2.5. Soustava lineárních rovnic

Cíle

Řešení soustav lineárních rovnic je úloha, která se velmi často vyskytuje nejen při řešení úloh v různých oblastech matematiky, ale také ve většině vědních disciplín. Dobré praktické zvládnutí jednoduchých úloh o řešení soustav lineárních rovnic je samozřejmým předpokladem využití vhodného matematického software.

Definice 2.5.1.

Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ nazveme množinu výrokových funkcí

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \qquad (1)$$

kde $a_{ij} \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, nazýváme **koeficienty soustavy** (1), $b_1, \dots, b_m$ je sloupec pravých stran, n-tici $(x_1', x_2', \dots, x_n')^T \in \mathbf{R}^n$ nazveme **řešením soustavy** (1), jestliže po dosazení za $x_1, \dots, x_n$ se stanou všechny výrokové formy pravdivými výroky.

Jestliže zavedeme matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

lze soustavu (1) psát ve tvaru $\mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

Matice $\mathbf{A}$ se nazývá **matice soustavy**, matice

$$\mathbf{A}|\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

matice rozšířená. Jestliže $b_k = 0$ pro $k = 1, \dots, m$, pak soustavu (1) nazýváme soustavou homogenních rovnic, jestliže je alespoň jedno $b_k \neq 0$, hovoříme o soustavě nehomogenních rovnic.

Řešené úlohy

Příklad Pro soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+x_3} - x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \phantom{{}-x_4} &= 0 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ matice soustavy,}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{A}|\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

je rozšířená matice soustavy.

Věta 2.5.1. (Cramerovo pravidlo). Je-li $\mathbf{A}$ matice typu (n,n) a det $\mathbf{A} \neq 0$, pak soustava

$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{X} = \mathbf{B}$ má právě jedno řešení

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (\det \mathbf{A}_1, \det \mathbf{A}_2, \dots, \det \mathbf{A}_n)^T,$$

kde

$$\mathbf{A}_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & b_i & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n\,.$$

Důkaz : Vynásobíme rovnici $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{X} = \mathbf{B}$ zleva maticí $\mathbf{A}^{-1}$ a dostaneme

$\mathbf{A}^{-1} \,.\, \mathbf{A} \,.\, \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \,.\, \mathbf{B}$ a tedy $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \,.\, \mathbf{B}$.

Vyjádříme-li inverzní matici a vynásobíme maticí $\mathbf{B}$, dostaneme v i-tém řádku

$$x_i = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ji} \,.\, b_j = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_j \det \mathbf{A}_{ji} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \det \mathbf{A}_i\,,$$

protože součet v předposledním výrazu je rozvoj det $\mathbf{A}_i$ podle i-tého sloupce. Existenci jiného řešení lze vyloučit sporem.

Řešené úlohy

Příklad Řešme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= -1\,. \end{aligned}$$

Řešení:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$\det \mathbf{A} = 1 \neq 0$, $\det \mathbf{A}_1 = 0$, $\det \mathbf{A}_2 = 1$, $\det \mathbf{A}_3 = 3$.

Podle předchozí věty je $\mathbf{X} = (0, 1, 3)^T$, tedy $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ a $x_3 = 3$.

Můžeme provést zkoušku

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Výklad

Řešení soustavy pomocí inverzní matice

Je-li $\mathbf{A}$ matice soustavy typu (m, n) a det $\mathbf{A} \neq 0$ ($\mathbf{A}$ je regulární), můžeme soustavu $\mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{B}$ řešit násobením zleva inverzní maticí $\mathbf{A}^{-1}$ a dostaneme řešení dané soustavy $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}.\,\mathbf{B}$.

Řešené úlohy

Příklad Řešme soustavu pomocí inverzní matice.

