MA2MP_SMR2

PODZIM 2013

Obsah

Následující materiál představuje osnovu k semináři *Metody řešení matematických úloh 2*. Text je organizován přibližně podle průběhu semináře, přičemž některé náměty se samozřejmě prolínají.

Řešíme vybrané úlohy školského charakteru, jež dovolují zajímavou diskuzi nad problémem, různorodá řešení, netriviální zobecnění apod. Snažíme se neřešit izolované úlohy, ale spíš témata a souvislosti. Jednou s hlavních motivací je maximální zúročení dosaženého vzdělání v oboru. Podobný přístup je vyžadován po každém, kdo usiluje o zápočet!

Vděčnými zdroji často bývají popularizační publikace určené širší veřejnosti, jako např. [C, Ko, Pe, Sm_1, St_1], ke kterým se však snažíme doplnit poznámky, které obvykle širší veřejnosti unikají. Osvědčené odbornější knihy jsou např. [A, E, HKŠ, L, N, Po] apod. Vybíráme taky úlohy ze školních seminářů a soutěží, jako např. [MO, MKS, V].

Pozor, tento materiál se průběžně vyvíjí a upravuje, sledujte datum aktualizace…

1. Lineární diofantické rovnice

Diofantické rovnice jsou algebraické rovnice ovšem řešené výhradně nad celými, příp. přirozenými čísly. Základní otázky zní:

- Je daná rovnice řešitelná?
- Pokud je rovnice řešitelná, má konečně nebo nekonečně mnoho řešení?
- Je možné nějak koncepčně najít všechna řešení?

Tyto otázky jsou různě komplikované pro různé typy rovnic. Otázka řešitelnosti se proto v roce 1900 objevila jako 10. problém na slavném Hilbertově seznamu tehdy otevřených závažných matematických problémů.[1] Něco o diofantických rovnicích se lze naučit např. z knihy [HKŠ].

Nejjednoduššími typy rovnic, pro které umíme uspokojivě odpovědět na všechny zmíněné otázky, jsou *lineární diofantické rovnice*, což jsou rovnice tvaru

$$ax + by + \cdots = h, \tag{1}$$

kde všechny koeficienty $h, a, b, \dots$ jsou celá čísla a $x, y, \dots$ jsou celočíselné neznámé. Pokud je taková rovnice řešitelná, pak má automaticky nekonečně mnoho celočíselných řešení. S jistými

Date: **22. listopadu 2013**, V. Žádník.

[1] `http://cs.wikipedia.org/wiki/Hilbertovy_probl%C3%A9my`

dodatečnými omezeními může mít jenom konečně mnoho řešení, které lze zpravidla najít systematickým zkoušením, viz odstavec 1.6. S takovými případy se každý mnohokrát setkal, proto začínáme rovnou s obecnou úlohou.

1.1. Postřehy. Pokud čísla $a, b, \ldots$ na levé straně (1) mají nějakého společného dělitele, který není dělitelem čísla k, pak je jasné, že taková rovnice nemůže mít celočíselné řešení. Máme tedy jednoduchou nutnou podmínku řešitelnosti. V následujících odstavcích naznačíme, proč je tato podmínka také dostatečná. Tzn., že poněkud neformálně dokážeme následující tvrzení:

Věta 1. *Lineární diofantická rovnice* (1) *je řešitelná právě tehdy, když největší společný dělitel čísel $a, b, \ldots$ dělí číslo h.*

Pro rovnice s jednou neznámou věta evidentně platí a tímto případem se nemusíme moc zaobírat. Pro rovnice se dvěma neznámými začneme s konkrétním příkladem.

Úloha 1. *Určete všechna řešení diofantické rovnice* $4x + 7y = 10$.

Nyní uvažujme obecnou rovnici se dvěma neznámými

$$ax + by = h, \tag{2}$$

pro niž předpokládáme, že $\mathrm{NSD}(a, b)$ dělí h. Pokud jsou a, b a h dostatečně hezká čísla, může se nám podařit nějaké řešení **uhodnout**; takové řešení označíme x_p, y_p. Uvědomte si, že to už vždycky stačí k tomu, abychom našli všechna řešení! Platí totiž, že dvojice $x = -kb$ a $y = ka$ je řešením homogenní rovnice

$$ax + by = 0$$

pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$. Odtud plyne, že dvojice

$$x = x_p - kb, \ y = y_p + ka,$$

pro $k \in Z$, popisují nekonečně mnoho řešení rovnice (2). Pozor, to obecně neznamená, že jsme našli všechna řešení: může se stát, že mezi řešeními odpovídajícími sousedním hodnotám parametru k leží nějaké další řešení. V takovém případě je pak nutné uvedený popis zjemnit! (Rozmyslete si, kdy k takové situaci může dojít a kdy nikoli. Je možné upravit předchozí postup tak, aby tato kontrola nebyla nutná?)

1.2. Obecné řešení. Jediné slabé místo předchozího postupu spočívalo v uhodnutí jednoho konkrétního řešení x_p, y_p. Z algebry bychom však měli vědět, že i když se nám nedaří žádné řešení uhodnout, tak nějaké takové řešení vždycky najdeme početně (za předpokladu, že je splněna podmínka řešitelnosti rovnice). Návod plyne z následující věty a jejího důkazu:

Věta 2 (Bezoutova)**.** *Je-li* $\mathrm{NSD}(a, b) = d$, *pak existují celá čísla k a l taková, že platí*

$$ak + bl = d. \tag{3}$$

Podstatné je, že důkaz tohoto tvrzení je konstruktivní — čísla k a l je možné velmi efektivně **spočítat pomocí Eukleidova algoritmu**!

Předpokládejme tedy, že $\mathrm{NSD}(a, b) = d$, d dělí h a že máme určena celá čísla k a l, pro něž platí (3). Potom je zřejmé, že dvojice

$$x_p = k\frac{h}{d}, \ y_p = l\frac{h}{d}$$

je řešením rovnice (2). Zbytek řešení je stejný jako v předchozím odstavci…

1.3. Alternativní obecné řešení. Vzpomeňme, jak by se rovnice (2) řešila nad tělesem reálných nebo racionálních čísel: Jednu neznámou prohlásíme za libovolnou, např. x, a druhou dopočítáme,

$$y = \frac{h - ax}{b}. \tag{4}$$

Nyní řešíme tutéž úlohu nad celými čísly, takže potřebujeme určit, pro která $x \in \mathbb{Z}$ je taky číslo (4) celé. To je samozřejmě ekvivalentní s tím, že číslo $h - ax$ je dělitelné číslem b. Najít nějaké takové x je možné systematickým zkoušením, přičemž stačí probrat nejvýše tolik možností, jaká je absolutní hodnota b. Všechna ostatní vyhovující x se pak opakují právě s periodou b. Takto se lze vždy dopracovat k popisu všech řešení, nicméně uvedený postup má několik nedostatků: Jednak se nám nelíbí ono zkoušení, jednak není příliš jasné, jakou roli zde hraje předpoklad řešitelnosti rovnice (2), tj. předpoklad, že $\mathrm{NSD}(a, b)$ dělí h. Proto přidáváme ještě jednu interpretaci.

Podmínku, že „číslo $h - ax$ je dělitelné číslem b“, můžeme říct tak, že „zbytek po dělení čísla $h - ax$ číslem b je 0“ nebo taky „čísla ax a h mají po dělení číslem b stejný zbytek“. Totéž stručně zapisujeme následovně:

$$\begin{aligned} h - ax &\equiv 0 \mod b, \\ ax &\equiv h \mod b. \end{aligned} \tag{5}$$

Naše úloha je tímto transformována na řešení jedné **kongruence s jednou neznámou**. Pokud je kongruence řešitelná, lze řešení celkem rychle najít obvyklými úpravami, které je vhodné si na tomto místě připomenout...

Podstatné pro nás je, že tento problém je opět velmi dobře prostudován, o čemž svědčí následující:

Věta 3. *Kongruence* (5) *je řešitelná právě tehdy, když* $\mathrm{NSD}(a, b)$ *dělí* h.

Zdůvodnění tohoto tvrzení vypadá následovně:

Stejně jako ve Větě 1, je implikace zleva doprava je snadná (a snadno se ukáže nepřímo). Proto diskutujeme jenom druhou implikaci, tj. předpokládáme, že $\mathrm{NSD}(a, b) = d$ dělí h a chceme najít řešení. Pokud je $d \neq 1$, můžeme místo (5) psát ekvivalentní kongruenci $\frac{a}{d}x \equiv \frac{h}{d} \mod \frac{b}{d}$, kde už jsou čísla $\frac{a}{d}$ a $\frac{b}{d}$ nesoudělná. Abychom nemuseli všechno přeznačovat, rovnou (bez újmy na obecnosti) předpokládáme, že $\mathrm{NSD}(a, b) = 1$.

Pro libovolné $c \neq 0$ je kongruence (5) ekvivalentní s

$$c \cdot ax \equiv c \cdot h \mod b.$$

Řešení určíme tak, že nedosazujeme libovolné, ale naopak nějaké vhodné c, řekněme

$$c = a^{\varphi(b)-1},$$

kde $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je Eulerova funkce. Takto dostáváme

$$a^{\varphi(b)}x \equiv a^{\varphi(b)-1} \cdot h \mod b,$$

což je podle **Eulerovy věty** totéž jako

$$x \equiv a^{\varphi(b)-1} \cdot h \mod b. \tag{6}$$

To znamená, že $x = ha^{\varphi(b)-1}$ je řešením kongruence (5). Navíc všechna další řešení se liší právě o celočíselné násobky čísla b. $\square$

Pokud umíme vyjádřit hodnotu Eulerovy funkce $\varphi(b)$, potom z (6) máme rovnou všechna řešení kongruence (5), což nám po dosazení do (4) dává všechna řešení diofantické rovnice (2), se kterou jsme začínali...

1.4. Eulerova funkce a Eulerova věta. *Eulerova funkce* je zobrazení $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které lze definovat různě: je-li $b = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \cdots$ prvočíselný rozklad čísla b, potom hodnota $\varphi(b)$ je

$$\begin{aligned} \varphi(b) &= (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}) \cdot (p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}) \cdot \cdots \\ &= b \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \cdots \\ &= \text{počet čísel od 1 do } b, \text{ která jsou nesoudělná s } b; \end{aligned} \tag{7}$$

je-li $b = 1$, definuje se $\varphi(b) = 1$. Pokud bereme první rovnost v (7) jako definující, potom zdůvodnění druhé rovnosti je velmi prosté. Zdůvodnění třetí rovnosti není sice těžké, ale není ani triviální.

Úloha 2. *Dokažte platnost třetí rovnosti v definici Eulerovy funkce.*

Věta 4 (Eulerova)**.** *Jsou-li $a \in \mathbb{Z}$ a $b \in \mathbb{N}$ nesoudělná čísla, potom platí*

$$a^{\varphi(b)} \equiv 1 \mod b. \tag{8}$$

Eulerova věta je zobecněním tzv. malé Fermatovy věty, kterou lze za předpokladu, že p je prvočíslo a a je libovolné s ním nesoudělné číslo, formulovat takto:

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p. \tag{9}$$

Pro nás asi nejsrozumitelnější zdůvodnění Eulerovy věty lze najít v rámci teorie konečných grup, s odkazem na větu Lagrangeovu...[2]

1.5. Rovnice s libovolným počtem neznámých. Ve Větě 1 uvažujeme libovolný počet neznámých, ale zatím jsme mluvili jen o rovnicích se dvěma neznámými. Předchozí postřehy je však možné velmi jednoduše rozšířit tak, že věta skutečně platí. Ukážeme, jak by se argumentovalo pro rovnici se třemi neznámými, a obecný indukční krok necháváme zájemcům k vlastnímu procvičení.

