Rovnice, nerovnice a jejich soustavy

(lineární, kvadratické, iracionální)

Repetitorium z matematiky

Podzim 2012

Ivana Medková

A) Rovnice a jejich řešení

- Mnoho fyzikálních, technických a jiných úloh lze matematicky formulovat jako úlohu typu:

*Jsou dány výrazy L(x) a P(x) s proměnnou x. Určete hodnoty této proměnné z daného číselného oboru M, pro něž jsou si rovny hodnoty obou výrazů. Zapisujeme **ROVNICÍ:***

$$L(x) = P(x)$$

levá strana rovnice

pravá strana rovnice

neznámá

Kořeny rovnice (*x_k*) = hodnoty neznámé, pro něž je rovnice splněna

Obor řešení rovnice (M) = číselný obor, ve kterém hledáme kořeny rovnice

Definiční obor rovnice (D) = podmnožina množiny M, v níž jsou definovány výrazy *L(x) a P(x)* .

Obor pravdivosti rovnice (K): Množina všech kořenů rovnice, $K \subset D \subset M$

Postup řešení rovnic

<u>1.1 ROZBOR</u> – rovnici postupně upravujeme na rovnici, jejíž kořeny známe, nebo je snadno dokážeme určit.

Důsledkové (implikační) úpravy – každý kořen dané rovnice je také kořenem rovnice získané její úpravou.

Ekvivalentní úpravy – množina všech kořenů nové rovnice = množině všech kořenů zadané rovnice.

Postup řešení rovnic

Ekvivalentní úpravy:

- ***Vzájemná výměna stran*** rovnice
- ***Přičtení*** téhož čísla nebo výrazu s neznámou k oběma stranám rovnice.
- ***Vynásobení*** obou stran rovnice týmž číslem nebo výrazem s neznámou, který je definován a různý od nuly v celém oboru řešení .
- ***Umocnění*** obou stran rovnice přirozeným mocnitelem (jsou-li obě strany rovnice nezáporné v celém oboru řešení rovnice).
- ***Odmocnění*** obou stran rovnice přirozeným odmocnitelem (jestliže jsou obě strany rovnice nezáporné v celém oboru řešení).
- ***Zlogaritmování*** obou stran rovnice při témž základu, jsou-li obě strany rovnice kladné.

Postup řešení rovnic

1.2 ZÁVĚR ROZBORU – určíme množinu M´ všech kořenů/řešení rovnice získané důsledkovými úpravami.

Množina M´ $\subset$ M představuje všechna možná řešení dané rovnice.

1.3 ZKOUŠKA - zjistíme, které z prvků x_k množiny M´ jsou kořeny dané rovnice:

- Postupně dosadíme každé z čísel x_k do levé i pravé strany rovnice.
- Platí-li $L(x_k) = P(x_k)$, je x_k kořenem dané rovnice.
- Výsledkem zkoušky je získání množiny K všech kořenů rovnice.
- Přitom platí: $K \subset M` \subset M$

1 LINEÁRNÍ ROVNICE

= každá rovnice, kterou lze upravit na tvar :

$$\boxed{ax + b = 0, \quad \text{pro} \ \forall \ a, b \in R}$$

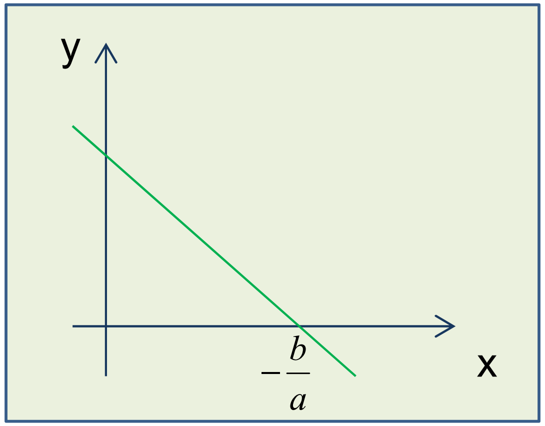
Při řešení mohou nastat tři případy.

$$ax+b=0, \quad \text{pro} \ \forall\, a,b \in R$$

A)

$a \neq 0 \Rightarrow K : 1!\, x \in R$
$ax + b = 0$
$ax = -b$
$x = -\dfrac{b}{a}$

