

# Mocniny, odmocniny, úpravy algebraických výrazů

Repetitorium z matematiky

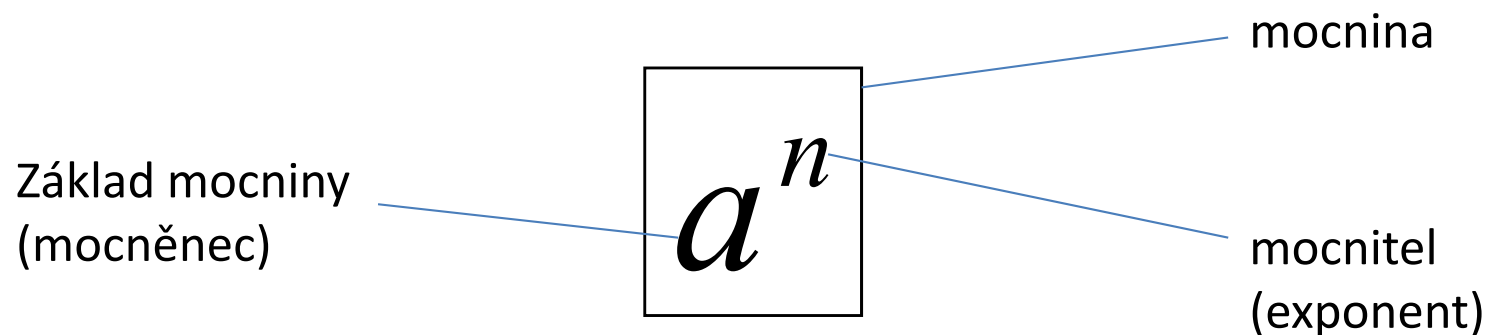
Podzim 2011

Ivana Vaculová

# 1. Mocniny s přirozeným a celým mocnitelem

- Pro každé reálné číslo  $a$  a každé přirozené číslo  $n$  platí:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ činitelů}}$$



# Pravidla pro počítání s mocninami:

Pro  $\forall a \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$  platí:

$$a^1 = a$$

$$1^n = 1$$

$$0^n = 0$$

$$a > 0 \Rightarrow a^n > 0$$

$$a < 0 \Rightarrow a^{2n} > 0$$

$$a < 0 \Rightarrow a^{2n-1} < 0$$

# Věty pro počítání s mocninami

Pro  $\forall a, b \in R$  a  $\forall r, s \in Z$  platí :

$$a) a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$b) (a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

$$c) a^r \div a^s = a^{r-s}$$

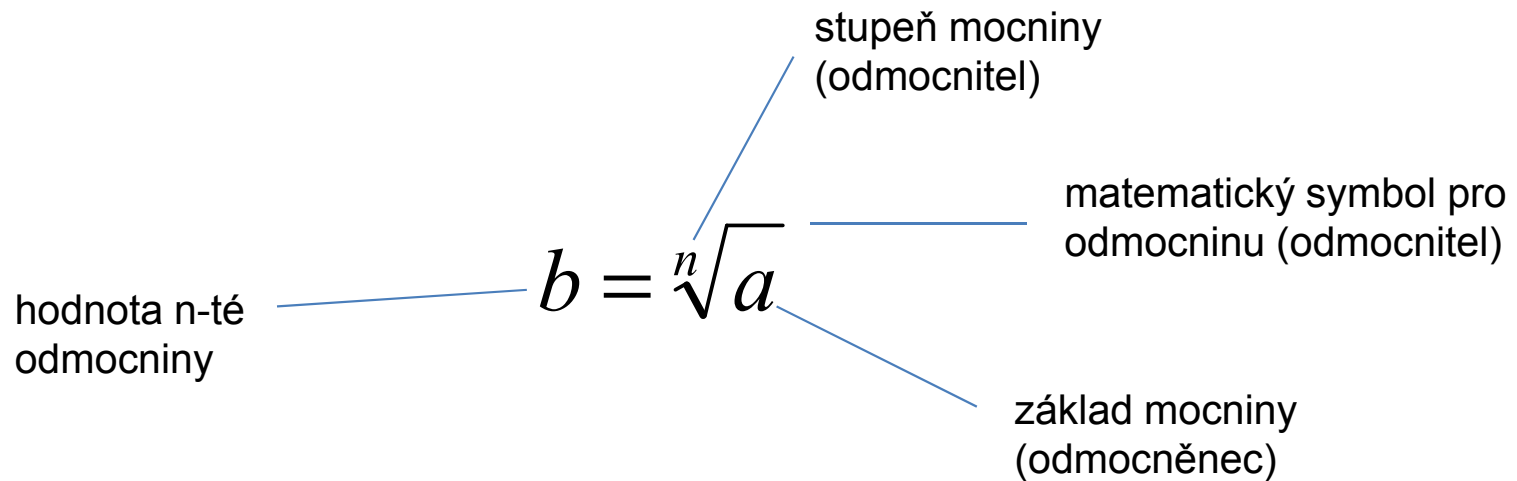
$$d) (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

$$e) \left( \frac{a}{b} \right)^r = \frac{a^r}{b^r}, b \neq 0$$

$$f) a^{-m} = \frac{1}{a^m} = \left( \frac{1}{a} \right)^m$$

## 2. n-tá odmocnina

Pro  $\forall n \in \mathbb{N}$  je  $n$ -tá odmocnina z nezáporného čísla  $a$  takové nezáporné číslo  $b$ , pro něž platí  $b^n = a$ . Budeme zapisovat:  $b = \sqrt[n]{a}$