Úloha 3. *Určete všechna řešení diofantické rovnice* $4x + 7y + 12z = 10$.

Abychom si uvědomili, jak je to vlastně s podmínkou řešitelnosti, uvažujme obecnou rovnici se třemi neznámými

$$ax + by + cz = h, \tag{10}$$

kde bez jakékoli újmy opět můžeme předpokládat, že $\mathrm{NSD}(a, b, c) = 1$. Chceme ukázat, že tento předpoklad nám zaručuje řešitelnost rovnice (10).

Pokud je trojice x, y, z řešením této rovnice, pak je také řešením každé kongruence

$$ax + by + cz \equiv h \mod m,$$

kde m je libovolné číslo. Pokud nyní za m dosadíme nikoli libovolné číslo, ale právě $m := \mathrm{NSD}(a, b)$, potom je tato kongruence ekvivalentní s

$$cz \equiv h \mod m. \tag{11}$$

Protože $\mathrm{NSD}(m, c)$ je roven $\mathrm{NSD}(a, b, c)$, a ten je podle předpokladu roven 1, máme podle Věty 3 zaručenu řešitelnost této kongruence. Když ji vyřešíme a výsledek dosadíme do (10), dostáváme diofantickou rovnici se dvěma neznámými (x a y) a jedním volným celočíselným parametrem (který je schován ve vyjádření z):

$$ax + by = h - cz.$$

V předchozích odstavcích jsme dokázali, že tato rovnice má celočíselné řešení právě tehdy, když $\mathrm{NSD}(a, b) = m$ dělí číslo $h - cz$ na pravé straně. Protože však z je řešením kongruence (11), musí být $h - cz$ násobkem čísla m. Proto má tato rovnice celočíselné řešení a navíc jsme se naučili několik způsobů, jak všechna řešení najít. Celkem tedy vidíme, že z předpokladu $\mathrm{NSD}(a, b, c) = 1$ plyne řešitelnost rovnice (10). $\square$

[2] `http://en.wikipedia.org/wiki/Euler's_theorem`

1.6. Poznámky a modifikace. Typické úlohy, které vedou k lineárním diofantickým rovnicím, jsou úlohy s přeléváním vody, vážením na vahách, placením v obchodě, restauraci apod. Tyto úlohy často obsahují dodatečné podmínky a omezení, které mohou skýtat dodatečné komplikace. Často taková omezení omezují výsledný počet řešení, jež je pak možné najít systematickým zkoušením. To samozřejmě není pro naše zkoumání úplně atraktivní, ale i zde se dá občas najít zajímavá matematika. Např. úlohu 4 ve variantě (b) lze interpretovat jako hledání cesty v jistém orientovaném grafu...

Úloha 4. *Pomocí tří nádob o objemu 4, 7 a 12 litrů potřebujeme odměřit 10 litrů vody.*

(a) Určete všechna řešení za předpokladu, že máte neomezený zdroj vody a libovolně velkou pomocnou nádobu.
(b) Určete všechna řešení, pokud máte pouze ony tři nádoby, z nichž ta největší je na začátku plná.
(c) U obou předchozích variant úlohy najděte nejméně pracné řešení.

Často také potkáváme soustavy diofantických rovnic, příp. nerovnic. Je typické, že k jednoznačnému, příp. ke konečnému počtu řešení vedou i soustavy, kde je méně rovnic než neznámých (což je nad racionálními nebo reálnými čísly nemyslitelné).

Úloha 5 (Eulerova). *Jistá osoba koupila vepře, kozy a ovce, celkem 100 kusů za 100 korun. Vepři ho stáli $3\frac{1}{2}$ koruny za kus, kozy $1\frac{1}{3}$ a ovce $\frac{1}{2}$ koruny. Kolik kusů každého druhu nakoupil?* [Po]

Úloha 6. *Na dračím ostrově žilo 103 modrých a 113 zelených draků. Zlý čaroděj ostrov zaklel: „Když se setkají 3 draci jedné barvy s 5 draky druhé barvy, všech 8 navždy zmizí!“ Je možné, aby na ostrově zůstali jenom modří draci? Kolik by jich potom bylo?* [MO, 50. ročník]

Úloha 7. *Honza dostal kouzelný meč, kterým má zabít kouzelného trojhlavého a trojocasého draka. Drak je usmrcen, pokud má useknuty všechny hlavy a všechny ocasy. Kouzelné vlastnosti meče, resp. draka jsou tyto:*

- *usekne-li se drakovi jeden ocas, narostou mu hned dva nové,*
- *useknou-li se dva ocasy současně, naroste jedna hlava,*
- *usekne-li se jedna hlava, narostou dvě nové hlavy,*
- *useknou-li se dvě hlavy současně, nenaroste nic.*

Kolik nejméně seků potřebuje Honza k usmrcení draka? Kolik nejméně seků potřebuje Honza k usmrcení draka, aby měl nakonec stejně mnoho useknutých hlav jako ocasů?

Společným rysem předchozích tří úloh je také to, že u případných rovnic se zajímáme pouze o kladná celočíselná řešení. Kanonickou úlohou tohoto typu je tzv. Frobeniův problém s mincemi, který může vypadat např. takto:

Úloha 8. *Útrata v obchodě je vyjádřena přirozeným číslem. Máme k dispozici pouze čtyřkorunové a sedmikorunové mince. Určete všechny možné částky, které není možné s těmito mincemi uhradit.*

Takových částek je jen konečně mnoho, tzn. od jisté hodnoty lze takto uhradit cokoli za předpokladu, že máme dost mincí. Jinými slovy, pro dostatečně velká h má rovnice

$$4x + 7y = h$$

vždy nějaké kladné celočíselné řešení. Protože se jedná o lineární úlohu ve dvou proměnných, můžeme si do jisté míry pomáhat obrázky, viz obr. 1.

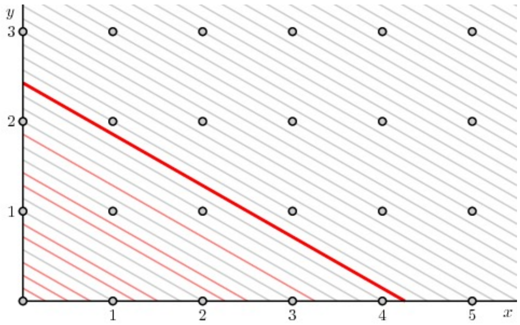
Obecná formulace Frobeniova problému je tato:[3]

Úloha $\sharp$9 (Frobeniova). *U rovnice (1) předpokládáme, že koeficienty $a, b, \ldots$ jsou kladná celá nesoudělná čísla. Určete největší možné h, pro které nemá tato rovnice kladné celočíselné řešení.*

Na rozdíl od dosud diskutovaných problémů, obecná odpověď na tento problém není známá. Pro rovnici se dvěma neznámými platí, že největší takové číslo je

$$h = ab - a - b;$$

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Coin_problem



Obrázek 1. $4x + 7y = h$

zdůvodnění však není vůbec jednoduché. . . [4]

2. Míchání karet

Některé karetní triky se dají vysvětlit, příp. vymýšlet s pomocí docela jednoduché, ale zajímavé matematiky. V této části rozebíráme částečné řešení jednoho specifického problému spojeného s mícháním, jež je popsán v [St$_1$, kap. 11]. Všechny následující empirické údaje a grafy jsou dílem Š. Křehlíka.

Opakujeme-li míchání balíčku s N kartami aspoň $N!$-krát, pak výsledné pořadí karet musí být — podle **Dirichletova principu** — stejné jako některé z předchozích. Pokud mícháme pokaždé stejně a navíc pokud možno jednoduše, tak lze docela snadno a přesně zjistit, kdy znovu obdržíme původní pořadí karet. Zmíněná kapitola v [St$_1$] se soustředí na tzv. faro čili *tkalcovské míchání*: balíček se sudým počtem karet se rozdělí na dvě stejné hromádky, z nichž se karty na střídačku poskládají do nové hromádky, a tento postup se nadále opakuje. Rozlišují se dva případy tkalcovského míchání podle toho, z které půlky rozděleného balíčku začínáme: pořadí

$$123456$$

šesti karet se po jednom *vnějším* tkalcovském míchání změní na

$$142536;$$

po jednom *vnitřním* tkalcovském míchání na

$$415263.$$

Při vnějším míchání zůstává vždy první a poslední karta na stejném místě a ostatní karty jsou míchány jakoby vnitřně. Studovat vnější míchání s N kartami je tedy totéž jako studovat vnitřní míchání s $N-2$ kartami. Ve zbytku této části diskutujeme pouze vnější míchání — hledáme řešení následující úlohy:

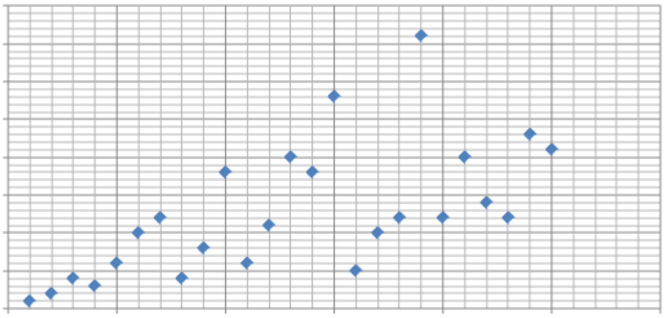
Úloha 10. *Určete nějaké L tak, aby balíček s N kartami byl po L-krát opakovaném vnějším tkalcovském míchání opět uspořádán v původním pořadí.*

2.1. Pokusy a postřehy. Pokud začneme experimentovat s malými balíčky, zjistíme docela rychle, že výsledek se těžko odhaduje a ještě hůř zdůvodňuje. Začneme s přehledem několika odpovědí, ve kterých se následně pokusíme vyznat. Hodnota L uvedená v tabulce je nejmenší možná:

N	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
L	1	2	4	3	6	10	12	4	8	18	6	11	20	18	28	5	10	12	36	12
N	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80
L	20	14	12	23	21	8	52	20	18	58	60	6	12	66	22	35	9	20	30	39

Na obr. 2 pro představu znázorňujeme prvních 25 výsledků graficky (vodorovně N, svisle L).

[4] `http://www.ams.org/samplings/feature-column/fc-2013-08`



OBRÁZEK 2.

Na první pohled je patrný poměrně velký rozptyl hodnot, který se se vzrůstajícím N nadále zvětšuje. Naší pozornost zejména přitahují podezřele nízké hodnoty L odpovídající

$$N = 2, 4, 8, 16, 32, \dots,$$

což možná není náhoda.

Pokud podrobněji zkoumáme, jak se mění pořadí karet po každém míchání, pak zjistíme následující: První a poslední karta z balíčku zůstávají při vnějším míchání na místě. Ostatní karty se objevují na různých místech a tvoří cykly různých délek. Např.

- pro $n = 6$ najdeme jediný cyklus délky 4,
- pro $n = 8$ dva cykly délky 3,
- pro $n = 10$ jeden cyklus délky 6 a jeden délky 2,
- pro $n = 12$ jediný cyklus délky 10,
- atp.

Hledané L je pak nejmenším společným násobkem délek těchto cyklů. V následujícím zkusíme odpovídající permutace popsat obecně.