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= -7 \\ 2x_1 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -11\,. \end{aligned}$$

Řešení:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{A} = 16 \neq 0\,, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -2 & 11 & -5 \\ -4 & -10 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}.\,\mathbf{B} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -2 & 11 & -5 \\ -4 & -10 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 32 \\ 80 \\ -48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Věta 2.5.2. **(Frobeniova).** Soustava rovnic $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{X} = \mathbf{B}$ má řešení, právě když $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{B})$. Označíme-li $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = r$ a $\mathbf{A}$ je typu (m, n), pak v případě $r = n$ (n počet neznámých) má soustava jediné řešení a v případě $n > r$ má soustava nekonečně mnoho řešení, která můžeme zapsat pomocí (n - r) parametrů.

Důkaz je obtížný a nebudeme jej provádět.

Výklad

Gaussova eliminační metoda řešení soustav lineárních rovnic

Předpokládejme, že matice $\mathbf{A}'|\mathbf{B}'$ vznikne z rozšířené matice soustavy $\mathbf{A}|\mathbf{B}$ úpravami:

1. Výměnou dvou řádků,
2. vynásobením řádku číslem různým od nuly,
3. vynecháním řádků se samými nulami,
4. přičtením k-násobku ($k \neq 0$) řádku k jinému řádku.

Pak soustavy $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{X} = \mathbf{B}$ a $\mathbf{A}' . \,\mathbf{X} = \mathbf{B}'$ mají stejná řešení. Správnost úvahy vyplývá z toho, že každý řádek rozšířené matice soustavy odpovídá příslušné rovnici. Uvedené úpravy můžeme s rovnicemi provádět.

Úpravy 1 - 4 nemění hodnost matice $\mathbf{A}$ ani matice $\mathbf{A}|\mathbf{B}$. Frobeniovu větu budeme proto aplikovat až na vhodně upravenou soustavu rovnic. Užitím úprav 1 - 4 budeme postupně upravovat rozšířenou matici soustavy na trojúhelníkový tvar tak, aby $a_{ij} = 0$ pro $i > j$. Způsob úpravy ukážeme v následujících příkladech.

Řešené úlohy

Příklad Řešme soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 5x_3 &= -7\\
x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5\\
2x_1 + x_2 + x_3 &= 2\\
2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 14\,.
\end{aligned}
$$

Řešení:

Úpravy rozšířené matice soustavy budeme zapisovat do následující tabulky. Poslední sloupec, pro jehož prvky platí

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} + b_i\,,\qquad i = 1, \dots, m,$$

je kontrolní a součet prvků v řádku matice rozšířené musí vždy po provedení úpravy ve všech sloupcích být roven příslušnému prvku ve sloupci kontrolním.

A	**B**	Σ	úpravy
1 1 5	–7	0	
1 3 1	5	10	$r_2 - r_1$
2 1 1	2	6	$r_3 - 2r_1$
2 3 –3	14	16	$r_4 - 2r_1$
1 1 5	–7	0	
0 2 –4	12	10	
0 –1 –9	16	6	$2r_3 + r_2$
0 1 –13	28	16	$2r_4 - r_2$
1 1 5	–7	0	
0 2 –4	12	10	
0 0 –22	44	22	
0 0 –22	44	22	$r_4 - r_3$
1 1 5	–7	0	
0 2 –4	12	10	
0 0 –22	44	22	
0 0 0	0	0	

Po provedení úprav platí:

$h(\mathbf{A}') = h(\mathbf{A}'|\mathbf{B}') = 3$ a podle Frobeniovy věty má soustava jediné řešení, které určíme řešením nové soustavy:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 5x_3 &= -7 \\ 2x_2 - 4x_3 &= 12 \\ -22x_3 &= 44, \end{aligned}$$

$x_3 = -2$, $x_2 = 2$, $x_1 = 1$,

tedy $\mathbf{X} = (1, 2, -2)^T$.

