tento výrok a výrok předchozí vyjadřují totéž.)]

3. Každý učitel je omylný.

   [Alespoň jeden učitel je neomylný.]

4. Jen omylní lidé jsou učitelé.

   [Alespoň jeden neomylný člověk je učitelem.]

5. Žádný učitel není omylný.

   [Existuje alespoň jeden omylný učitel.]

6. Existují omylní učitelé.

   [Všichni učitelé jsou neomylní.]

7. Jen ti lidé, kteří jsou učiteli, mohou být omylní.

   [Existue alespoň jeden člověk, který není učitelem a je omylný.]

8. Nejen omylní lidé jsou učiteli.

   [Žádný neomylný člověk není učitelem.]

Příklad 11 Sestavte tabulku pravdivostních hodnot následujících složených výroků:

(D) $\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg(\neg B \vee \neg A)$

(E) $\neg(A \vee \neg B) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$

(F) $\neg(A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$

(G) $(A \vee B) \wedge C$

(H) $(A \wedge C) \vee B$

(J) $[(A \vee B) \wedge C] \Rightarrow [(A \wedge C \vee B)]$

(K) $A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C)$

(L) $\neg(B \wedge C)$

(M) $[A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C)] \Leftrightarrow [\neg(B \wedge C)]$

(N) $[(A \Rightarrow B) \wedge B] \Rightarrow A$

(P) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

(Q) $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$

Řešení:

A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L	M	N	P	Q
1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

Příklad 12 Napište negace následujících výroků (s kvantifikátory):

1. Všechna zvířata mají čtyři nohy.

   [Alespoň jedno zvíře nemá čtyři nohy.]

2. Existuje ryba, která mluví.

   [Žádná ryba nemluví.]

3. Existuje nejméně 5 druhů sladkovodních ryb.

   [Existují nejvíce 4 druhy sladkovodních ryb.]

4. Aspoň jeden jehličnatý strom na zimu opadává.

   [Žádný jehličnatý strom na zimu neopadává.]

5. V Evropě rostou alespoň dva druhy borovic.

   [V Evropě roste nejvýše jeden druh borovice.]

6. Duha obsahuje všechny základní barvy.

   [Alespoň jedna základní barva není obsažena v duze.]

7. Každou barvu lze namíchat ze základních barev.

   [Alespoň jednu barvu nelze namíchat ze základních barev.]

8. Všichni ptáci mají právě dvě nohy.

   [Existuje alespoň jeden pták, který nemá právě dvě nohy (má nejvýše jednu nebo alespoň tři nohy).]

9. Všechny paní učitelky jsou hodné.

   [Alespoň jedna paní učitelka není hodná.]

10. Týden má (právě) sedm dní.

    [Týden má nejvýše šest nebo alespoň osm dní.]

2 Množiny a operace s nimi

Definice 13 *Soubor prvků nazýváme* množinou. *Množiny označujeme zpravidla velkými písmeny latinské abecedy.*

> *x je prvkem A:* $x \in A$;
>
> *A je podmnožinou B:* $A \subset B$;
>
> *A je podmnožinou nebo je rovno B:* $A \subseteq B$;
>
> *Sjednocení dvou množin:* $A \cup B$;
>
> *Průnik dvou množin:* $A \cap B$;
>
> *Rozdíl dvou množin:* $A \setminus B$;
>
> *Doplněk množiny A vzhledem k množině M (platí* $A \subseteq M$: $\overline{A} = M \setminus A$*);*
>
> *Kartézský součin dvou množin A, B:* $A \times B$ *(kartézský součin je množina uspořádaných dvojic, v nichž první prvek je z množiny A a druhý prvek z množiny B).*

Příklad 14 Nechť $A = \{a, b, c, d, e\}, B = \{a, e, i, o, u\}, C = \{b, c, d, f, g\}$. Uveďte, jaké prvky obsahují následující množiny:

1. $A \cup B$

2. $A \cup C$
3. $B \cup C$
4. $A \cap B$
5. $A \cap C$
6. $B \cap C$
7. $A \setminus B$
8. $A \setminus C$
9. $B \setminus C$
10. $B \setminus A$
11. $C \setminus B$
12. $C \setminus A$
13. $A \times B$
14. $A \times C$
15. $B \times C$
16. $B \times A$
17. $C \times A$
18. $C \times B$
19. $A \times A$
20. $B \times B$
21. $C \times C$

Příklad 15 Určete všechny podmnožiny množin A, B a C z předchozího příkladu.