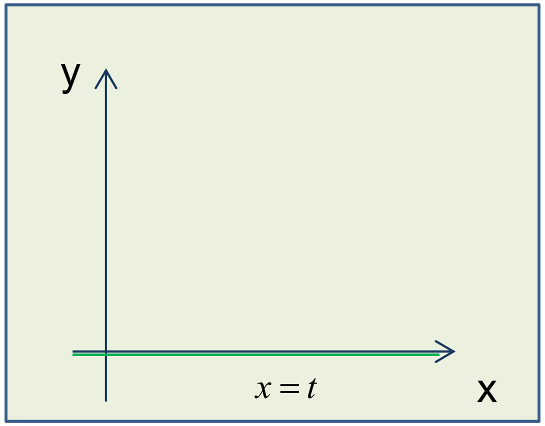
$$K = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$$



B)

$a = 0 \wedge \mathrm{b} = 0 \Rightarrow K : \forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{R}$
$ax + b = 0$
$0\,x = 0$
$x = t;\ t \in R$

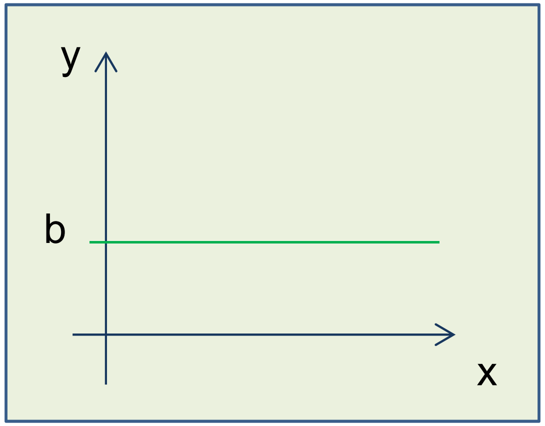
$$K = R$$



C)

$a = 0 \wedge \mathrm{b} \neq 0 \Rightarrow$ nemá řešení
$ax + b = 0$
$0\,x + b = 0$
$0\,x = -b$
$x = \{\ \}$

$$K = \{\ \}$$



1. 1 Řešení rovnic v daném oboru

Př.: Zjistěte, zda má rovnice $3x+5=3\sqrt{3}$ řešení v oboru

a) přirozených čísel (N)
b) celých čísel (Z)
c) kladných čísel (R+)

Řešení:

$$3x+5=3\sqrt{3}$$
$$3x=3\sqrt{3}-5$$
$$x=\frac{1}{3}\cdot\left(3\sqrt{3}-5\right)$$

$$a)\ K=\{\ \}$$
$$b)\ K=\{\ \}$$
$$c)\ K=\left\{\frac{1}{3}\cdot\left(3\sqrt{3}-5\right)\right\}$$

1.2 Lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli

- Rovnice typu: $$\frac{ax+b}{cx+d}=0$$

Řešení:

Stanovíme definiční obor (D) a po vyřešení rovnice zkontrolujeme, zda získané řešení vyhovují tomuto definičnímu oboru.

$$cx+d\neq 0 \Rightarrow ax+b=0,$$

Úlohy:

$$a)\ \frac{3x-2}{x+5}=2$$

$$b)\ \frac{3x+6}{x+2}=3$$

$$c)\ \frac{3x+6}{x+2}=5$$

1.3 Lineární rovnice s absolutní hodnotou

➢ Při řešení vycházíme z definice absolutní hodnoty výrazu M(x) obsahujícího proměnnou x, pro kterou platí:

$$|M(x)| = M(x), \qquad \text{je-li} \quad M(x) > 0$$
$$|M(x)| = 0, \qquad \text{je-li} \quad M(x) = 0$$
$$|M(x)| = -M(x), \qquad \text{je-li} \quad M(x) < 0$$

Řešení metodou intervalů:

1) Výrazy v absolutních hodnotách pokládáme rovny nule -> dostáváme tzv. **nulové body.**
2) Provedeme dílčí řešení pro každý interval, v němž nahrazujeme absolutní hodnoty výrazy bez absolutních hodnot, a to s ohledem na definici absolutní hodnoty.
3) Dostaneme tolik dílčích oborů pravdivosti $\boldsymbol{K_i}$, kolik je intervalů.
4) Konečný obor pravdivosti ***K*** získáme sjednocením dílčích oborů pravdivosti.