Příklad Řešme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 &+ x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 &+ 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 &+ x_2 - 2x_3 = 1\,. \end{aligned}$$

Řešení:

$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	Σ	úpravy
1 1 1 1 1 −3 1 2 −3 2 1 −2	3 −1 1 1	6 −2 1 2	 $r_2 - r_1$ $r_3 - r_1$ $r_4 - 2r_1$
1 1 1 0 0 −4 0 1 −4 0 −1 −4	3 −4 −2 −5	6 −8 −5 −10	vyměníme řádek r_2 a řádek r_4
1 1 1 0 −1 −4 0 1 −4 0 0 −4	3 −5 −2 −4	6 −10 −5 −8	 $r_3 + r_2$
1 1 1 0 −1 −4 0 0 −8 0 0 −4	3 −5 −7 −4	6 −10 −15 −8	 $2r_4 - r_3$
1 1 1 0 −1 −4 0 0 −8 0 0 0	3 −5 −7 −1	6 −10 −15 −1	

Po provedení úprav platí $h(\mathbf{A}') = 3$ a $h(\mathbf{A}'|\mathbf{B}') = 4$. Podle Frobeniovy věty nemá soustava řešení.

Příklad Řešme soustavu rovnic

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & & & = & 0 \\
4x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & - & 4x_5 & = & 0 \\
2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & - & 7x_5 & = & 0\,.
\end{array}
$$

Řešení:

$\mathbf{A}$					Σ	úpravy
1	1	0	−3	−1	−2	
1	−1	2	−1	0	1	$r_2 - r_1$
4	−2	6	3	−4	7	$r_3 - 4r_1$
2	4	−2	4	−7	1	$r_4 - 2r_1$
1	1	0	−3	−1	−2	
0	−2	2	2	1	3	
0	−6	6	15	0	15	$r_3 - 3r_2$
0	2	−2	10	−5	5	$r_4 + r_2$
1	1	0	−3	−1	−2	
0	−2	2	2	1	3	
0	0	0	9	−3	6	
0	0	0	12	−4	8	$3r_4 - 4r_3$
1	1	0	−3	−1	−2	
0	−2	2	2	1	3	
0	0	0	9	−3	6	
0	0	0	0	0	0	

Soustava rovnic je homogenní a tedy vždy platí $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{B})$, neboť $\mathbf{B} = (0,0,0)^T$, tj. soustava má řešení. Není tedy nutno psát sloupec $\mathbf{B}$.

Hodnost $h(\mathbf{A}) = 3$.

Pro soustavu rovnic

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \\
 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 0 \\
 & & & & & & 9x_4 & - & 3x_5 & = & 0
\end{array}
$$

zvolíme vhodně 2 (t.j. (5 - 3)) parametry: $x_5 = 6p$ a $x_3 = q$. Pak dostaneme $x_4 = 2p$, $x_2 = q + 5p$ a $x_1 = 7p - q$.

Řešení soustavy je $x_1 = 7p - q$, $x_2 = 5p + q$, $x_3 = q$, $x_4 = 2p$, $x_5 = 6p$, $p, q \in \mathbf{R}$.

Výklad

Určení inverzní matice užitím Gaussovy metody

Mějme matice **A** a **E** obě typu (n, n). Budeme-li provádět v matici **A** úpravy uvedené pod body 1 - 4 Gaussovy eliminační metody pro řešení soustav rovnic a upravíme-li tak matici **A** na matici **E** typu (n, n), lze všechny provedené úpravy vyjádřit jako násobení matice **A** maticí **B**, kde $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}$. Z toho je zřejmé, že matice $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Proveďme stejné úpravy

i pro matici **E**, t.j. $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$. To znamená, že takto vzniklá matice je inverzní maticí k matici **A**.

Řešené úlohy

Příklad Určeme inverzní matici k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení:

Matice **A** a **E** zapíšeme do následující tabulky.

