DM1

Příklady - dělitelnost

Růžena Blažková, Irena Budínová

Označení: Symbolem $\overline{abc}$ budeme označovat trociferné číslo zapsané ciframi *a, b, c*, jeho rozvinutý zápis je $100a + 10b + c$. Sudé číslo se vyjádří zápisem $2k$, liché číslo zápisem $2k + 1$ nebo $2k - 1$. Uvádíme příklady, ve kterých se ilustrují příklady s vhodnými postupy, např. vytýkáním, rozklady, užití důkazu matematickou indukcí apod.

1. Nejprve uvádíme jednoduché věty (bez důkazu) týkající se součtu nebo součinu přirozených čísel, které se snadno ověří, např.

- Součet každých dvou lichých (sudých) čísel je číslo sudé.
- Součet libovolného sudého a libovolného lichého čísla je číslo liché.
- Součet dvou lichých, po sobě jdoucích čísel je vždy dělitelný čtyřmi.
- Součin libovolných dvou lichých čísel je číslo liché.
- Součin libovolného sudého čísla a libovolného lichého čísla je číslo sudé.
- Součin libovolných dvou sudých čísel je dělitelný čtyřmi.

2. Dokažte, že rozdíl libovolného trojciferného čísla a čísla zapsaného opačným pořadím cifer je vždy dělitelný čísly 9 a 11.

Důkaz: Čísla zapíšme pomocí jejich rozvinutého zápisu:

$(100\, a + 10\, b + c) - (100\, c + 10\, b + a) = 99\, a - 99\, c = 9 \,.\, 11\, (a - c).$

Modifikace ve školské matematice: Zvolte si libovolné trojciferné číslo a zapište číslo s opačným pořadím číslic. Odečtěte od většího čísla číslo menší. Čím je dělitelný tento rozdíl?

Další zajímavá modifikace: Zvolte si trojciferné číslo tak, aby počet stovek byl alespoň o 2 větší než počet jednotek. Zapište číslo s opačným pořadím číslic a odečtěte od většího čísla číslo menší. Rozdíl je trojciferné číslo. Zapište číslo s opačným pořadím číslic a obě čísla sečtěte. Pokud jste správně počítali, výsledek je vždy 1 089. Platnost tohto tvrzení ověříme velmi jednoduše. uvádí vlastnost rozdílu dvou trojciferných čísel. Toto číslo je násobkem čísla 99, číslo $a - c$ je rozdílem dvou jednociferných přirozených čísel, a to je tedy číslo jednociferné. Násobky čísla 99, které jsou trojcifernými čísly jsou: 198, 297, 396, 495, 594, 693, 729, 891. Pokud je rozdílem dvou trojciferných čísel některé z nich a toto číslo sečteme s číslem s opačným pořadím číslic, dostaneme číslo, u kterého je součet jednotek 9, součet desítek je 90 + 90 = 180 a součet stovek je 900. Tedy

$$900 + 180 + 9 = 1089.$$

3. Jestliže *p* je prvočíslo větší než 3, pak je vždy jedno z čísel *p – 1, p + 1* dělitelné šesti. Dokažte.

Důkaz: Je třeba dokázat, že jedno z čísel $p - 1$ nebo $p + 1$ je dělitelné dvěma a zároveň třemi. Jestliže p je prvočíslo větší než 3, pak čísla $p - 1$ i $p + 1$ jsou sudá, tedy obě jsou dělitelná dvěma. Čísla $p - 1, p, p + 1$ jsou tři po sobě jdoucí přirozená čísla, tedy jedno z nich je dělitelné třemi. Číslo p to není, neboť je prvočíslo. Tedy je to některé z čísel $p - 1$ nebo $p + 1$.

Modifikace ve školské matematice: Zvolte si libovolné prvočíslo větší než 3. Všimněte si, že jeho předchůdce nebo jeho následovník je dělitený šesti.

4. Jsou dána čísla *a, b,* žádné z nich není dělitelné třemi. Pak alespoň jedno z čísel *a* + *b* nebo *a – b* je dělitelné třemi.

Důkaz**:** Pokud čísla a, b nejsou dělitelná třemi, pak je můžeme vyjádřit ve tvaru

$a = 3x + 1$ *nebo* $a = 3x + 2$, $b = 3y + 1$ nebo $b = 3y + 2$.

$a + b = 3x + 1 + 3y + 2 = 3(x + y + 1)$

$a - b = 3x + 1 - (3y + 1) = 3(x - y)$

Součet je dělitelný třemi, jestliže čísla a, b jsou z různých zbytkových tříd, rozdíl je dělitelný třemi, jestliže čísla a, b jsou ze stejných zbytkových tříd.

5. Dokažte, že součet šesti trojciferných čísel zapsaných týmiž ciframi, avšak v různém pořadí, je vždy dělitelný číslem 222.