# Pravidla pro počítání s odmocninami

$$a) \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

kde  $a, b \in R \wedge a, b \geq 0; n \in N$

$$b) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

kde  $a, b \in R \wedge a \geq 0 \wedge b > 0; n \in N$

$$c) (\sqrt[n]{a})^s = \sqrt[n]{a^s}$$

kde  $a \in R \wedge a \geq 0; n, s \in N$ , nebo  
 $a \in R \wedge a > 0; n \in N; s \in Z$

$$d) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

kde  $a \in R \wedge a \geq 0; n, m \in N$

Poznámka:  $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

kde  $a \in R \wedge a \geq 0; n \in N$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

kde  $a \in R \wedge a \geq 0; n, m \in N$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}$$

kde  $a \in R \wedge a > 0; n \in N$

# 3. Algebraické výrazy

= zápisy, ve kterých se mohou vyskytovat jak určitá čísla (konstanty), tak také písmena (proměnné) a symboly aritmetických operací (+, -, √, <sup>2</sup>, atd.)

Algebraickými výrazy jsou např.:

1; 1 + 2; 3 ÷ 7 - 14; 5 + (2 · 3 - 6);  
x; 1 + x; 3 · (x + 7) - 4;  
 $\frac{1}{3} \pi r^2 v$  (objem rotačního kužele)

Algebraickými výrazy nejsou:

- Logický výrok = tvrzení, u kterého má smysl posuzovat pravdivost (např. 2 = 7)
- Výroková forma – z ní získáme logický výrok dosazením čísel za proměnné, např.:  $6x + 5 > 9$

Proměnné zastupují čísla z určité množiny (obor proměnné). Tyto číselné množiny, ze kterých můžeme za proměnné dosazovat, určují **definiční obor** daného výrazu (pro tyto hodnoty má daný výraz smysl).

# 3.1 Mnohočleny

= zvláštní případy algebraických výrazů.

= výrazy ve tvaru:

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

kvadratický člen

lineární člen

absolutní člen

kde  $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$

$n \in \mathbb{Z} \wedge n \geq 0$

$x$  je proměnná

Je-li  $a_n \neq 0 \Rightarrow$  Jde o mnohočlen  $n$ -tého stupně

Mnohočlen 1. stupně = **LINEÁRNÍ**

2. stupně = **KVADRATICKÝ**

3. stupně = **KUBICKÝ**

$$a_1x + a_0$$

$$a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$ax + b$$

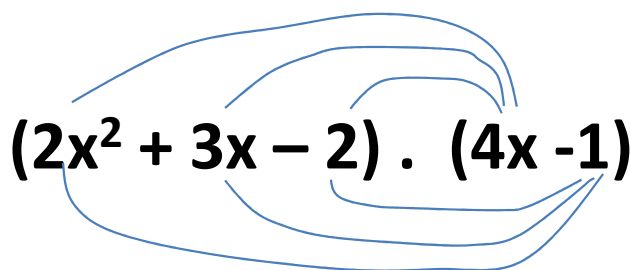
$$ax^2 + bx + c$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$



# Operace s mnohočleny

- **SČÍTÁNÍ** – sečteme koeficienty u členů se stejnými exponenty
- **ODEČÍTÁNÍ (ROZDÍL)** – odstraníme závorky (změníme znaménka u menšitele) a sečteme koeficienty u členů se stejnými exponenty)
- **NÁSOBENÍ** – vynásobíme dle schématu a poté sečteme:

$$(2x^2 + 3x - 2) \cdot (4x - 1)$$


# Operace s mnohočleny

- **DĚLENÍ**

**a) beze zbytku:**

$$(2x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x - 1) / (x^2 + 1) = 2x^2 - 3x - 1$$

**b) se zbytkem**

$$(x^3 - 5x^2 + 5x - 2) : (x - 4) = x^2 - x + 1 + \frac{2}{x - 4}$$

Postup:

1. Dělenci i dělitele uspořádáme sestupně.
2. Vydělíme 1. člen dělenci 1. členem dělitele (dostaneme 1. člen podílu).
3. Vynásobíme tímto členem dělitele a výsledný polynom odečteme od dělenci a získáme dělenci pro další postup.
4. Opakujeme postup vždy s novým dělencem, dokud není zbylý polynom nižšího stupně než dělitel.
5. Uvedeme předpoklady (dělitel musí být různý od nuly).