Rozhodněte, zda pro množiny A, B a C z předchozího příkladu platí následující tvrzení:

1. $A \subseteq B$
2. $B \subseteq C$
3. $A \subset B$
4. $C \subset B$

Příklad 16 Ukažte, že platí následující tvrzení (pomocí Vennových diagramů):

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
4. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
5. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
6. $A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

Příklad 17 Rozhodněte,která z následujících množinových inkluzí platí:

1. $A \setminus (B \setminus C) \subset A \setminus (B \cup C)$
2. $A \setminus (B \cup C) \subset A \setminus (B \setminus C)$
   [platí 2.]

Příklad 18 Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

* $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$, pokud $C \subset A$
* $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

3 Relace

Nyní se budeme zabývat matematickým popisem relace, tj. vztahu. Pro naše účely jsou nejdůležitější relace uspořádání a ekvivalence. V případě ekvivalence se zaměříme spíše na možnost rozkladu množiny, tj. určení takových podmnožin, které dohromady dají celou původní množinu, ale žádné dvě nemají společný prvek.

Příklady uspořádání v běžném životě:

- pořadí písniček a básniček na besídce
- postavíme děti do řady podle velikosti (nebo podle věku či jiného kritéria)
- pořadí činností prováděných po obědě

Příklady rozkladů v běžném životě:

- rozdělíme děti na chlapce a děvčata
- rozdělíme geometrické útvary podle typu: kruhy, čtverce, trojúhelníky (popř. další)
- rozdělíme figurky z Člověče, nezlob se podle barev

Definice 19 Relací *na množině A nazýváme podmnožinu kartézského součinu $A \times A$; tj. prvky relace jsou některé uspořádané dvojice prvků množiny A: $R \subseteq A \times A$*

Vlastnosti relace

Relace symetrická: pro $\forall a, b \in A$ platí: $(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R$

Relace reflexivní: pro $\forall a \in A$ platí: $(a, a) \in R$

Relace antisymetrická: pokud $(a, b) \in A \wedge (b, a) \in A)$, pak: $a = b$

Relace tranzitivní: pro $\forall a, b, c \in A$ platí: $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Leftrightarrow (a, c) \in R$

Relaci, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní nazýváme *uspořádání*. Tuto relaci lze zakreslit *hasseovským diagramem*.

Relaci, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní nazýváme *ekvivalence*. Ke každé ekvivalenci přísluší *rozklad*.

Příklad 20 Relaci na množině $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ zadanou výčtem zapište do tabulky a určete, zda je

(a) reflexivní,

(b) symetrická,

(c) antisymetrická,

(d) tranzitivní,

(e) uspořádání,

(f) ekvivalence.

V případě, že se jedná o uspořádání, nakreslete hasseovský diagram zadané relace; v případě, že se jedná o ekvivalenci, najděte příslušný rozklad.

$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$;

[reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranziivní, uspořádání, ekvivalence, rozklad: jednoprvkové množiny 1,2,3,4,5,6]

$S = R \cup \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$;

[reflexivní, symetrická, tranziivní, ekvivalence, rozklad: dvouprvkové množiny 14, 25, 36]

$T = R \cup \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 6)\}$

[reflexivní, antisymetrická, tranziivní, uspořádání]

$P = R \cup \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)\}$

[reflexivní, antisymetrická, tranziivní, uspořádání]

$Q = R \cup \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6)\}$

[reflexivní antisymetrická, tranziivní, uspořádání]

4 Zobrazení

Matematikové chápou zobrazení jako speciální případ relace a uváději tuto definici:

Definice 21 *Relace $f \subset A \times B$ se nazývá zobrazením, pokud je každému prvku množiny A přiřazen nejvýše jeden prvek množiny B (tj. žádný prvek množiny A nelze zobrazit na dva různé prvky).*

Rozdíl mezi relací a zobrazením je tedy takový, že zatímco prvek množiny může být v relaci s libovolným jiným prvkem množiny (dítě může kamarádit se všemi dětmi), při zobrazení je jednomu prvku přiřazen nejvýše jeden prvek (dítě si vybere pouze jednu hračku, se kterou si může hrát; nebo naopak: máme sadu hraček a s každou si může hrát v danou chvíli nejvýše jedno dítě).

Pro počítání je nejdůležitější vzájemně jednoznačné zobrazení (cizím slovem bijekce), kdy lze prvky dvou množin přiřadit tak, že každému prvku jedné množiny odpovídá prvek druhé množiny. Například množina dětí a množina čepiček, ve kterých přišly do školy jsou stejně velké a existují mezi nimi vzájemně jednoznačné zobrazení (můžeme si je představit tak, že každé dítě si nasadí NĚJAKOU čepičku, i když děti asi budou nejspokojenější, když si každé nasadí svoji čepičku).