Důkaz: Trojciferná čísla zapíšeme pomocí rozvinutého zápisu:

$$100\,a + 10\,b + c$$

$$100\,a + 10\,c + b$$

$$100\,b + 10\,a + c$$

$$100\,b + 10\,c + a$$

$$100\,c + 10\,a + b$$

$$100\,c + 10\,b + a$$

Součet těchto čísel je $222\,a + 222\,b + 222\,c = 222(a + b + c)$

Modifikace ve školské matematice: Zvolte si tři různá jednociferná čísla a pomocí nich zapište všechna trojciferná čísla (bez opakování). Všechna tato čísla sečtěte a součet vydělte součtem tří zvolených jednociferných čísel. Vždy vyjde podíl 222.

6. Dokažte, že šesticiferné číslo tvaru $\overline{abcabc}$ (vytvořené z trojciferného čísla zapsaného dvakrát za sebou) je vždy dělitelné čísly 7, 11, 13.

Důkaz: Šesticiferné číslo zapíšeme pomocí jeho rozvinutého zápisu:

$100\,000a + 10\,000b + 1\,000c + 100a + 10b + c = 100\,100a + 10\,010b + 1001\,c =$

$1\,001\,(100a + 10b + c) = 7\,.\,11.\,13\,(100a + 10b + c).$

Modifikace ve školské matematice: Zvolte si libovolné trojciferné číslo a zapište šesticiferné číslo tak, že trociferné číslo zapíšete dvakrát za sebou. Toto číslo vydělte sedmi, získaný podíl vydělte číslem 11 a další získaný podíl vydělte číslem 13. Jaké číslo jste získali?

7. Dokažte, že jestliže trojciferné číslo $\overline{abc}$ je dělitelné číslem 37, pak každé číslo $\overline{bca}$ nebo $\overline{cab}$ je dělitelné číslem 37.

Důkaz: Číslo $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ je násobkem čísla 37, můžeme jej vyjádřit jako $37\,k$.

Číslo $\overline{bca} = 100b + 10c + a$ upravíme tak, že a vyjádříme jako rozdíl $1\,000\,a – 999a.$ Pak

$100\,b + 10\,c + 1\,000\,a – 999a = 10(100a + 10b + c) - 999\,a = 37\,k\,.\,10 + 37\,.\,27a =$

$= 37(10k + 27a)$

Číslo $\overline{cab}$ upravíme analogicky:

$100c + 10a + b = 100c + 10\,000a – 9\,990a + 1\,000b – 999b = 10\,000a + 1\,000\,b + 100c – 9\,999a – 999b = 100(100a + 10b + c) – 999(10a + b) = 37k\,.\,100 + 37\,.\,27(10a – b) = = 37\left[100k + 27(10a - b)\right].$

Modifikace ve školské matematice: Vyberte si libovolný trojciferný násobek čísla 37, z tohto násobku (číslo $\overline{abc}$) vytvořte nové číslo tak, že číslici, která je zapsána na místě stovek, přesunete na místo jednotek (získáte číslo $\overline{bca}$). Je toto číslo dělitelné číslem 37? Podobně vytvořte z původního násobku nové číslo tak, že číslici zapsanou na místě jednotek přemístíte na místo stovek (získáte číslo $\overline{cab}$). Je toto číslo dělitelné číslem 37?

8. Dokažte, že součet dvou po sobě jdoucích mocnin čísla 2 je vždy dělitelný třemi.

Důkaz**:** $2^n + 2^{n+1} = 2^n + 2\,.\,2^n = 2^n\,(1 + 2) = 3\,.\,2^n$

9. Dokažte, že součet tří po sobě jdoucích mocnin čísla 2 je vždy dělitelný sedmi.

Důkaz: $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 2^n + 2\,.\,2^n + 2^2\,.\,2^n = 2^n\,(1 + 2 + 4) = 7\,.\,2^n$

10. Dokažte, že číslo $2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{100}$ je dělitelné třemi.

Důkaz: Výraz upravíme tak, že vždy ze dvou členů vytkneme vhodnou (lichou) mocninu čísla 2:

$2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{100} = 2^1(1 + 2) + 2^3(1 + 2) + ... + 2^{99}(1 + 2) = 3(2^1 + 2^3 + ... + 2^{99})$.

11. Dokažte, že číslo $4^1 + 4^2 + ... + 4^{100}$ je dělitelné pěti.

Důkaz: Využijeme postupu důkazu příkladu 10.

$4^1 + 4^2 + ... + 4^{100} = 4^1(1 + 4) + 4^3(1 + 4) + ... + 4^{99}(1 + 4) = 5(4^1 + 4^3 + ... + 4^{99})$

12. Dokažte, že každé číslo tvaru $10^n + 8$ je pro každé přirozené číslo n je dělitelné číslem 18.

Důkaz: Dokážeme, že číslo $10^n + 8$ je dělitelné dvěma a zároveň devíti. Tato čísla jsou tvaru 108, 1 008, 1 0008, atd., mají na místě jednotek 8, jsou tedy dělitelná dvěma. Ciferný součet těchto čísel je 1 + 8 = 9, tedy čísla jsou dělitelná devíti. Proto číslo $10^n + 8$ je dělitelné číslem 18.