2.2. Reformulace problému. Pro obecné N určíme permutaci, která odpovídá jednomu vnějšímu tkalcovskému míchání balíčku s N kartami. Onu permutaci označíme P a úplně jednoduše se ukáže, že tato permutace funguje následovně:

$$P(k) \equiv 2k - 1 \mod (N-1),$$

kde $k \in \{1, \dots, N\}$. Opakování míchání nyní odpovídá **skládání permutací**. Přímým dosazením pozorujeme, že

$$\left.\begin{aligned} P^2(k) &\equiv 4k - 3 \\ P^3(k) &\equiv 8k - 7 \\ P^4(k) &\equiv 16k - 15 \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \mod (N-1).$$

Tato pozorování potřebujeme zobecnit. Pomocí **matematické indukce** snadno dokážeme, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$P^n(k) \equiv 2^n(k-1) + 1 \mod (N-1). \tag{12}$$

Ptáme se po kolika mícháních jsou karty v původním pořadí, neboli, pro které L je $P^L = \mathrm{id}$. Přitom $P^L = \mathrm{id}$ právě tehdy, když $P^L(k) = k$ pro všechna $k \in \{1, \dots, N\}$, což je vzhledem k (12) ekvivalentní s podmínkou

$$2^L(k-1) + 1 \equiv k \mod (N-1).$$

Tato kongruence platí pro všechna k právě tehdy, když

$$2^L \equiv 1 \mod (N-1). \tag{13}$$

Celý odstavec tak můžeme uzavřít následující sympatickou ekvivalencí, jež charakterizuje řešení úlohy 10:

> **Věta 5.** *Balíček s N kartami je po L-krát opakovaném vnějším tkalcovském míchání uspořádán v původním pořadí právě tehdy, když platí* (13).

2.3. Řešení. Protože N je zde vždycky sudé, jsou čísla 2 a $N-1$ nesoudělná. Tudíž podle **Eulerovy věty** víme, že

$$L = \varphi(N-1)$$

je zaručeně řešením předchozí rovnice, viz odstavec 1.4. Odtud mimochodem plyne, že $L < N-1$, což je celkem slušný odhad (zejména ve srovnání s úvodním $N!$).

2.4. Minimální řešení. Jak z praktických, tak i z teoretických důvodů nás samozřejmě zajímá nejmenší možné řešení. Úplně snadno lze zdůvodnit následující tvrzení:

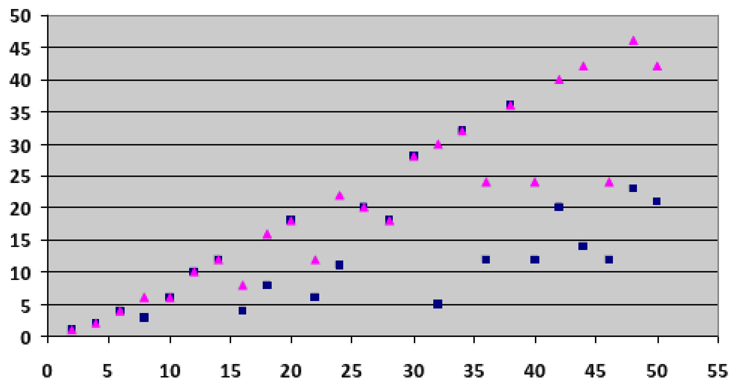
> **Věta 6.** *Pokud je balíček s N kartami po L-krát opakovaném vnějším tkalcovském míchání uspořádán v původním pořadí, potom L dělí $\varphi(N-1)$.*

Opačná implikace obecně neplatí a otázkou zůstává, který dělitel čísla $\varphi(N-1)$ odpovídá právě minimálnímu řešení úlohy. Pro srovnání doplníme část úvodní tabulky právě o hodnoty $\varphi(N-1)$:

N	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
L	1	2	4	3	6	10	12	4	8	18	6	11	20	18	28	5	10	12	36	12
φ	1	2	4	6	6	10	12	8	16	18	12	22	20	18	28	30	32	24	36	24

N	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80
L	20	14	12	23	21	8	52	20	18	58	60	6	12	66	22	35	9	20	30	39
φ	40	42	24	46	42	.	.	.												

Stejně tak doplníme předchozí grafické znázornění, viz obr. 3.



Obrázek 3.

Vidíme, že minimální řešení někdy je a jindy není vlastním dělitelem hodnoty $\varphi(N-1)$. Vyznat se v tomhle obecně vypadá jako mnohem složitější problém…

Úloha ♯11. *Určete nejmenší možné L tak, aby balíček s N kartami byl po L-krát opakovaném vnějším tkalcovském míchání opět uspořádán v původním pořadí.*

Obecnou odpověď neznáme; snadno však zdůvodníme jeden z úvodních postřehů:

> **Věta 7.** *Pokud balíček obsahuje $N = 2^m$ karet, pak nejmenší možné L je rovno m.*

Vzhledem k předchozím rozvahám stačí ukázat, že $L = m$ je nejmenším řešením rovnice

$$2^L \equiv 1 \mod (2^m - 1),$$

což je vskutku snadné. □

3. Matematická indukce

Matematickou indukci potřebujeme ke korektnímu zobecňování pořád. V tomto materiálu na ni odkazujeme v odstavcích 1.5 a 2.2, v úloze 2 a jinde. Hodně úloh, které lze taky řešit indukcí, najdete v částech 4 a 5.

3.1. Prostá matematická indukce. Princip matematické indukce v její nejjednodušší a nejčastěji používané podobě se srozumitelně vysvětluje pomocí dominového efektu: Pokud

- pro libovolný dílek platí, že je-li tento shozen, pak spadne taky dílek následující,
- a je-li současně shozen první dílek,

potom nakonec leží všechny dílky. Podstatné při této interpretaci je, že uvažujeme výhradně dílky postavené v jedné řadě! V takovém případě můžeme rozšířit princip dominového efektu pro nekonečný počet dílků, ovšem za předpokladu, že řada má jasně vymezený začátek.

Obrázek 4.

Za touto popularizací samozřejmě vidíme **přirozená čísla**, jakožto prototyp nekonečné **dobře uspořádané množiny**. Ve všech následujících formulacích značí $V(n)$ nějaký (libovolný) výrok, který závisí na $n \in \mathbb{N}$.

Princip (matematické indukce)**.** *Předpokládejme, že*

- *platí* $V(1)$*,*
- *pro libovolné* $k \in \mathbb{N}$ *platí* $(V(k) \Longrightarrow V(k+1))$*.*

Potom platí $V(n)$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$*.*

Vzpomeňte si, že v Peanově axiomatickém popisu přirozených čísel je princip matematické indukce jedním z axiómů.

K výše uvedeným příkladům užití matematické indukce přikládáme ještě pár dalších:

Úloha 12 (Binomická věta)**.** *Dokažte binomickou větu:*

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + b^n. \tag{14}$$

Úloha 13. *Dokažte, že libovolnou mapu tvořenou výhradně přímkami nebo kružnicemi lze vybarvit dvěma barvami.*

Úloha 14 (Hanojské věže)**.** *Najděte obecné řešení problému známého jako Hanojské věže*[5] *ve variantě pro tři věže.*

Experimentováním s malými počty pater si každý vytvoří nějakou hypotézu, jak by to mohlo fungovat obecně. Pro n-patrovou věž označíme a_n počet tahů, které stačí k přemístění této věže. Rádi bychom vyjádřili a_n v závislosti na n. Postupně zjišťujeme, že platí $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 7$ atd. Obecně umíme zdůvodnit, že

$$a_{n+1} = 2a_n + 1,$$

odkud se snadno matematickou indukcí dokáže, že $a_n = 2^n - 1$. $\square$

Často užíváme matematickou indukci v různě pozměněných podobách. Typickou variantou je omezení typu $n \geq n_0$, kde n_0 je nějaké přirozené číslo různé od 1. (Takové modifikace můžeme uvažovat i u všech následujících formulací, což už znova dělat nebudeme.)

Úloha 15. *Dokažte, že pro libovolné $h \geq 18$ má rovnice $4x + 7y = h$ řešení v oboru přirozených čísel.*

3.2. Silná matematická indukce. U některých úloh s výše zformulovaným principem nevystačíme a potřebujeme matematickou indukci v poněkud silnější podobě...

Úloha 16 (Fibonacciho posloupnost)**.** *Dokažte, že n-tý člen Fibonacciho posloupnosti lze vyjádřit v následujícím tvaru:*

$$a_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}. \tag{15}$$

Fibonacciho posloupnost začíná takto $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ a úplně je určena rekurentním vztahem

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Pokud tedy řešíme předchozí úlohu matematickou indukcí, musíme použít o něco silnější princip:

Princip (silnější matematické indukce)**.** *Předpokládejme, že*
- *platí $V(1)$ a $V(2)$,*
- *pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí $(V(k) \wedge V(k+1) \Longrightarrow V(k+2))$.*

Potom platí $V(n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Tento princip můžeme nadále podle potřeby zesilovat až k následujícímu:

Princip (silné matematické indukce)**.** *Předpokládejme, že platí*
- $(V(k)$ *pro všechna* $k \in \mathbb{N}) \Longrightarrow V(k+1)$.

Potom platí $V(n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Typické a velmi dobře známé tvrzení, které se dokazuje pomocí tohoto principu, je v následující úloze:

Úloha 17. *Dokažte, že každé celé číslo větší než 1 je součinem prvočísel.*

3.3. Poznámky a modifikace. Z teorie množin bychom měli znát následující zobecnění principu matematické indukce pro libovolnou dobře uspořádanou množinu.

Princip (transfinitní indukce)**.** *Předpokládejme, že M je dobře uspořádaná množina, $k, l \in M$ a platí*
- $(V(k)$ *pro všechna* $k < l) \Longrightarrow V(l)$.

Potom platí $V(n)$ pro všechna $n \in M$.

[5] `http://cs.wikipedia.org/wiki/Hanojsk%C3%A9_v%C4%9B%C5%BEe`

Úloha 18. *Najděte ve svých poznámkách z teorie množin nějaké tvrzení, které se dokazuje pomocí transfinitní indukce.*

Jiná metoda, která souvisí s probíraným tématem je tzv. princip nekonečného sestupu, lépe řečeno princip nemožnosti nekonečného sestupu. Zde opět uvažujeme množinu přirozených čísel, ačkoli lze princip formulovat obecněji.

Princip (nekonečného sestupu). *Předpokládejme, že $k, l \in \mathbb{N}$ a platí*
- $V(l) \Longrightarrow$ (*existuje* $k < l$ *takové, že* $V(k)$).

Potom $V(n)$ *nemůže platit pro žádné* $n \in \mathbb{N}$.

Jedná se důkazovou metodu sporem, jež odkazuje právě na fakt, že existuje jenom konečně mnoho přirozených čísel, která jsou menší než dané číslo. Typické užití tohoto principu najdete v řešení následující proslulé úlohy:

Úloha 19 (Fermatova). *Dokažte, že rovnice $x^4 + y^4 = z^4$ nemá řešení v oboru přirozených čísel.*

Myšlenka důkazu je následující:

(1) Dokážeme, že neexistuje Pythagorejská trojice,[6] jejíž některá dvojice by byla tvořena druhými mocninami nebo dvojnásobky druhých mocnin přirozených čísel.
(2) Odtud plyne, že neexistuje řešení rovnice $r^2 + s^4 = t^4$ v oboru přirozených čísel.
(3) Odtud plyne, že rovnice $x^4 + y^4 = z^4$ nemá řešení v oboru přirozených čísel.

Implikace (1)$\Longrightarrow$(2) a (2)$\Longrightarrow$(3) se velmi jednoduše zdůvodní nepřímo. Důkaz tvrzení (1) pomocí nekonečného sestupu vypadá takto:

Předpokládáme, že Pythagorejská trojice se zmiňovanou vlastností existuje a označíme ji třeba (x, y, z). Podle toho, pro kterou dvojici tato vlastnost platí, rozdělíme diskuzi na tři případy. V každém z těchto případů vyvodíme, že existuje jiná Pythagorejská trojice (x', y', z') s úplně stejnými vlastnostmi, pro kterou navíc platí $z' < z$. Stejným způsobem lze potom sestrojit další trojici (x'', y'', z'') takovou, že $z'' < z'$, a takto by se dalo postupovat do nekonečna. To však není možné, protože všechna čísla $z > z' > z'' > \dots$ jsou přirozená. Žádná Pythagorejská trojice s uvedenou vlastností tedy existovat nemůže. □

4. Posloupnosti a jejich součty

Osvědčenou skupinou úloh, na nichž lze trénovat jak standardní počtářské dovednosti, tak i míru ostrovtipu, jsou úlohy s doplňováním posloupností, určováním jejich součtů, příp. domýšlením těchto úkolů ad infinitum. Jisté obecné zázemí, na něž se ihned pokusíme rozpomenout, bychom měli mít z matematické analýzy III. Jedná se veskrze o úlohy induktivního charakteru, takže tuto část chápeme jako doplnění části předchozí. Většinu následujících úloh je však možné řešit i jinak, často velice přímo a elegantně, na což se taktéž soustředíme. Základní otázky zní:

- Jak vyjádřit n-tý součet posloupnosti v uzavřeném tvaru?
- Co se stane, když $n \to \infty$?

