Posloupnosti

Repetitorium z matematiky

Podzim 2012

Ivana Medková

Osnova:

1 Posloupnosti

- Posloupnost je funkce, která je definovaná v množině přirozených čísel **N.**

A) Konečná posloupnost, D (f) = je množina prvních *k* přirozených čísel

$$\{a_n\}_{n=1}^{k} = a_1, a_2, a_3 \dots\dots a_k$$

B) Nekonečná posloupnost, D (f) = N

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, a_3 \dots\dots a_n$$

Úlohy

Př.1: Napište prvních pět členů posloupnosti dané vzorcem pro n-tý člen:

$a)\ (3n)_{n=1}^{\infty}$

$b)\ \left(\dfrac{n-1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

$c)\ \left(0{,}5+0{,}5\cdot(-1)^{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

$d)\ \left((n-1)n\right)_{n=1}^{\infty}$

Zadáno vzorcem pro n-tý člen

Př.2: Zapište dané posloupnosti vzorcem pro n-tý člen:

$a)\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

$b)\ 1, 4, 9, 16, 25$

$c)\ 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5$

$d)\ 3, -3, 3, -3, 3, -3, 3, -3, 3, -3$

$c)\ \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{81}, \dfrac{1}{243},$

Př.3: Je dána posloupnost $\left(n^{2}+2n+1\right)_{n=1}^{\infty}$. Rozhodněte, zda číslo 223 je členem této posloupnosti.

Zadání posloupnosti rekurentním vzorcem

= jsou zadány první členy posloupnosti a vztah pro výpočet dalších členů posloupnosti pomocí členů předcházejících

Např.: $a_1 = 4$

$a_{n+1} = -2a_n$

$$a_2 = -2a_1 = -8$$
$$a_3 = -2a_2 = 16$$
$$a_4 = -2a_3 = -32$$

Úlohy

<u>Př.1:</u> Napište prvních pět členů posloupnosti určené rekurentně:

$$a)\quad a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n, \quad \mathrm{n} \in \mathrm{N}$$

$$b)\quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}, \quad \mathrm{n} \in \mathrm{N}$$

$$c)\quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad \mathrm{n} \in \mathrm{N}$$

$$d)\quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n, \quad \mathrm{n} \in \mathrm{N}$$

1.1 Vlastnosti posloupností

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá:

- **rostoucí** $\Leftrightarrow \forall n \in N : a_{n+1} > a_n$
- **klesající** $\Leftrightarrow \forall n \in N : a_{n+1} < a_n$
- **nerostoucí** $\Leftrightarrow \forall n \in N : a_{n+1} \leq a_n$
- **neklesající** $\Leftrightarrow \forall n \in N : a_{n+1} \geq a_n$
- **omezená shora** $\Leftrightarrow$ existuje takové *h* ∊ **R**, že pro $\forall n \in N$ je $a_n \leq h$
- **omezená zdola** $\Leftrightarrow$ existuje takové *d* ∊ **R**, že pro $\forall n \in N$ je $a_n \geq d$
- **omezená** $\Leftrightarrow$ posloupnost je omezená shora i zdola zároveň

Úlohy

Př.1: Rozhodněte, která z daných posloupností je rostoucí či klesající:

$$a)\quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty},\quad a_n = (-2)^n$$

$$b)\quad \{b_n\}_{n=1}^{\infty},\quad b_n = \frac{n}{n+1}$$

2 Aritmetická posloupnost

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **aritmetická,** právě když existuje takové $\boldsymbol{d}$ ϵ **R**, že pro každé $\boldsymbol{n}$ ϵ **N** je :

diference aritmetické posloupnosti

$$\boxed{a_{n+1} = a_n + d}$$

Dále platí:

$$\boxed{\begin{aligned} &a_{n+1} - a_n = d \\ &a_n = a_1 + (n-1)d \\ &a_s = a_r + (s-r)d \end{aligned}}$$

Pro **součet** $\boldsymbol{s_n}$ prvních $\boldsymbol{n}$ členů aritmetické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **,** tj. pro $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$**,** platí:

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

Úlohy

Př.1: Vypište první 3 členy aritmetické posloupnosti, ve které platí:

$$a)\quad a_1 = 4, \quad d = -1$$

$$b)\quad a_1 = 0{,}5, \quad d = -3$$

$$c)\quad a_5 = 6, \quad d = 2$$

$$d)\quad a_5 = 7, \quad a_9 = 11,$$

Př.2: Určete součet prvních dvanácti členů aritmetické posloupnosti, pro kterou platí:

$$a)\quad a_1 = 6, \quad a_{12} = 28$$

$$b)\quad a_1 = 0, \quad d = 1{,}5$$

$$c)\quad a_1 = 2, \quad a_8 = -19$$

$$d)\quad a_4 = 7, \quad a_8 = -1$$

Př.3: Vypočítejte součet všech dvojciferných přirozených čísel.