13. Dokažte, že výraz $n^4 - n^2$ je dělitelný číslem 4 pro každé přirozené n.

Důkaz: $n^4 - n^2 = n^2(n^2 - 1) = (n - 1)n^2(n + 1)$. Pokud n je sudé, je $n = 2k$, pak

$(2k - 1).\ 4k^2.(2k + 1) = 4\,k^2(4k^2 - 1)$

Pokud n je liché, je $n = 2k + 1$, pak $2k(2k + 1)^2(2k + 2) = (4k^2 + 4k)(2k + 1)^2 =$

$= 4(k^2 + k)(2k + 1)^2$.

14. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je $n^3 - n$ dělitené číslem 6.

Důkaz: $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$,

Výraz $(n - 1)n(n + 1)$ je dělitelný šesti, neboť jsou to tři po sobě jdoucí čísla, z nichž alespoň jedno je dělitelné dvěma a jedno z nich je dělitelné třemi.

15. Dokažte, že číslo $n(n^2 - 7)$ je dělitelné číslem 6 pro každé přirozené n.

Důkaz: Úpravou výrazu obdržíme: $n(n^2 - 7) = n(n^2 - 1 - 6) = n\left[(n-1)(n+1) - 6\right] =$

$= (n - 1)n(n + 1) - 6n$.

Výraz $(n - 1)n(n + 1)$ je dělitelný šesti, viz příklad 14.

16. Dokažte, že číslo $n^3 + 2n$ je pro všechna přirozená čísla n dělitelné třemi.

Důkaz: Využijeme matematickou indukci.

1. Pro $n = 1$ je $1^3 + 2 \cdot 1 = 3$ – věta platí.
2. Předpokládáme, že věta platí pro $n = k$ a dokážeme, že platí i pro $k + 1$.

$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 = (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1)$. Výraz

$(k^3 + 2k)$ je dělitelný třemi z předpokladu, takže věta platí pro všechna n.

17. Dokažte, že součet třetích mocnin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy dělitelný devíti.

Důkaz: Označme tři po sobě jdoucí čísla $n - 1, n, n + 1$.

Potom $(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 3(n^3 + 2n)$.

S využitím příkladu 16 je výraz $(n^3 + 2n)$ dělitelný třemi, tedy věta platí.

18. Dokažte, že číslo 21 dělí číslo $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ pro každé přirozené *n*.

Důkaz: Dokážeme matematickou indukcí.

1. Pro $n = 1$ je $4^2 + 5^1 = 21$, tedy věta platí.
2. Předpokládáme, že věta platí pro $n = k$ přirozené, dokážeme že platí pro $n = k + 1$.

$4^{k+2} + 5^{2k+1} = 4^1 \cdot 4^{k+1} + 5^2 \cdot 5^{2k-1} = 4 \cdot 4^{k+1} + (4 + 21) \cdot 5^{2k-1} = 4(4^{k+1} + 5^{2k-1}) + 21 \cdot 5^{2k-1}$.

Z využitím předpokladu, že 21 dělí číslo $(4^{k+1} + 5^{2k-1})$, je věta dokázána.

19. Dokažte, že číslo $2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$ je dělitelné číslem 25 pro libovolné přirozené číslo *n*.

Důkaz: Dokážeme matematickou indukcí.

1. Pro n = 1 je $2^3 \cdot 3 + 5 - 4 = 25$, věta platí.
2. Předpokládáme , že věta platí pro $n = k$, dokážeme větu pro $k + 1$.

$2^{k+3} \cdot 3^{k+1} + 5(k+1) - 4 = 2 \cdot 2^{k+2} \cdot 3 \cdot 3^k + 5k + 1 = 6 \cdot (2^{k+2} \cdot 3^k) + 30k - 25k + 25 - 24 =$

$6 \cdot (2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4) - 25k + 25$. Výraz $(2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4)$ je dělitelný číslem 25 na základě předpokladu, tedy číslo $2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$ je dělitelné číslem 25.

20. Jestliže n je sudé přirozené číslo, pak číslo $3^n + 63$ je násobkem čísla 72.

Důkaz: Jestliže n je sudé, je $n = 2k$. Pak $3^{2k} + 63 = 9^k + 63 = 9^k - 1 + 64$. Číslo $9^k + 63$ je násobkem čísla 9, číslo $9^k - 1$ je násobkem čísla 8, neboť je dělitelné číslem (9 – 1). Tedy číslo $3^n + 63$ je násobkem čísel 8 a 9, tedy je násobkem čísla 72.

21. Dokažte, že číslo $5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ je násobkem čísla 19 pro každé přirozené *n*.

Důkaz: $5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} = 5 \cdot 5^{2n} \cdot 2 \cdot 2^n + 3^2 \cdot 3^n \cdot 2 \cdot 2^{2n} = 20 \cdot 25^n \cdot 2^n + 18 \cdot 3^n \cdot 4^n = 20 \cdot 50^n + 18 \cdot 12^n = (19 + 1) \cdot 50^n + (19 - 1) \cdot 12^n = 19(50^n + 12^n) + 50^n - 12^n$.

Číslo $50^n - 12^n$ je násobkem čísla 19, neboť je dělitelné číslem $50 - 12 = 38 = 2 \cdot 19$.