Uzavřeným tvarem v druhé otázce se myslí vyjádření „bez tří teček“, neboli vyjádření n-tého součtu v závislosti na n pouze pomocí elementárních funkcí. V několika nejjednodušších případech ještě odpovíme na otázku

- Jak vyjádřit n-tý člen posloupnosti, která je zadána rekurentním vztahem?

K těmto otázkám se ještě budeme vracet v části 5. Všem fanouškům posloupností doporučujeme *On-line Encyklopedii celočíselných posloupností.*[7]

[6] Pythagorejské trojice jsou právě řešení úlohy 64.
[7] `http://oeis.org/?language=czech`

4.1. Konečné součty. Číselná posloupnost je uspořádaná ∞-tice reálných čísel, neboli zobrazení $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Místo $a(n)$ píšeme a_n a $(a_1, a_2, \dots\dots)$ zkracujeme $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nebo taky (a_n). Konečné součty prvních n členů značíme

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Nemůžeme samozřejmě začít jinak než s aritmetickými a geometrickými posloupnostmi. Aritmetická posloupnost s distancí d je definována rekurentním vztahem $a_{n+1} = a_n + d$.

Úloha 20 (Aritmetická)**.** *Dokažte, že pro aritmetickou posloupnost s distancí d platí*

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad \text{a} \quad s_n = n(a_1 + a_n)/2.$$

Geometrická posloupnost s kvocientem q je definována rekurentním vztahem $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

Úloha 21 (Geometrická)**.** *Dokažte, že pro geometrickou posloupnost s kvocientem q platí*

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad \text{a} \quad s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Fibonacciho posloupnost jsme diskutovali v úloze 16.

Úloha 22 (Fibonacciho)**.** *Dokažte, že pro Fibonacciho posloupnost platí*

$$s_n = a_{n+2} - 1.$$

Je mnohem lehčí dokázat, že daný vztah platí, než jej samostatně odvodit.

Úloha 23. *Dokažte, že všechny vztahy v předchozích třech úlohách umíte odvodit bez jakékoli předchozí nápovědy.*

Příliš mnoho posloupností, u nichž umíme obecně vyjádřit n-tý součet, neznáme. Připomeneme několik typů a pokusíme se naše obzory rozšířit. Zevrubněji se tomuto tématu věnuje např. celá jedna kapitola v [HKŠ] nebo [L].

Úloha 24. *Pro následující posloupnosti vyjádřete jejich n-té součty a domyslete nějaká přirozená zobecnění: (a) $a_n = \frac{n}{2^n}$, (b) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, (c) $a_n = n^3$.*

Zobecněním případu (a) by mohla být jakákoli posloupnost, jejíž n-tý člen je součinem n-tých členů nějaké aritmetické a nějaké geometrické posloupnosti. K zobecňování případu (b) může významně přispět následující postřeh:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Zobecněním případu (c) by mohla být jakákoli posloupnost tvaru

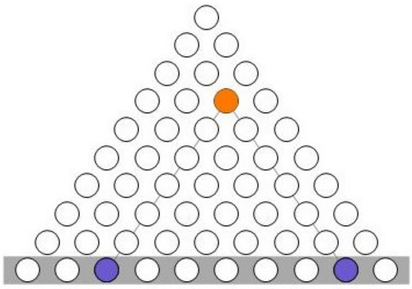
$$a_n = n^r, \tag{16}$$

kde $r \in \mathbb{N}$. Právě pro posloupnosti tohoto typu lze vymyslet/najít skutečně mnoho různých odvození jejich součtů. Zejména pro malá r existují taky vizuálně atraktivní přímá zdůvodnění, viz např. [N].

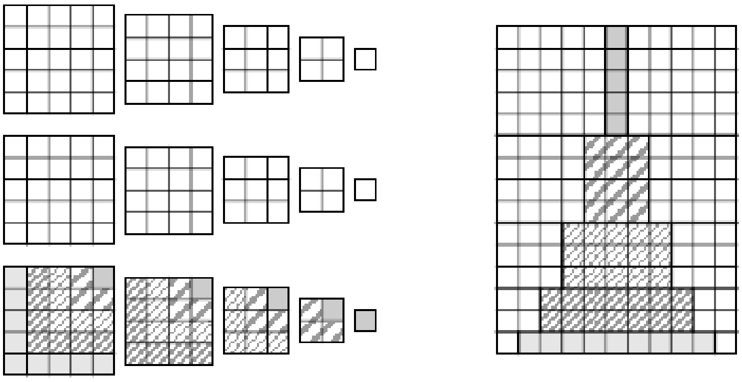
Úloha 25. *Dokažte, že rozumíte obrázkům 5–7.*

4.2. Poznámky. Protože se k součtům posloupností typu (16) ještě hodláme vracet, shrneme tady několik ukázkových výsledků:

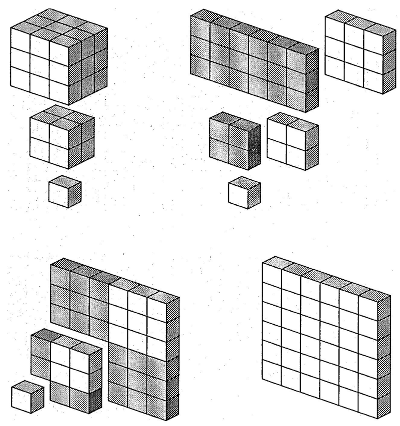
$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n} k^0 = n, \quad \sum_{k=1}^{n} k^1 = n(n+1)/2, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6, \\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = n^2(n+1)^2/4, \quad \sum_{k=1}^{n} k^4 = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30.\end{gathered} \tag{17}$$



OBRÁZEK 5. $1 + 2 + \cdots + n = \binom{n+1}{2}$



OBRÁZEK 6. $3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = (2n + 1)(1 + 2 + \cdots + n)$



OBRÁZEK 7. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

Poměrně hodně úloh, které se dají v této souvislosti úspěšně řešit, zahrnují součty s kombinačními čísly. Mezi nejznámější vztahy patří:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{l} = \binom{n+1}{l+1}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = (a+b)^n.$$

Úloha 26. *Dokažte některé z výše uvedených rovností, nejlépe několika různými způsoby.*

Uvědomte si, že posloupností, pro které je možné vyjádřit jejich libovolný konečný součet v uzavřeném tvaru, je sice hodně, ale v žádném případě to nejsou všechny. Obecně je to tak, že funkce vyjadřující s_n v závislosti na n jsou zpravidla **vyšší transcendentní funkce**, a to i v poměrně nevinně vyhlížejících případech:[8]

Úloha 27. *Dokažte, že pro žádné $r > 0$ neumíte vyjádřit $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r}$ v uzavřeném tvaru.*

Ačkoli ani my ani nikdo jiný tyto součty v uzavřeném tvaru nevyjádří, měli bychom si být vědomi, že podle potřeby je možné jejich hodnoty odhadnout, a to v uzavřeném tvaru a s libovolnou přesností! Viz úlohy 32–35.

4.3. Nekonečné součty. Nekonečný součet posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, neboli řada, je právě limita posloupnosti částečných součtů:

$$s_\infty = a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

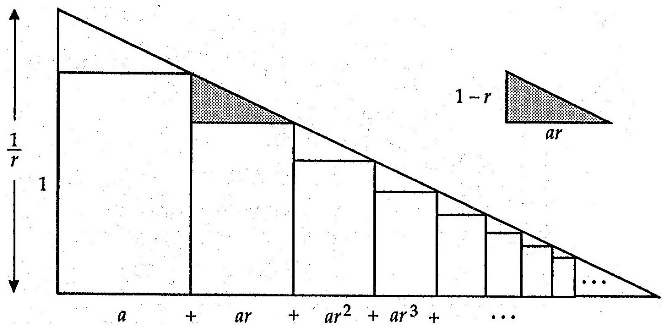
Tato limita může, ale nemusí existovat — podle toho rozlišujeme, zda řada konverguje, nebo diverguje.

Úloha 28. *Pro řady tvořené posloupnostmi z předchozích dvou odstavců rozhodněte, zda konvergují, či divergují.*

Jediná aritmetická řada, která je konvergentní, je nulová řada. Geometrická řada je konvergentní právě tehdy, když $|q| < 1$; v takovém případě je $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, takže taková řada má součet

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-q},$$

viz též obr. 8.



OBRÁZEK 8. $(a + ar + ar^2 + \cdots) : (\frac{1}{r}) = (ar) : (1 - r)$

Nejpozději na tomto místě bychom si měli vybavit zřejmou nutnou podmínku konvergence řady:

Věta 8. *Pokud řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, potom $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.*

To, že opačná implikace obecně neplatí, se s oblibou ilustruje např. na harmonické řadě, viz úlohu 32.

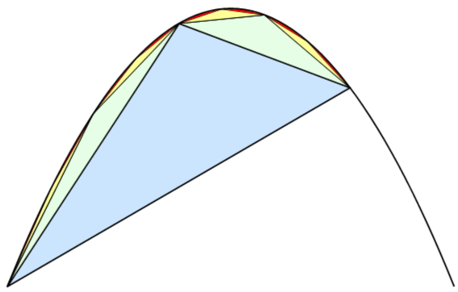
Nejvíc úloh, které jsme kdy v těchto souvislostech potkali, se týká právě řad geometrických. Připomínáme jeden velmi známý problém:

Úloha 29 (Achilles a želva)**.** *Zjistěte, jak rychle běhal Achilles a jak želva ve slavném Zénónově závodě. Dokažte, že Achilles želvu určitě doběhne a v závislosti na želvím náskoku určete přesně kdy.*

[8] `http://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_number`

Na další úlohy operující s řadami lze narazit při elementárním vyjadřování obsahů rovinných obrazců.

Úloha 30 (Kvadratura paraboly)**.** *Dokažte, že obsah úseče paraboly je roven* $4/3$ *obsahu vepsaného trojúhelníku, jehož třetí vrchol je určen tím, že tečna paraboly v tomto bodě je rovnoběžná s protější stranou trojúhelníku.*



Obrázek 9.

Na obr. 9 je naznačen postup řešení, jak jej realizoval Archimédés (ve 3. století př. Kr.):

Trojúhelník, o kterém se mluví v zadání, je ten modrý. Plocha úseče je postupně vyčerpávána dalšími a dalšími vepsanými trojúhelníky, které mají stejnou vlastnost jako modrý trojúhelník. Z geometrických vlastností paraboly se dá vyvodit, že obsah každého trojúhelníku je osminový vzhledem k trojúhelníku, který mu v konstrukci předcházel. V n-tém kroku je tedy poměr obsahů vepsaného mnohoúhelníku a startovního modrého trojúhelníku roven

$$s_n = 1 + \frac{2}{8} + \frac{4}{8^2} + \cdots + \frac{2^n}{8^n},$$

odkud pro $n \to \infty$ dostaneme hledaný poměr obsahů parabolické úseče a modrého trojúhelníku. Tady však jasně rozeznáváme začátek geometrické řady s kvocientem $\frac{1}{4}$, kterou bez problému sečteme... □

Po této ukázce nás nemůže nenapadnout následující:

Úloha 31. *Řešte znovu úlohu 30 s nástroji moderní matematické analýzy.*

Máme samozřejmě na mysli užití **určitého integrálu**; z tréningových důvodů doporučujeme řešit (a) podle definice, (b) pomocí Newtonovy–Leibnizovy věty.