Zobrazení se nazývá

prosté, pokud má každý prvek množiny B právě jeden vzor;

"na", pokud má každý prvek množiny B alespoň jeden vzor;

vzájemně jednoznačné, pokud má každý prvek množiny A právě jeden obraz a každý prvek množiny B právě jeden vzor.

Příklad 22 Určete, která z následujících zobrazení jsou vzájemně jednoznačná; která jsou prostá; a která jsou 'na'. Nakreslete názorný obrázek.

$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 2)\}$
[prosté]

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4)\}$
[prosté]

$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}, f = \{(1, d), (2, a), (3, c), (4, b)\}$
[prosté a na, tj. vzájemně jednoznačné]

5 Přirozená čísla a operace s nimi

Definice 23 *Binární operace $+$ a $\cdot$ na množině přirozených čísel $\mathbb{N}$ jsou*

komutativní, tj. platí $a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a$;

asociativní, tj. platí $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$*;*

Dále platí distributivní zákon: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Komutativní zákon běžně používáme, děti předškolního věku o jeho platnosti zatím nevědí: musí si přepočítat, že např. $3 + 2 = 2 + 3 = 5$.

Při počítání používáme tzv. poziční desítkovou soustavu, což ale není jediná možná. Z pohádek známe i jiné číslovky: kopa (60), tucet (12), půl tuctu (6). Šedesátková soustava se nám zachovala pro počítání času: hodina má 60 minut, minuta 60 vteřin. Šedesátková soustava má tu výhodu, že můžeme základ rozdělit na 2, 3, 4, 5, 6 částí (také na 12, 15, ...). Oproti tomu základ naší bežné soustavy, 10, lze beze zbytku rozdělit pouze na 2 či 5 částí.

V desítkové soustavě používáme číslice 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9. Analogicky ve dvojkové soustavě používáme číslice 0 a 1, v osmičkové 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 a 7, atp. Sčítání probíhá analogicky jako v desítkové soustavě, ale není pro nás intuitivní.

Příklad 24 *Sečtěte následující čísla ve dvojkové soustavě*

1. $10101 + 1011$

   [100000]

2. $10111 + 10101$

   [101100]

3. $11001 + 10001$

   [101010]

4. $11111 + 11111$

   [111110]

S římskými číslicemi se setkáváme především ve starších nápisech. Čísla pomocí římských číslic sestavujeme tak, aby součet jednotlivých čislic dal dané číslo. Římské číslice jsou

I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

Příklad 25 Zapište následující čísla vyjádředná římskými číslicemi v poziční desítkové soustavě:

1. XLIII [43]
2. MCM [1900]

3. MDCCCLIV [1854]
4. MXMIX [1999]
5. MDCXVIII [1618]

Literatura

Základní:

1 Růžena Blažková: *Rozvoj matematických pojmů a představ u dětí předškolního věku.*

`http://is.muni.cz/elportal/?id=893208`

Doporučená:

2 Blažková, Růžena - Matoušková, Květoslava - Vaňurová, Milena: *Texty k didaktice matematiky pro studium učitelství 1. stupně základní školy. Č. 1.* 1. vyd. Brno: UJEP Brno, 1987. 97 s.

3 Hejný, Milan - Stehlíková, Naďa, *Číselné představy dětí.* Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 1999. 123 s. ISBN 80-86039-98-6.

4 Hejný, Milan - Kuřina, František. *Dítě, škola a matematika :konstruktivistické přístupy k vyučování.* Vyd. 1. Praha: Portál, 2001. 187 s. ISBN 80-7178-581-4.

5 Blažková, Růžena - Matoušková, Květoslava - Vaňurová, Milena. *Kapitoly z didaktiky matematiky (slovní úlohy, projekty).* Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2002. 84 s. ISBN 80-210-3022-4.

6 Zuzana Kolláriková - Branislav Pupala, eds., *Predškolská a elementárna pedagogika.* Vyd. 1. Praha: Portál, 2001. 455 s. ISBN 80-7178-585-7.

7 Blažková, Růžena - Matoušková, Květoslava - Vaňurová, Milena, *Poruchy učení v matematice a možnosti jejich nápravy.* Brno: Paido, edice pedagogické literatury, 2007. 96 s. Dotisk 1. vydání. ISBN 80-85931-89-3.

8 Drábek, Jaroslav - Viktora, Václav, *Základy elementární aritmetiky: pro učitelství 1. stupně ZŠ a.* 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985. 223 s.