A	**E**	$\sum$	úpravy
1 0 -1	1 0 0	1	
1 2 3	0 1 0	7	$r_2 - r_1$
-1 1 0	0 0 1	1	$r_3 + r_1$
1 0 -1	1 0 0	1	
0 2 4	-1 1 0	6	
0 1 -1	1 0 1	2	$2r_3 - r_2$
1 0 -1	1 0 0	1	$6r_1 - r_3$
0 2 4	-1 1 0	6	$3r_2 + 2r_3$
0 0 -6	3 -1 2	-2	
6 0 0	3 1 -2	8	$\cdot \frac{1}{6}$
0 6 0	3 1 4	14	

0 0 -6	3 -1 2	-2	. $\frac{1}{6}$. (- $\frac{1}{6}$)
1 0 0 0 1 0 0 0 1	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$ $\frac{7}{3}$ $\frac{1}{3}$	
$\mathbf{A} . \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$	$\mathbf{E} . \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$		

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Kontrolní otázky

1. Matice soustavy je matice vytvořená

   a) ze sloupce pravých stran $(b_1, \ldots, b_m)$,

   b) z koeficientů soustavy a_{ij},

   c) z n neznámých $x_1, \ldots, x_n$.

2. Pokud sloupec pravých stran $b_k = 0$ pro $k = 1, \ldots, m$, pak soustavu nazýváme

   a) soustavou homogenních rovnic,

   b soustavou nelineárních rovnic,

   a) soustavou nehomogenních rovnic.

3. Cramerovým pravidlem lze řešit

   a) jakoukoli soustavu lineárních rovnic,

   b) soustavu lineárních rovnic, pokud matice soustavy je singulární,

   c) soustavu lineárních rovnic, pokud matice soustavy je regulární.

4. Matematická věta, podle které se určuje počet řešení soustavy lineárních rovnic se nazývá

   a) Gaussova,

   b) Cramerova,

   c) Frobeniova.

5. Soustava lineárních rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ má řešení

   a) vždy,

   b) právě když $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}/\mathbf{B})$,

c) pokud je počet neznámých $x_1, \ldots, x_n$ a počet rovnic stejný.

6. Gaussova eliminační metoda řešení soustav lineárních rovnic spočívá v úpravě rozšíření matice soustavy

   a) tak, aby ve sloupci pravých stran byly samé nuly,

   b) na trojúhelníkový tvar tak, aby $a_{ij} = 0$ pro $i > j$,

   c) na trojúhelníkový tvar tak, aby $a_{ij} = 0$ pro $i = j$.

7. Homogenní soustava lineárních rovnic

   a) má vždy řešení,

   b) má vždy nenulové řešení,

   c) nemá řešení.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. a); 3. c); 4. c); 5. b); 6. b); 7. a).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Řešte různými způsoby soustavy lineárních rovnic (Cramerovým pravidlem, pomocí inverzní matice a Gaussovou eliminací):

a) $\begin{aligned} 3x + y &= 1 \\ x - y &= 7 \end{aligned}$, b) $\begin{aligned} 2x - 6y &= 4 \\ 3x - 9y &= 1 \end{aligned}$, c) $\begin{aligned} 5x - y + 2z &= 4 \\ 3x + 5y - z &= 9 \\ -4x + 2y + 3z &= -17 \end{aligned}$,

d) $\begin{aligned} 4x - 2y + 6z &= -4 \\ 7x + 5y - 2z &= 14 \\ 2x - 8y + 5z &= -11 \\ -3x - 3y - 7z &= 1 \end{aligned}$, e) $\begin{aligned} 6x - 3y \phantom{{}+7z} &= 24 \\ 4y - 7z &= -13 \\ 5x \phantom{{}-3y} + 6z &= 43 \end{aligned}$,

f) $\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= -7 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 &= 9 \end{aligned}$, g) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= -3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= -12 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 &= 9 \end{aligned}$,

$$\text{h)}\quad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= -14 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 13 \\ 2x_1 + 9x_2 - 9x_3 &= 20 \end{aligned}\ .$$

2. Řešte soustavy lineárních rovnic:

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}\ , \qquad \text{b)}\quad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 4 \\ x_1 - x_3 &= 2 \end{aligned}\ ,$$

$$\text{c)}\quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \end{aligned}\ , \qquad \text{d)}\quad \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}\ ,$$

$$\text{e)}\quad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= -3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 5 \\ 3x_1 - 3x_3 + x_4 &= 7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}\ , \qquad \text{f)}\quad \begin{aligned} 0{,}1x + 0{,}2y + 0{,}3z &= 1{,}4 \\ 0{,}3x - 0{,}1y + 0{,}2z &= 0{,}7 \\ 0{,}5x - 0{,}4y + 0{,}1z &= 0 \end{aligned}\ ,$$

$$\text{g)}\quad \begin{aligned} x_1 - x_2 + 5x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 9x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= -2 \end{aligned}\ , \qquad \text{h)}\quad \begin{aligned} x_1 - 5x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned}\ ,$$

$$\text{i)}\quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \end{aligned}\ , \qquad \text{j)}\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -3 \\ x_1 - x_2 - x_4 &= -4 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}\ .$$

3. Řešte soustavy homogenních rovnic:

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} 4x - y &= 0 \\ 5x + 3y &= 0 \end{aligned}\ , \qquad \text{b)}\quad \begin{aligned} x_1 + 5x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}\ ,$$

$$\text{c)}\quad \begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}\ , \qquad \text{d)}\quad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}\ ,$$

$$\text{e)}\quad \begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}\ , \qquad \text{f)}\quad \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}\ ,$$

$$\text{g)}\quad \begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \end{array},$$

$$\text{h)}\quad \begin{array}{rcrcrcrcrcl} 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & & & = & 0 \end{array}.$$

4. Proveďte diskusi řešení soustav vzhledem k parametru k:

$$\text{a)}\quad \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ x & - & 4y & - & 3z & = & k \end{array},\qquad \text{b)}\quad \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ -x_1 & + & x_2 & & & - & 2x_4 & = & 0 \\ -x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & k \end{array}.$$

5. Zvětšíme-li jednu stranu trojúhelníka o 11 cm a druhou stranu o 11 cm zmenšíme, dostaneme rovnostranný trojúhelník. Když první stranu vynásobíme čtyřmi, je o 10 cm větší než trojnásobek třetí strany. Vypočtěte velikosti stran trojúhelníka.

6. Kyselina sírová je složena z vodíku, síry a kyslíku. Poměr hmotnosti vodíku a síry je 1 : 16 a poměr hmotnosti kyslíku a síry je 2 : 1. Kolik každého prvku obsahuje 1323 g kyseliny?

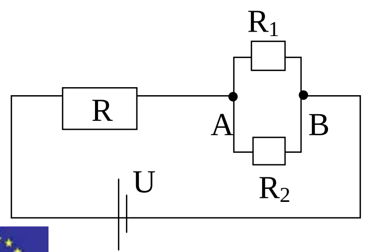
7. Hutník má čtyři různé slitiny, které obsahují cín, olovo, vizmut a kadmium. První slitina obsahuje 20 kg cínu a 10 kg olova. Druhá obsahuje 12 kg olova a 6 kg cínu. Třetí obsahuje 10,5 kg vizmutu, 6,4 kg olova a 3,1 kg cínu. Poslední slitina obsahuje 10 kg vizmutu, 5 kg olova, 2,5 kg kadmia a 2,5 kg cínu. Jaké množství každé slitiny je třeba použít na přípravu slitiny, která by obsahovala 81 kg vizmutu, 75 kg olova, 15 kg kadmia a 40 kg cínu ?

8. Vypočtěte proudy (podle Kirchhoffových zákonů) ve všech větvích elektrických sítí podle obr. a, b, kde hodnoty jednotlivých odporů a elektromotorického napětí jsou:

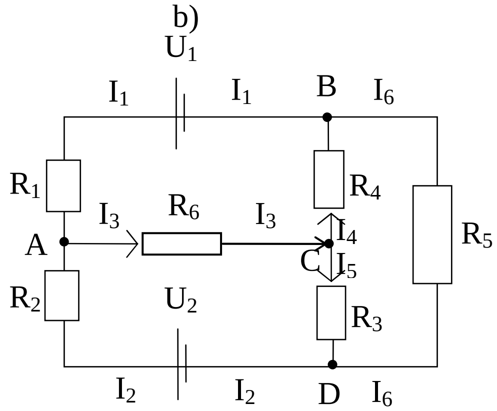
a) $R = 1000\ \Omega$, $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 150\ \Omega$, $U = 2$ V,

b) $U_1 = 46$ V, $U_2 = 62$ V, $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$, $R_4 = 4\ \Omega$, $R_5 = 1{,}5\ \Omega$, $R_6 =$ $= 2\Omega$.