Uvědomte si, že díky výše zmiňovaným vzorcům pro $\sum_{k=1}^{n} k^r$ jsme v podstatě schopni určovat integrály typu $\int_a^b x^r \,\mathrm{d}x$ podle definice. Naopak, pokud se nám nedaří sečíst nějakou posloupnost, ale umíme zintegrovat funkci, která onu posloupnost interpoluje, pak nám tento výsledek může — za jistých předpokladů — pomoci v odhadu neznámého součtu.

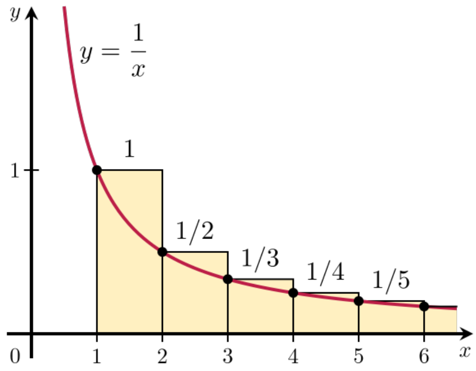
Úloha 32 (Harmonická)**.** *Dokažte, že*

(a) pro libovolné $n > 1$ *platí* $\ln \frac{n}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln \frac{n+1}{2}$, *(b) řada* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *je divergentní.*

Stejně názorně — pomocí integrálního kritéria — lze řešit také následující úlohu.

Úloha 33. *Dokažte, že řada* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$ *konverguje právě tehdy, když* $r > 1$.

Podobně jako pro harmonickou řadu, můžeme i v těchto případech odhadovat kterýkoli částečný součet a — pokud je řada konvergentní — taky její součet celkový. Odpovídající řady v následující úloze konvergentní jsou, což nám dovoluje stanovit odhad n-tého součtu nezávisle na n:



OBRÁZEK 10. $\int_i^j \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x < \sum_{k=i}^{j} \frac{1}{k} < \int_i^j \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$

Úloha 34. *Dokažte, že pro libovolné $n > 1$ platí:*
(a) $\frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{3}{4}$, *(b)* $\frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}$, *(c) apod.*[9]
Poté tyto odhady ještě o něco upřesněte.

Způsob argumentace v předchozích úlohách je spíše pravidlem než výjimkou: Často umíme poznat, že nekonečná řada má konečný součet, ale nejsme schopni určit přesně jaký. Důvodem bývá to, že neumíme určit posloupnost částečných součtů (viz úlohu 27), tudíž nemůžeme počítat její limitu. Nicméně každé z kritérií, pomocí něhož o konvergenci dané řady rozhodujeme, nám vždy současně nabízí jakýsi odhad celkového součtu, a to s libovolnou přesností!

Nezapomínejte, že nejjednodušším kritériem konvergence/divergence řady je **přímé srovnání** s nějakou řadou, o které víme všechno.

Úloha 35. *Porovnejte řadu* $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ *s řadou* $\sum_{k=*}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$, *kterou jsme se naučili sčítat v úloze 24(b), a zrevidujte odhad v úloze 34(a).*

4.4. Poznámky. Uvědomte si, že užití integrálního kritéria má jistá omezení: Jednak funkce, která interpoluje danou posloupnost musí být kladná a klesající. Hlavně však obecně čelíme podobným nástrahám jako v poznámce před úlohou 27 — neurčité integrály k mnoha elementárním funkcím jsou **vyšší transcendentní funkce**, což znamená, že je nelze vyjádřit v tzv. uzavřeném tvaru.

Kromě integrálního a srovnávacího kritéria si jistě ještě vzpomínáme na kritérium podílové a odmocninové. Uvědomte si, čím byla tato dvě kritéria motivována a proč je jejich užití u většiny předchozích úloh k ničemu. . .

Aplikace integrálního kritéria v úloze 32 byla obzvlášť jednoduchá a elegantní, takže nemusíme cítit potřebu se k této úloze vracet. Avšak divergenci harmonické řady lze taky velmi snadno zdůvodnit s odkazem na následující obecné tvrzení.

Věta 9. *Řada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje* ***absolutně*** *právě tehdy, když její součet* ***nezávisí na pořadí*** *sčítanců v řadě.*

Úloha 36 (Harmonická podruhé)**.** *Dokažte znovu, že harmonická řada diverguje.*

Vzhledem k tomu, že harmonická řada je tvořena výhradně kladnými sčítanci, tak předpoklad konvergence automaticky znamená absolutní konvergenci. Předpokládejme tedy, že harmonická

[9]Nápověda: $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$.

řada konverguje a má součet s. Podle předchozí věty by se žádným přeskládáním sčítanců neměl tento součet změnit. My však ukážeme, že se po vhodném přeskládání změní, což bude spor s předpokladem, takže harmonická řada musí být divergentní.

Nápadů s přeskládáním této řady existuje celá řada,[10] zde je jedna ukázka:

$$\begin{aligned} s &= \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\dots \\ &= \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{30}\right)+\dots \end{aligned}$$

Nyní sčítance přeskládáme a dostaneme

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\dots\right),$$

což se rovná s plus něco nenulového, čili něco jiného než byl původní součet s. □

Do páru s větou 9 ještě připomínáme jedno důležité tvrzení, se kterým se taky dá vymyslet spousta inteligentní zábavy.

Věta 10 (Riemannova)**.** *Předpokládejme, že řada* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ *konverguje, ale nikoli absolutně. Potom je možné přeskládat sčítance v řadě tak, že tato nová řada konverguje k libovolnému reálnému číslu, příp. diverguje k* ∞*, příp. diverguje k* $-\infty$*, příp. osciluje.*

Úloha 37 (Leibnizova)**.** *Přeskládejte Leibnizovu řadu tak, abyste dostali řadu s dvojnásobným součtem.*

Leibnizova řada je alternující řada

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Pomocí Leibnizova kritéria se snadno zdůvodní, že Leibnizova řada konverguje; součet označíme s. Bereme-li všechny sčítance v absolutní hodnotě, dostáváme řadu harmonickou, o níž víme, že diverguje. Proto Leibnizova řada konverguje, ale nikoli absolutně. Podle Riemannovy věty je možné sčítance zamíchat tak, že dostaneme libovolný součet. Dvojnásobný součet je možné obdržet např. takto:

Nejprve si sčítance (v původním pořadí) upravíme

$$s=\left(2-\frac{2}{2}\right)-\frac{2}{4}+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{6}\right)-\frac{2}{8}+\dots,$$

po vhodném přeskládání dostáváme

$$2-\frac{2}{2}+\frac{2}{3}-\frac{2}{4}+\frac{2}{5}-\dots=2s. \qquad \square$$

V tomto odstavci samozřejmě nesmíme opomenout některé obzvlášť významné nekonečné součty. Máme na mysli populární iracionální (zde dokonce transcendentní) čísla vyjádřená jako součty řad racionálních čísel. Jedno a to samé číslo lze samozřejmě vyjádřit různými způsoby, tady uvádíme jenom několik ukázek:

Úloha 38. *Dokažte, že*

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\dots=e,$

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots=\ln 2,$

[10] http://www.mathteacherctk.com/blog/2010/10/a-divergent-harmonic-series/

(c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$,

(d) apod.

5. Diferenční a sumační počty

V této části se vracíme ke dvěma otázkám, kterým jsme se částečně věnovali už dříve:

- Jak vyjádřit n-tý součet posloupnosti, pokud možno v uzavřeném tvaru?
- Jak vyjádřit n-tý člen posloupnosti, která je zadána rekurentním vztahem?

Nějakou představu o prvním problému máme z odstavce 4.1, druhému jsme se okrajově věnovali tamtéž a navíc v úlohách 14 a 16. V předchozí části jsme si mohli všimnout jisté symbiózy mezi konečnými, resp. nekonečnými součty a určitými, resp. nevlastními integrály. Tyto vztahy chápeme jako **diskrétní** a **spojitou** stranu jedné mince. V matematické analýze jsme převážně studovali tu druhou stranu mince, té první se budeme trochu důkladněji věnovat nyní. Začneme tím, že doplníme diskrétní protějšky k těm nejzákladnějším pojmům. Tady je stručný přehled:

posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$	funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
diference $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$	derivace $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
primitivní posloupnost $\Delta A_n = a_n$	primitivní funkce $F'(x) = f(x)$
neurčitý součet $\sum a_n = A_n + C$	neurčitý integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$
konečný součet $\sum\limits_{n=i}^{j} a_n = A_{j+1} - A_i$	určitý integrál $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$
řada $\sum\limits_{n=i}^{\infty} a_n = \lim\limits_{j\to\infty} \sum\limits_{n=i}^{j} a_n$	nevlastní integrál $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Stručný úvod do problematiky a nějaké další odkazy lze najít v [G]. Odstavce odpovídající diferenciálním počtům, integrálním počtům, resp. diferenciálním rovnicím (jak je známe z kurzů mat. analýzy I, II, resp. III) jsou diferenční počty, sumační počty, resp. diferenční rovnice.

5.1. Diferenční počty. Diskrétní verzí derivace funkce je diference posloupnosti. *Diference* posloupnosti (a_n) je posloupnost (Δa_n) definovaná vztahem $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$. Ne každá funkce má derivaci, zato každá posloupnost má diferenci. Pojem iterované diference je snad jasný. Definici a obecné vlastnosti operátoru Δ shrnujeme v následující tabulce:[11]

$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$	$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n) = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n$	$f''(x) = (f'(x))' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$
$\vdots$	$\vdots$
$\Delta(a_n + b_n) = \Delta a_n + \Delta b_n$	$(f+g)' = f' + g'$
$\Delta(c\cdot a_n) = c\cdot \Delta a_n$	$(c\cdot f)' = c\cdot f'$
$\Delta(a_n\cdot b_n) = a_n\cdot \Delta b_n + \Delta a_n \cdot b_{n+1}$	$(f\cdot g)' = f\cdot g' + f'\cdot g$

Máme namířeno ke konkrétnímu užití diferenčního počtu, takže budeme potřebovat diference některých užitečných posloupností.

Úloha 39. *Určete diferenci (a) aritmetické, (b) geometrické a (c) Fibonacciho posloupnosti.*

(a) Pro aritmetickou posloupnost s distancí d zřejmě platí $\Delta a_n = d$.
(b) Pro geometrickou posloupnost s kvocientem q je $\Delta a_n = a_n \cdot q - a_n = (q-1)\cdot a_n$.
(c) Pro Fibonacciho posloupnost platí $\Delta a_n = a_n + a_{n-1} - a_n = a_{n-1}$. □

---

[11]V každém dílčím přehledu budeme pro porovnání doplňovat odpovídající vztahy ze spojitého světa.

Geometrická posloupnost je exponenciální vzhledem k n a její diference je typově stejná.