# Operace s mnohočleny

- **n-tá mocnina,  $(a+b)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$**

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

1							$n = 0$
1	1						$n = 1$
1	2	1					$n = 2$
1	3	3	1				$n = 3$
1	4	6	4	1			$n = 4$
1	5	10	10	5	1		$n = 5$
1	6	15	20	15	6	1	$n = 6$

# Operace s mnohočleny

- **ROZKLAD MNOHOČLENŮ**

= vyjádření ve tvaru součinu několika mnohočlenů, které se zpravidla už nedají dále rozložit.

a) **Vytýkáním před závorku:** Př.:  $(3x^2y^3 + 6xy^2) = 3xy^2 \cdot (xy + 2)$

b) **Použitím vzorců:**

$$(a + b)^n \dots \text{viz str. 11}$$

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

## 3.2 Lomené výrazy

- a) **KRÁCENÍ** = vydělení čitatele i jmenovatele stejným výrazem  
**ROZŠIŘOVÁNÍ** = vynásobení čitatele i jmenovatele stejným výrazem

Pro libovolné výrazy  $V_1, V_2, V_3$  ( $V_2 \neq 0, V_3 \neq 0$ ) platí:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{krácení}} \\ \frac{V_1 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_3} = \frac{V_1}{V_2} \\ \xleftarrow{\text{rozšiřování}} \end{array}$$

## 3.2 Lomené výrazy

### b) SOUČET LOMENÝCH VÝRAZŮ

= lomený výraz, jehož číselník je součet číselníků obou výrazů převedených na společného jmenovatele a jehož jmenovatel je tento společný jmenovatel.

Pro libovolné výrazy  $V_1, V_2, V_3, V_4$  a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž  $V_2 \neq 0, V_4 \neq 0$ , platí:

$$\frac{V_1}{V_2} + \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1V_4 + V_2V_3}{V_2V_4}$$

## 3.2 Lomené výrazy

### c) NÁSOBENÍ LOMENÝCH VÝRAZŮ (součin)

= lomený výraz, jehož čítec je součin číteců a jmenovatel součin jmenovatelů násobených lomených výrazů.

Pro libovolné výrazy  $V_1, V_2, V_3, V_4$  a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž  $V_2 \neq 0, V_4 \neq 0$ , platí:

$$\frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_4}$$

**Pozn.:** Při násobení jednotlivé výrazy neroznásobujeme, naopak, snažíme se je vhodně rozložit a podle možností i krátit.

## 3.2 Lomené výrazy

### d) UMOCŇOVÁNÍ LOMENÝCH VÝRAZŮ

= umocnění čitatele i jmenovatele.

Pro libovolné výrazy  $V_1, V_2$  ( $V_2 \neq 0$ ) a pro libovolné  $k \in \mathbb{N}$  platí:

$$\left( \frac{V_1}{V_2} \right)^k = \frac{V_1^k}{V_2^k}$$



## 3.2 Lomené výrazy

### e) DĚLENÍ LOMENÝCH VÝRAZŮ

➔ pokud dělíme lomeným výrazem, znamená to, že násobíme jeho převrácenou hodnotou.

Pro libovolné výrazy  $V_1, V_2, V_3, V_4$  a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž  $V_2 \neq 0, V_3 \neq 0, V_4 \neq 0$ , platí:

$$\frac{V_1}{V_2} \div \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3}$$

## 3.2 Lomené výrazy

### f) ZJEDNODUŠENÍ SLOŽENÉHO LOMENÉHO VÝRAZU

Pro libovolné výrazy  $V_1, V_2, V_3, V_4$  a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž  $V_2 \neq 0, V_3 \neq 0, V_4 \neq 0$ , platí:

$$\frac{\frac{V_1}{V_2}}{\frac{V_3}{V_4}} = \frac{V_1}{V_2} \div \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3}$$

## 3.2 Lomené výrazy

### g) ÚPRAVY IRACIONÁLNÍCH LOMENÝCH VÝRAZŮ

- při těchto úpravách využíváme vzorce pro počítání s mocninami, odmocninami, mnohočleny i vzorce pro operace s lomenými výrazy.

Příklad:

$$\frac{\left[ (x-y)^{\frac{3}{5}} \right]^{-\frac{4}{3}} + \sqrt[10]{(x-y)^{-8}}}{\sqrt[5]{(x-y)^{-2}}} \cdot \frac{x-y}{\sqrt[5]{(x-y)^3}}$$

# 4 Aplikace

- Vyjádření neznámé ze vzorce

**Př.1:** Ze vzorce pro objem rotačního kužele vyjádřete poloměr jeho podstavy:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v \Rightarrow 3V = \pi r^2 v$$

$$\frac{3V}{\pi v} = r^2$$

$$\sqrt{\frac{3V}{\pi v}} = r$$

# Literatura

- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Odvárko, O. a kol. Funkce. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1996.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.