3 Geometrická posloupnost

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **geometrická,** právě když existuje takové ***q*** ∊ **R**, že pro každé ***n*** ∊ **N** je :

Kvocient geometrické posloupnosti

$$\boxed{a_{n+1} = a_n \cdot q}$$

Dále platí:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_s = a_r \cdot q^{s-r}$$

Pro **součet *s***

a) je-li **q = 1**, pak

$$s_n = n \cdot a_1$$

b) Je-li **q ≠ 1**, pak

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Úlohy

Př.1: Vypočtěte kvocient dané geometrické posloupnosti a určete členy a_5 a a_8:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad a_1 = 6, \; a_2 = 24$$

Př.2: Vypočtěte kvocienty daných geometrických posloupností a určete první 3 členy.

$$a) \left(\frac{2}{(-2)^n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

$$b) \left(2^n \cdot 3^{2-n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

Př.3: Určete součet prvních deseti členů geometrické posloupnosti, pro kterou platí:

$$a) \quad a_1 = -2, \quad a_2 = 4$$

$$b) \quad a_1 = 6, \quad a_2 = 24$$

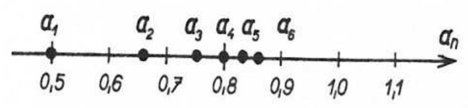
4 Limita posloupnosti

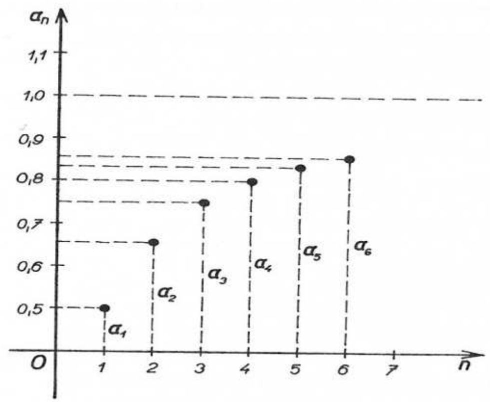
Pro každou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ může nastat jeden z těchto tří typových případů:

a) S rostoucím ***n*** se členy posloupnosti neomezeně blíží k určitému ***a* ϵ R**, pak **a** je **vlastní limitou** posloupnosti.

Např.:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$$

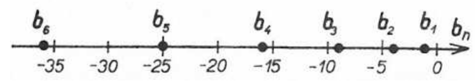


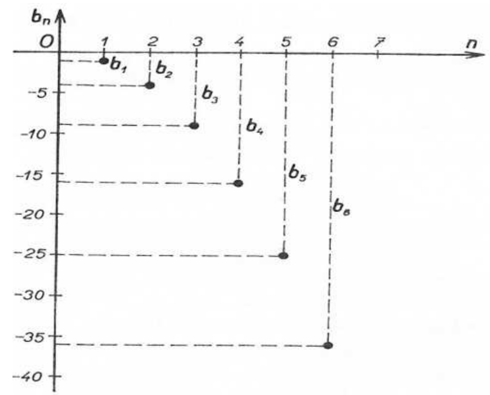


b) S rostoucím ***n*** se členy posloupnosti blíží k **+∞** nebo **-∞**, pak říkáme, že posloupnost má **nevlastní limitu +∞ nebo -∞.**

Např.:

$$(b_n)_{n=1}^{\infty} = \left(-n^2\right)_{n=1}^{\infty}$$

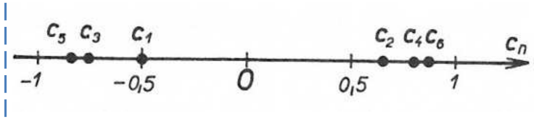


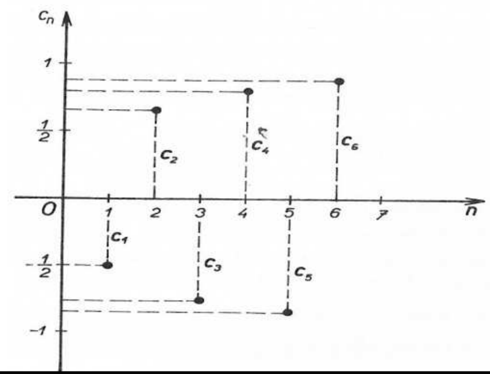


c) S rostoucím ***n*** se členy posloupnosti **neblíží** ani k ***a* ϵ R**, ani k +∞ nebo -∞, pak říkáme, že posloupnost **nemá** ani vlastní, ani nevlastní limitu.

Např.:

$$(c_n)_{n=1}^{\infty} = \left((-1)^n \frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$$





Věty o limitách posloupností

- Pokud $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je:
  - aritmetická posloupnost, kde ***d* = 0, *a*$_1$ = *a***
  - geometrická posloupnost, kde ***q* = 1, *a*$_1$ = *a***

  $\Rightarrow$ $$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$
- Pokud je u aritmetické posloupnosti ***d* ≠ 0** $\Rightarrow$ nemá vlastní limitu.
- Pokud pro geometrickou posloupnost platí:

  |q|< 1 $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

  |q|> 1 nebo q = -1 $\Rightarrow$ nemá vlastní limitu

- Při výpočtu limit využíváme následující vztahy:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \,.\, b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \,.\, \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} c a_n = c \,.\, \lim\limits_{n\to\infty} a_n$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ $(\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0)$.

f) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left((-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right) = 0$$

Úlohy

<u>Př.1:</u> Určete limity:

$$a)\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{6n+5}$$

$$b)\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{n^2+5}$$

$$c)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-5}\right)^3$$

Literatura

- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Odvárko, O. Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady, Praha: Prometheus, 1996.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- Vošický Zdeněk. Matematika v kostce pro střední školy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.