Aritmetická posloupnost je lineární vzhledem k n a její diferencí je konstantní posloupnost. Diferencí konstantní posloupnosti je samozřejmě nulová posloupnost. Obecněji, pro posloupnosti tvaru (16), platí

$$\Delta n^r = (n+1)^r - n^r = rn^{r-1} + \frac{r(r-1)}{2}n^{r-2} + \cdots + 1.$$

Vidíme, že diferencí se snižuje stupeň exponentu o jedničku, ale výsledný výraz vypadá jaksi komplikovaně. Při následujícím užitečném značení

$$n^{\underline{r}} := n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{18}$$

se snadno zdůvodní, že platí

$$\Delta n^{\underline{r}} = r \cdot n^{\underline{r-1}}.$$

Zde jsme uvažovali $r \in \mathbb{N}$, ale definici $n^{\underline{r}}$ lze přirozeně rozšířit tak, že předchozí rovnost platí pro libovolné $r \in \mathbb{R}$.[12]

Podstatné závěry dosavadního uvažování jsou:

$$\begin{array}{ll||ll} \Delta q^n &= (q-1)\cdot q^n & (q^x)' &= \ln q \cdot q^x \\ \Delta n^{\underline{r}} &= r \cdot n^{\underline{r-1}} & (x^r)' &= r \cdot x^{r-1} \end{array} \tag{19}$$

Úloha 40. *V předchozím přehledu dokažte všechny rovnosti, které nejsou na první pohled zřejmé.*

5.2. Sumační počty. Posloupnost (A_n) taková, že platí

$$\Delta A_n = a_n \quad \Big\| \quad F'(x) = f(x)$$

se jmenuje *primitivní posloupnost*, příp. *antidiference* (a_n). Každá posloupnost (a_n) má mnoho různých primitivních posloupností, všechny se však od sebe liší jenom o nějakou konstantu $C \in \mathbb{R}$. Obecné primitivní posloupnosti k (a_n) se říká *neurčitý součet* a značí se

$$\sum a_n = A_n + C \quad \Big\| \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Důvod tohoto pojmenování a značení by měl být zřejmý z následujícího. Nejprve uvádíme dva zřejmé důsledky (19), na které se budeme dále odkazovat:

$$\begin{array}{l||l} \sum n^{\underline{r}} = \frac{n^{\underline{r+1}}}{r+1} + C & \int x^r\,\mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \\ \sum q^n = \frac{q^n}{q-1} + C & \int q^x\,\mathrm{d}x = \frac{q^x}{\ln q} + C \end{array} \tag{20}$$

Pro libovolnou posloupnost (a_n) uvažme posloupnost (A_n) definovanou jako

$$A_n := a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{n-1},$$

kde $i < n$ je celkem libovolné. Potom zřejmě platí, že $\Delta A_n = a_n$, tudíž obecnou primitivní posloupnost k (a_n) můžeme vyjádřit jako

$$\sum a_n = \sum_{k=i}^{n-1} a_k + C \quad \Big\| \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C$$

Jako bezprostřední důsledek těchto pozorování dostáváme následující analogii Newtonovy–Leibnizovy věty:

[12] Pro $r = 0$ se vezme $n^{\underline{0}} := 1$; pro $r = -1, -2, \dots$ se definuje $n^{\underline{r}} := \frac{1}{(n+1)\cdots(n-r)}$; pro neceločíselné hodnoty r se použije **gamma funkce** $n^{\underline{r}} := \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-r+1)}$.

Věta 11 (Základní věta diferenčního počtu). *Pokud je (A_n) primitivní posloupnost k posloupnosti (a_n), potom platí*

$$\sum_{k=i}^{j} a_k = A_{j+1} - A_i \qquad \Big\| \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Pokud pro danou posloupnost umíme vyjádřit její primitivní posloupnost, dává nám tato věta slibovaný alternativní návod, jak přímo (bez jakékoli indukce) vyjadřovat libovolný její součet.

Úloha 41. *Určete n-tý součet (a) aritmetické, (b) geometrické a (c) Fibonacciho posloupnosti.*

Ve všech třech případech umíme vyjádřit a_n pomocí n a tato závislost je buď mocninná nebo exponenciální. Podle (20) tedy umíme najít primitivní posloupnost A_n a podle věty 11 pak můžeme určit kterýkoli součet se nám zlíbí. Např. vyjádření n-tého částečného součtu geometrické posloupnosti $a_n = a_1 q^{n-1}$ vypadá podle tohoto návodu následovně:

$$\begin{aligned} \sum a_k &= a_1 \frac{q^{k-1}}{q-1} + C, \\ \sum_{k=1}^{n} a_k &= a_1 \frac{q^n}{q-1} - a_1 \frac{q^0}{q-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}. \end{aligned} \qquad \square$$

Posloupnosti v předchozí úloze umíme celkem pohodlně sečíst i bez diferenčního počtu, takže nám tento postup nemusí přijít úplně atraktivní. Právě nabyté dovednosti bychom však měli docenit v případech jako např. (17), které se bez nápovědy řeší dost těžko.

Úloha 42. *Určete součet* $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.

Primitivní posloupnost k posloupnosti (n^2) z hlavy neznáme. Pomocí $n^{\underline{1}} = n$ a $n^{\underline{2}} = n(n-1)$ se však n^2 dá vyjádřit takto:

$$n^2 = (n^2 - n) + n = n^{\underline{2}} + n^{\underline{1}}.$$

Podle (20) tedy určíme primitivní posloupnost

$$\sum n^2 = \frac{n^{\underline{3}}}{3} + \frac{n^{\underline{2}}}{2} + C.$$

Podle věty 11 už jenom dosadíme meze

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{(n+1)^{\underline{3}}}{3} + \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2} - \frac{1^{\underline{3}}}{3} - \frac{1^{\underline{2}}}{2} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2} - 0 - 0 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned} \qquad \square$$

Na závěr ještě jeden problém, o němž jsme se začali bavit v úloze 13:

Úloha 43. *Uvažujte mapu tvořenou výhradně přímkami. Určete kolik nejvýše oblastí může být vymezeno právě n přímkami.*

Jediná přímka vymezuje právě dvě oblasti; dvě přímky vymezí nejvýše 4 oblasti (právě když jsou různoběžné); tři přímky vymezí nejvýše 7 oblastí (právě když jsou každé dvě navzájem různoběžné). Obecně, přidáme-li k n přímkám na mapě jednu další, můžeme dostat nejvýše $n+1$ nových oblastí. Odpovídající posloupnost je $(a_n) = (2, 4, 7, \dots)$, přičemž

$$a_{n+1} = a_n + (n+1).$$

Otázka zní, jak odtud vyjádřit a_n? Definující rovnost můžeme přepsat

$$\Delta a_n = n + 1,$$

odkud podle (20) plyne

$$a_n = \frac{n^2}{2} + n + C.$$

Protože $a_1 = 2$, musí být $C = 1$. Celkem po úpravě dostáváme

$$a_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}. \qquad \square$$

5.3. Diferenční rovnice. Řešení úlohy 43 můžeme interpretovat jako řešení jednoduché diferenční rovnice prvního řádu ($\Delta a_n = n + 1$) s počáteční podmínkou ($a_1 = 2$). Obecné *diferenční rovnice* prvního, druhého, ... řádu jsou rovnice tvaru

$$\begin{array}{l|l} \Delta a_n = \varphi(n, a_n) & f'(x) = \varphi(x, f(x)) \\ \Delta^2 a_n = \varphi(n, a_n, \Delta a_n) & f''(x) = \varphi(x, f(x), f'(x)) \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

kde φ je nějaká funkce dvou, třech, ... proměnných. Rozepsáním Δ, Δ^2, ... lze každou diferenční rovnici psát jako

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \psi(n, a_n), \\ a_{n+2} &= \psi(n, a_n, a_{n+1}), \\ &\vdots \end{aligned}$$

To jsou známé rekurentní vztahy, se kterými jsme se potkali již mnohokrát.

Úloha 44. *Najděte v tomto textu další rekurentní vztahy, resp. diferenční rovnice.*

V úloze 14 o Hanojských věžích jsme měli posloupnost (a_n) popsánu rekurentním vztahem, resp. diferenční rovnicí

$$a_{n+1} = 2a_n + 1, \text{ resp. } \Delta a_n = a_n + 1$$

s počáteční podmínkou $a_1 = 1$. Podobně, aritmetická, geometrická a Fibonacciho posloupnost jsou určeny rekurentními vztahy, resp. diferenčními rovnicemi

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + d, \text{ resp. } \Delta a_n = d, \\ a_{n+1} &= q \cdot a_n, \text{ resp. } \Delta a_n = (q-1)a_n, \\ a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n, \text{ resp. } \Delta^2 a_n = a_n - \Delta a_n. \qquad \square \end{aligned}$$

Všechny uvedené vztahy/rovnice mají společné to, že jsou **lineární**, tzn. jednoduché. Ukážeme si, jak najít řešení těchto rovnic přímo, tj. bez matematické indukce. Lineární diferenční rovnice jsou rovnice, které je možné přepsat ve tvaru

$$\begin{array}{l|l} a_{n+1} = k_n \cdot a_n + r_n & f'(x) = k(x) \cdot f(x) + r(x) \\ a_{n+2} = k_n \cdot a_{n+1} + l_n \cdot a_n + r_n & f''(x) = k(x) \cdot f'(x) + l(x) \cdot f(x) + r(x) \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

kde koeficienty (k_n), (l_n), (r_n) jsou nějaké posloupnosti. Pokud je $r_n = 0$, pak se rovnice jmenuje homogenní a právě s těmi začneme.

Úloha 45. *Najděte v předchozím výčtu* ***homogenní*** *lineární diferenční rovnice a určete jejich obecná řešení.*

Z uvedených rovnic to jsou právě rovnice popisující geometrickou a Fibonacciho posloupnost. V obou případech jsou všechny koeficienty konstantní, což dělá úlohu výrazně jednodušší. Obecným řešením rovnice

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

je každá geometrická posloupnost tvaru $a_n = C \cdot q^n$, kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

Z předchozí rovnice plyne, že $a_{n+2} = q^2 \cdot a_n$, což má následující užitečné důsledky: Pokud by kvocient q byl řešením algebraické $x^2 = k \cdot x + l$, potom by geometrická posloupnost q^n zřejmě byla řešením diferenční rovnice

$$a_{n+2} = k \cdot a_{n+1} + l \cdot a_n.$$

Přitom každý její násobek by taky byl řešením a pro dvě různá řešení by také jejich součet byl řešením. Odtud plyne návod, jak hledat obecné řešení rovnic tohoto typu, který demonstrujeme na rovnici popisující Fibonacciho posloupnost,

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n. \tag{21}$$

Uvažujeme řešení tvaru $a_n = q^n$, jež po dosazení do této rovnice dává algebraickou podmínku na hodnotu kvocientu q:

$$q^2 = q + 1, \text{ neboli } q^2 - q - 1 = 0. \tag{22}$$

Tato rovnice má dva různé reálné kořeny

$$q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Obecné řešení diferenční rovnice je tedy tvaru

$$a_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n, \tag{23}$$

kde C_1, C_2 jsou libovolné konstanty. □

Úloha 46. *Vyjádřete n-tý člen Fibonacciho posloupnosti v uzavřeném tvaru.*

Fibonacciho posloupnost je jednoznačně určena diferenční rovnicí (21) s počáteční podmínkou

$$a_1 = 1 \text{ a } \ a_2 = 1.$$

Obecné řešení (21) máme vyjádřeno v (23) a koeficienty $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ jsou jednoznačně vymezeny právě těmito podmínkami. Po dosazení dostáváme C_1 a C_2 jako řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých:

$$C_1 = 1 \text{ a } \ C_2 = -1.$$

Dosadíme zpět do (23), porovnáme s vyjádřením v úloze 16 a s mimořádným uspokojením podtrhneme výsledek. □

Úloha 47. *Najděte v předchozím výčtu* ***nehomogenní*** *lineární diferenční rovnice a určete jejich obecná řešení.*

Velmi speciální rovnice tohoto typu jsou rovnice popisující aritmetickou posloupnost a rovnice z úlohy 43. Speciálnost spočívá v tom, že obě tyto rovnice lze vyjádřit ve tvaru

$$\Delta a_n = r_n,$$

tudíž obecné řešení je $a_n = \sum r_n + C$, kde $C \in \mathbb{R}$.