a)



b)



Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. **a)** (2, -5), **b)** nemá řešení, **c)** (2, 0, -3), **d)** (1, 1, -1), **e)** (5, 2, 3), **f)** (1, 5, -3), g) (3, 4, 5), **h)** nemá řešení.

2. **a)** $\left(\frac{6-8t}{5}, \frac{7t-4}{10}, t\right)$, **b)** (t+2, 2t, t), **c)** nemá řešení, **d)** $\left(\frac{5+t}{2}, 1+3t, \frac{-1-7t}{2}, t\right)$,

e) (r, 5r-4s-9, s, 7-3r+3s), **f)** (4-r, 5-r, r), **g)** (3-6t, 2-t, t), h) nemá řešení,

i) (r, 2r+3s-3, s, 1-r+2s), **j)** (-2, 2-t, -3, t).

3. **a)** (0, 0), **b)** (2t, -t, 3t), **c)** (0, 0, 0), **d)** (3t, 2t, t), **e)** (7t, 3t, -2t, t), **f)** (-t, t, -3t, 2t), **g)** (t, 2t, 3t, 4t), **h)** (t, -t, 2t, 3t, 2t).

4. **a)** pro k = 3 nekonečně mnoho řešení, pro $k \neq 3$ nemá řešení, **b)** pro $k \neq -3$ nemá řešení, pro k = -3 nekonečně mnoho řešení.

5. Strany mají délku 43 cm, 65 cm a 54 cm.

6. 27 g vodíku, 432 g síry a 864 g kyslíku.

7. Je třeba 5,4 kg 1. slitiny, 45,6 kg 2. slitiny, 40 kg 3. slitiny a 120 kg 4. slitiny.

8. **a)** $I_1 \approx 1{,}45$ mA, $I_2 \approx 0{,}48$ mA, $I \approx 1{,}93$ mA, **b)** $I_1 = 2$A, $I_2 = 7$A, $I_3 = 9$A, $I_4 = 6$A, $I_5 =$ $= 3$A, $I_6 = -4$A.

Kontrolní test

1. Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 6 \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= -1. \end{aligned}$$

a) $(1;9;1)$, b) $(1;3;-2)$.

2. Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 10 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -9. \end{aligned}$$

a) $(1;-1;0)$, b) $(1-18t; 3+2t; -2+11t),\ t \in R$.

3. Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ 3x + y - z &= 1 \\ 2x + 4y + 6z &= 3. \end{aligned}$$

a) nemá řešení, b) $(-1-t; 1-t; 1+t),\ t \in R$.

4. Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -5 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5. \end{aligned}$$

a) $(-1-t; 3+t; t),\ t \in R$, b) $(4;1;1)$.

5. Řešte soustavu rovnic pomocí Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 2 \\ x + 5y - 4z &= -5 \\ 4x + y - 3z &= -4. \end{aligned}$$

a) $(1,3,9)$, b) $(5,6,10)$.

6. Řešte soustavu lineárních rovnic užitím Gaussovy metody:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4. \end{aligned}$$

a) $(t, 1-t, -t, t)$, b) $(-1-3t, -t, t, 1+t)$.

7. Řešte soustavu komplexních lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}$$

a) $(-t, 3t, 2t, -t)$, b) $(10t, -16t, -t, t)$.

8. Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí inverzní matice

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x - y + z &= -2 \\ 4x + y + z &= 4. \end{aligned}$$

a) $(2,2,-3)$, b) $(1,2,-2)$.

Výsledky testu

1. b); 2. b); 3. a); 4. a); 5. b); 6. a); 7. b); 8. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 6 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 2.5. znovu.