Dalším příkladem nehomogenní lineární diferenční rovnice je rovnice

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 \tag{24}$$

z úlohy 14 o Hanojských věžích. Obecné řešení homogenizované rovnice $a_{n+1} = 2a_n$ je tvaru $C \cdot 2^n$ s libovolným $C \in \mathbb{R}$. Pokud uhodneme/najdeme jedno jediné řešení p_n původní rovnice (24), pak obecné řešení této rovnice bude tvaru

$$a_n = C \cdot 2^n + p_n.$$

Protože v rovnici (24) jsou všechny koeficienty konstantní, jistě bude mít tato rovnice nějaké konstantní řešení. Jediné konstantní řešení je $p_n = -1$, tudíž

$$a_n = C \cdot 2^n - 1$$

je obecným řešením (24). □

Uvědomte si, že řešení úlohy 14 je jednoznačně vymezeno počáteční podmínkou $a_1 = 1$, což po dosazení a úpravě dává $C = 1\ldots$

5.4. Poznámky. Návod v řešení úlohy 42 lze samozřejmě zobecňovat pro další posloupnosti tvaru (16). V této souvislosti potřebujeme hned zkraje řešit následující úlohu, která může být zajímavá sama o sobě:

Úloha 48. *Vyjádřete* n^r *jakožto lineární kombinaci* $n^{\underline{i}}$ *pro* $i = 1, \ldots, r$.

Z předešlého víme, že

$$n^1 = n^{\underline{1}},\ n^2 = n^{\underline{2}} + n^{\underline{1}}.$$

Podobně se zdůvodní, že

$$n^3 = n^{\underline{3}} + 3n^{\underline{2}} + n^{\underline{1}},\ n^4 = n^{\underline{4}} + 6n^{\underline{3}} + 7n^{\underline{2}} + n^{\underline{1}},\ \ldots$$

Zajímavou diskuzi k možnému zobecnění lze najít v [G]... □

Uvědomte si, že s větou 11 jsme se obecně nezbavili problému, který zmiňujeme před úlohou 27. Tato věta jej však transformuje na problém, zda lze primitivní posloupnost k dané posloupnosti vyjádřit v uzavřeném tvaru, či nikoli.

Úloha 49. *Dokažte, že pro žádné* $r > 0$ *neumíte vyjádřit primitivní posloupnost k posloupnosti* $a_n = \frac{1}{n^r}$ *v uzavřeném tvaru.*

Nejen, že to neumíme — ono to opravdu, ale opravdu nejde! Nicméně, při experimentování s tímto úkolem si pravděpodobně každý všimne, že

$$\Delta\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)},$$

takže aspoň můžeme alternativně vyřešit úlohu 24(b)...

Kvadratickou rovnici (22) lze ekvivalentně přepsat takto:

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1-q}{q}. \tag{25}$$

Důvodem tohoto přepisu je, že tady rozpoznáváme definici *zlatého řezu*.[13] Ten se — stejně jako Fibonacciho posloupnost — objevuje v mnoha matematických zákoutích, pročež si o něm snad ještě něco řekneme...

Pokud narazíme na lineární diferenční rovnici, která nemá konstantní koeficienty, pak nemůžeme předpokládat existenci konstantního řešení, jak jsme to dělali v řešení úlohy 47. V takovém případě těžiště úlohy tkví právě v nalezení nějakého jednoho partikulárního řešení (podobně jako tomu bylo v části 1 o lineárních diofantických rovnicích). Tento problém tady nehodláme příliš rozmazávat, ale měli bychom si aspoň uvědomovat, že existují různé metody, jak si s ním poradit. Tak jako v celé této části, spousta nápadů je analogická tomu, co znáte z matematické analýzy:

Úloha 50. *Vzpomeňte na některé metody řešení lineárních diferenciálních rovnic a zkuste je aplikovat k dořešení např. diferenční rovnice* (24).

Mnoho a mnoho diferenčních rovnic, resp. rekurentních vztahů můžeme potkat téměř na každém rohu. Vzpomeňte, že např. několikrát zmiňovaná Fibonacciho posloupnost odpovídá neomezenému růstu idealizované nesmrtelné králičí populace. Rekurzivní úvahy se přirozeně objevují také u řady kombinatorických úloh; zde je několik ukázek [L]:

Úloha 51. *Házeme n-krát nějakou mincí. V závislosti na n vyjádřete pravděpodobnost, že někdy během házení padne panna dvakrát za sebou.*

Úloha 52. *Kolika způsoby lze rozmístit* n *věží na šachovnici* $n \times n$ *tak, aby se věže navzájem neohrožovaly a současně aby platilo některé z následujících omezení?*

(a) Aby žádná věž nestála na hlavní úhlopříčce.
(b) Aby rozmístění věží bylo symetrické podle hlavní úhlopříčky.
(c) Aby rozmístění věží bylo symetrické podle středu šachovnice.
(d) Apod.

[13] http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio

* * *

6. Zatím nezařazeno

Dláždění roviny pravidelnými mnohoúhelníky. Každý umí vydláždit rovinu jenom pravidelnými trojúhelníky, nebo čtyřúhelníky, nebo šestiúhelníky. Pokud uvažujeme dláždění, kde se střídají různé typy pravidelných mnohoúhelníků, pak objevujeme nové a nové možnosti. Kupodivu jich však není až tak mnoho…

Úloha 53. *Kolika způsoby je možné vydláždit rovinu pravidelnými mnohoúhelníky (různých typů), které mají shodné strany a potkávají se ve vrcholech?*

Při rozboru této úlohy narazíme mimo jiné na několik diofantických rovnic typu:

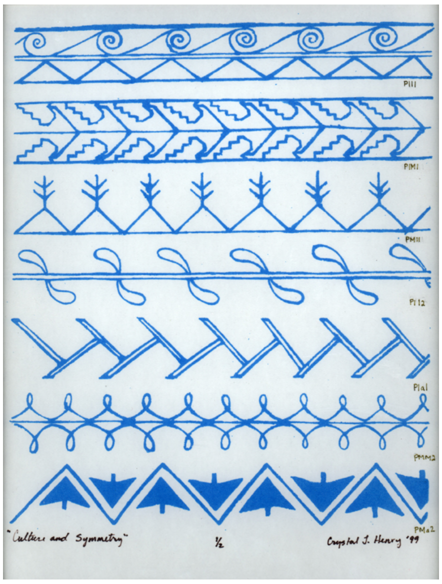
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \cdots = w, \tag{26}$$

kde w je nějaké racionální číslo…

Symetrie periodických vzorů. U periodických dláždění roviny pozorujeme různé typy symetrií. Pokud rozdělíme taková dláždění podle toho, zda mají nebo nemají stejné symetrie, pak z jistého důvodu těchto skupin určitě nebude víc než 17…

Jednodušší verze tohoto problému se týká symetrií tzv. frízových vzorů, což jsou vzory, které se periodicky opakují jenom v jednom směru, viz obr. 11.

Úloha 54. *Dokažte, že z hlediska symetrií existuje právě 7 typů frízových vzorů.*

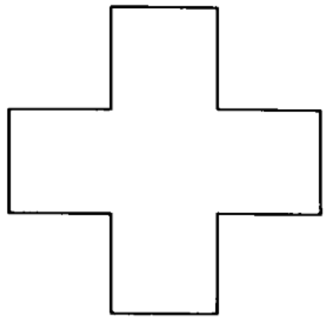


Obrázek 11.

* * *

Kvadratura mnohoúhelníku.

Úloha 55. *Rozdělte kříž na obr. 12 (tvořený pěti shodnými čtverci) dvěma řezy na několik částí tak, abyste z nich složili jeden čtverec.* [Ko]



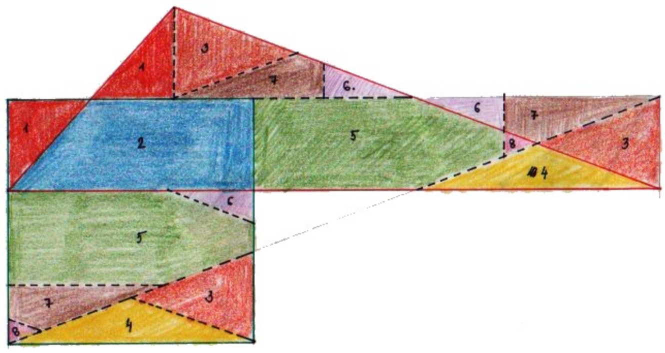
Obrázek 12.

Konstrukce čtverce se stejným obsahem jako má daný rovinný útvar je tzv. problém *kvadratury.* Tady bychom si měli připomenout, že s eukleidovským pravítkem, kružítkem, příp. nůžkami umíme kvadraturovat libovolný mnohoúhelník…

Po krátkém experimentování a následném rozvažování můžeme prohlásit, že dokonale rozumíme následujícímu tvrzení:

Věta 12 (Wallaceova–Bolyaiova–Gerwienova)**.** *Dva mnohoúhelníky mají stejný obsah právě tehdy, když jeden lze rozstříhat na části, z nichž lze složit ten druhý.*

S těmito poznatky můžeme snadno sestrojovat svoje vlastní důkazy některých známých tvrzení týkajících se rovnosti obsahů, jako např. Pythagorovy věty. Na obr. 13 je představena jedna z mnoha možností kvadratury obecného trojúhelníku.



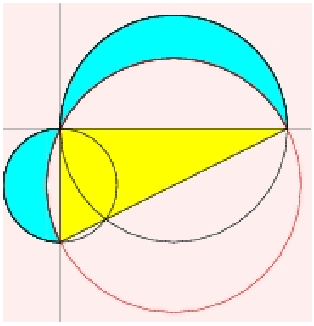
Obrázek 13.

Kvadratura křivých oblastí. Kromě libovolného mnohoúhelníku je možné kvadraturovat také řadu oblastí s křivou hranicí. Klasickými příklady jsou Archimédova kvadratura parabolické úseče v úloze 30 nebo kvadratura Hippokratových půlměsíců v úloze následující.

Úloha 56 (Hippokratovy půlměsíce)**.** *Dokažte, že nad libovolným pravoúhlým trojúhelníkem platí, že obsah půlměsíců vyznačených na obr. 14 je stejný jako obsah trojúhelníku.*

Kvadratura kruhu a další slavné problémy starověku. S kruhem je to samozřejmě jiné — kvadratura kruhu je jeden z nejslavnějších problémů starověku.

Úloha 57 (Kvadratura kruhu)**.** *Zdůvodněte, proč není možné kvadraturovat kruh eukleidovským pravítkem a kružítkem.*

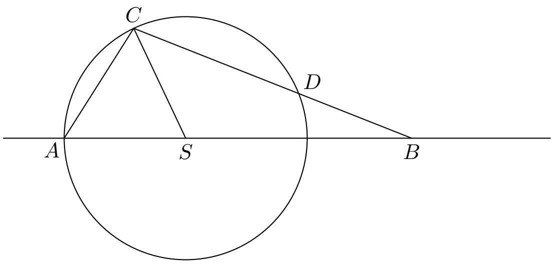


Obrázek 14.

Do této skupiny problémů patří ještě problém zdvojení krychle (konstrukce krychle s dvojnásobným objemem jako daná krychle), problém trisekce úhlu (rozdělení daného úhlu na třetiny) a s ním související problém konstrukce pravidelného n-úhelníku…

Zdvojení krychle je obecně nemožné a pokud rozumíme úloze 57, pak zdůvodnění je nabíledni. Zbylé dva problémy jsou poněkud subtilnější, protože někdy řešitelné jsou a jindy ne! S problémem trisekce úhlu souvisí následující úloha:

Úloha 58. *Libor narýsoval kružnici se středem S a body A, B, C, D, viz obr. 15. Zjistil, že úsečky SC a BD jsou stejně dlouhé. V jakém poměru jsou velikosti úhlů ASC a ABC?* [MO, 60. ročník]



Obrázek 15.

Konstrukce pravidelného n-úhelníku evidentně souvisí s problémem trisekce úhlu, akorát jsme podstatně redukovali množinu úhlů do diskuze. V [E] najdeme konstrukce pro $n = 3, 4, 5$ a 15. Pro každý sestrojitelný pravidelný k-úhelník, není problém sestrojit taky pravidelný $2k$-úhelník. Tzn. úloha je řešitelná také pro $n = 6, 8, 10, 12, 16, 20$ a další. Obecná charakterizace sestrojitelných mnohoúhelníků je známá teprve z přelomu 18. a 19. století:

Věta 13 (Gaussova–Wantzelova)**.** *Pravidelný n-úhelník lze sestrojit eukleidovským pravítkem a kružítkem právě tehdy, když n je součinem libovolné mocniny 2 a navzájem různých Fermatových prvočísel.*

Fermatovo prvočíslo je prvočíslo tvaru $F_k = 2^{2^k} + 1$. K dnešnímu dni[14] je známo pouze pět Fermatových prvočísel: $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257$ a $F_4 = 65537$. Úloha sestrojitelnosti pravidelného n-úhelníku tedy není řešitelná pro $n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, \ldots$

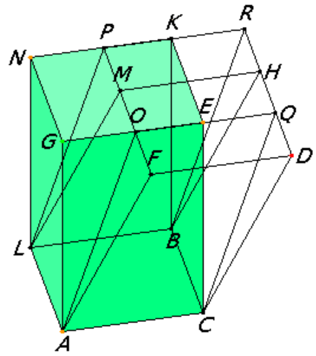
Úloha 59. *Sestrojte co nejvíc různých pravidelných mnohoúhelníků.*

* * *

[14] 22. listopadu 2013

Objemy hranolů a jehlanů. Trojrozměrná analogie věty 12 pro mnohostěny a jejich objemy obecně neplatí! Pro rovnoběžnostěny sice taková analogie platí, ale třeba pro jehlany ne. Obecná charakterizace takových dvojic těles, pro která to platí, je netriviální a tudíž potenciálně zajímavá! Tento problém najdeme na výše zmiňovaném Hilbertově seznamu pod číslem 3...

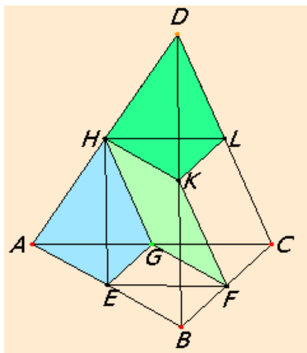
Úloha 60. *Dokažte, že rovnoběžnostěny se stejnou základnou a stejnou výškou mají stejný objem.* [E, XI.30]



Obrázek 16.

Problém s analogickým tvrzením pro jehlany spočívá v tom, že obecně nelze dokázat bez nějaké formy **infinitezimálních** úvah, viz [E, XII.5]. Na úvod můžeme vyřešit následující přípravnou úlohu:

Úloha 61. *V trojbokém jehlanu $ABCD$ jsou body E, F, G, H, K a L po řadě středy hran AB, BC, AC, AD, BD a CD, viz obr. 17. Dokažte, že hranoly $EBFGHK$ a $GFCHKL$ mají stejný objem.* [E, XII.3]



Obrázek 17.

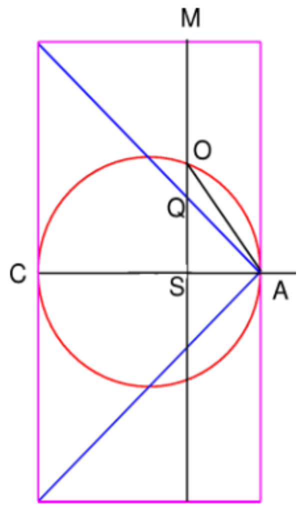
Objem koule. Odpověď na otázku, jak by se měl vyučovat objem koule, najdeme u Archiméda:

Věta 14 (Archimédova)**.** *Objem koule je roven dvěma třetinám objemu opsaného válce.*

Po několika přípravných a velice zajímavých úvahách se v důkaze tohoto tvrzení nakonec objevuje následující jednoduchá planimetrická úloha:

Úloha 62. *Na obrázku obr. 18 dělí úsečka AC fialový obdélník na dva stejné čtverce, bod S je libovolný bod na AC a bod Q, resp. O označuje průsečík SM s modrou úhlopříčkou, resp. s červenou kružnicí. Dokažte, že platí*

$$|MS|^2 \cdot |SA| = (|OS|^2 + |QS|^2) \cdot |CA|.$$



Obrázek 18.

* * *

Další diofantické rovnice.

Úloha 63. *Dokažte, že libovolná diofantická rovnice typu* (26) *má jen konečně mnoho kladných celočíselných řešení.*

Úloha 64 (Pythagorejské trojice)**.** *Najděte všechna kladná celočíselná řešení rovnice $x^2+y^2 = z^2$.*

Úplná charakterizace všech řešení je následující:

Trojice x, y, z je řešením diofantické rovnice právě tehdy, když

$$x = 2mn, \;\; y = n^2 - m^2, z = n^2 + m^2,$$

pro nějaká přirozená čísla $m < n$. Navíc čísla x, y, z jsou navzájem nesoudělná právě tehdy, když m, n jsou nesoudělná a mají opačnou paritu. . . □

Varianta předchozí úlohy:

Úloha 65. *Dokažte, že rovnice $x^2 + y^2 = z^n$ má kladné celočíselné řešení pro libovolné $n = 1, 2, 3, \dots$* [L]

Podobně vyhlížející, mnohem těžší a taky nejslavnější ze všech diofantických rovnic:[15]

Úloha ♯66 (Fermatova)**.** *Dokažte, že pro $n > 2$ nemá rovnice $x^n + y^n = z^n$ řešení v oboru přirozených čísel.*

* * *

[15] `http://cs.wikipedia.org/wiki/Velk%C3%A1_Fermatova_v%C4%9Bta`

Úlohy s pohybem.

Úloha 67. *Dva turisté strávili čas mezi třetí a devátou hodinou odpolední na procházce. Nejprve šli kus cesty po rovině, pak do kopce. Na vrcholu kopce se obrátili a po stejné cestě se vrátili zpět. Po rovině šli rychlostí čtyři míle za hodinu, do kopce tři míle za hodinu, z kopce šest mil za hodinu. Určete vzdálenost, kterou urazili.*

Dále určete s přesností plus minus půl hodiny čas, kdy stanuli na vrcholu kopce. [C]

Všimněte si, že hodnoty v zadání nemohou být libovolné, aby se úloha dala dořešit…

Úloha 68. *Franta si vyrazil na výlet do Olomouce. Z hlavního nádraží se vydal pěšky do města. Po cestě si všiml, že v protisměru jej míjí tramvaje s intervalem 10 min 48 s a tramvaje jedoucí ve směru chůze jej míjí s intervalem 13 min 30 s.*

Později Franta zjistil, že tramvaje vyjížděly v obou směrech ve stejných intervalech a pohybovaly se stejnými, a to konstantními, rychlostmi. Vzhledem k tomu, že se Franta také celou dobu pohyboval konstantní rychlostí, snadno spočítal interval, v jakém tramvaje vyjížděly. Zjistěte, co Frantovi vyšlo. [V]

* * *

Poctivci, padouši a další. Poctivci mluví vždy pravdu, padouši vždy lžou, …

Úloha 69. *Na ostrově poctivců a padouchů se ocitnete na rozcestí — jedna cesta vede ke zdroji pitné vody, druhá vede do záhuby. Po chvíli se objeví dva domorodci. Zjistěte pomocí jediné otázky, která cesta je ta pravá.* [Sm_1]

Taky se může stát, že domorodci sice rozumí naší řeči, ale odpovídají tak, že nerozumíme my. Vůbec nejhorší je, když jsou mezi původním obyvatelstvem také tzv. normální lidé, kteří mohou odpovídat jakkoli bez ohledu na to, zda mluví pravdu nebo ne………

* * *

Další nezařazené úlohy.

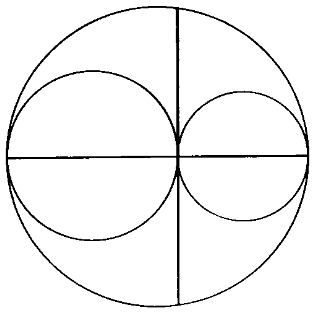
Úloha 70. *Dva kolegové, A a B, hledají celá čísla, x a y, obě větší než 1. A zná součin $x \cdot y$ a ví, že B zná součet $x + y$, B zná součet a ví, že A zná součin. Podle předchozích informací a následujícího rozhovoru, určete čísla x a y.*

A: *„Nevím, která to jsou čísla.“*
B: *„To jsem věděl.“*
A: *„Tak já už vím!“*
B: *„Tak já už taky!“*

Úloha 71 (Archimédova)**.** *Dvě menší kružnice se navzájem dotýkají zvenku a každá z nich se dotýká zevnitř třetí, větší kružnice, přičemž středy všech tří kružnic leží na jedné přímce, viz obr. 19. Známe délku tětivy velké kružnice, která prochází společným bodem dvou menších kružnic.*

Určete obsah plochy, která je ohraničena těmito třemi kružnicemi. [Po]

Úloha 72. *Napište několik čísel tak, že každou z deseti číslic použijete právě jednou a součet těchto čísel bude právě 100.* [Po]



OBRÁZEK 19.

REFERENCE

[A] B. Artmann, *Euclid: The Creation of Mathematics*, Springer, 1999
[C] L. Carroll, *Zamotaný příběh*, Dokořán, 2009
[D] H. Dörrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover, 1965
[E] Eukleidés, *Základy*, Alexandrie, −300
[G] D. Gleich, *Finite Calculus: A Tutorial for Solving Nasty Sums*, 2005
[H] R. Hartshorne, *Teaching geometry according to Euclid*, AMS, 2000
[HKŠ] J. Herman, R. Kučera, J. Šimša, *Metody řešení matematických úloh I*, MU Brno, 1997
[Ko] S. Kowal, *Matematika pro volné chvíle*, SNTL, 1975
[Ku] F. Kuřina, *Umění vidět v matematice*, SPN, 1989
[L] L.C. Larson, *Problem-solving through problems*, Springer, 1983
[N] R.B. Nelsen, *Proofs without words*, MAA, 1993
[Pe] J.I. Perelman, *Zajímavá geometrie*, Mladá fronta, 1954
[Po] G. Pólya, *Mathematical Discovery*, Wiley, 1981
[Sm_1] R. Smullyan, *Jak se jmenuje tahle knížka?*, Mladá fronta, 1986
[Sm_2] R. Smullyan, *Satan, Cantor a nekonečno*, Mladá fronta, 2008
[St_1] I. Stewart, *Jak rozkrájet dort a další matematické záhady*, Dokořán, 2009
[St_2] I. Stewart, *Professor Stewart's Cabinet of Mathematical Curiosities*, Perseus Books, 2009

[F] *Feature Column, Monthly essays on mathematical topics*, AMS (`http://www.ams.org/samplings/feature-column/fc-current.cgi`)
[MKS] *Matematický korespondenční seminář* (`http://mks.mff.cuni.cz/`)
[MO] *Matematická olympiáda* (`http://math.muni.cz/mo/`)
[V] *Výfuk* (`http://vyfuk.fykos.cz/`)
[?] Úlohy z neznámých zdrojů od studentů tohoto kurzu

Některé zdroje a další odkazy lze najít na
`http://is.muni.cz/el/1441/podzim2013/MA2MP_SMR2/op/index.html`

Seznam obrázků

Rejstřík