2 KVADRATICKÉ ROVNICE

= každá rovnice, kterou lze vyjádřit ve tvaru :

$$\underbrace{ax^2}_{\text{kvadratický člen}} + \underbrace{bx}_{\text{lineární člen}} + \underbrace{c}_{\text{absolutní člen}} = 0, \quad \text{pro} \ \forall\, a,b,c \in R \wedge a \neq 0$$

Při řešení mohou nastat tři případy.

$$ax^2+bx+c=0,\quad \text{pro}\ \forall\ a,b,c\in R\wedge a\neq 0$$

A) Ryze kvadratická rovnice

$$b=0\Rightarrow ax^2+c=0$$

$$ax^2=-c$$

$$x^2=-\frac{c}{a}$$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$-\frac{c}{a}<0\Rightarrow \quad K=\{\ \}$$

$$-\frac{c}{a}>0\Rightarrow \quad K=\left\{\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$$

$$-\frac{c}{a}=0\Rightarrow \quad K=\{0\}$$

B) Rovnice bez absolutního členu

$$c=0\Rightarrow ax^2+bx=0$$

$$x\cdot(ax+b)=0$$

$$x_1=0\vee x_2=-\frac{b}{a}$$

$$K=\left\{0,-\frac{b}{a}\right\}$$

C) Obecná kvadratická rovnice

$$a\neq 0\wedge \mathrm{b}\neq 0\wedge \mathrm{c}\neq 0\Rightarrow ax^2+bx+c=0$$

$$D=b^2-4ac$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

Je-li D > 0 => rovnice má právě 2 různé kořeny. $K=\left\{\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}\right\}$

Je-li D = 0 => rovnice má 1 dvojnásobný kořen. $K=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

Je-li D < 0 => rovnice nemá v R řešení. $K=\{\ \}$

2.1 Vlastnosti kořenů kvadratické rovnice

Má-li rovnice $ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{pro} \; \forall \, a, b, c \in R \wedge a \neq 0$

kořeny $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, platí:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \qquad \boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Důkaz:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

2.1 Vlastnosti kořenů kvadratické rovnice

Pro rovnici $x^2 + px + q = 0,$ (= normovaná rovnice, kde p=b/a, q= c/a)

platí: $\boxed{x_1 + x_2 = -p}$ $\boxed{x_1 \cdot x_2 = q}$ **Vietovy vzorce**

Důkazy:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} + \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \cdot \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{p^2 - \left(p^2 - 4q\right)}{4} = \frac{4q}{4} = q$$

$$x^2 + px + q = x^2 + \left(-x_1 - x_2\right)x + x_1x_2 = x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = \left(x - x_1\right)\cdot\left(x - x_2\right)$$

=> x_1 ,x_2 jsou kořeny dané rovnice

2.1 Vlastnosti kořenů kvadratické rovnice

Má-li rce $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ kořeny $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, platí:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot \underbrace{(x - x_1)}_{} \cdot \underbrace{(x - x_2)}_{}$$

kořenoví činitelé

Má-li rce $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ dvojnásobný kořen $\boldsymbol{x_1 = x_2}$, platí:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1)^2$$

Př.1: Na základě Vietových vzorců určete kořeny rovnice $x^2 + 7x + 12 = 0.$

Př.1: Najděte kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou čísla -3 a 8.

3 IRACIONÁLNÍ ROVNICE

= **rovnice s neznámou v odmocněnci**. Obsahují odmocniny z výrazů s neznámou. Upravujeme **neekvivalentními úpravami**, proto je **zkouška** nezbytnou součástí řešení těchto rovnic.

3.1 Rovnice obsahující jednu odmocninu

Postup řešení:

1. Osamostatníme odmocninu
2. Umocníme obě strany rovnice (neekvivalentní úprava)
3. Dořešíme rovnici
4. Provedeme zkoušku

Př.: $1+\sqrt{x+11}=x$

Řešení:

$$\sqrt{x+11}=x-1 \,\Big|^2$$

$$x+11=(x-1)^2$$

$$x+11=x^2-2x+1$$

$$x^2-3x-10=0$$

$$(x-5)\cdot(x+2)=0$$

$$x_1=5, x_2=-2,$$

Zkouška:

$L(x_1)=1+\sqrt{5+11}=5$ | $L(x_2)=1+\sqrt{-2+11}=4$

$P(x_1)=5$ | $P(x_2)=-2$

$L(x_1)=P(x_1)$ | $L(x_2)\neq P(x_2)$

Závěr: $\boxed{K=\{5\}}$

3 IRACIONÁLNÍ ROVNICE

3.2 Rovnice obsahující dvě odmocniny

$$2\cdot\sqrt{x+18}+\sqrt{4x-3}=15$$

$$\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{x-2}}=2$$

3.3 Rovnice obsahující více odmocnin

$$x-\sqrt{x}-\sqrt{x\cdot\sqrt{x}-x}=0$$

3.4 Řešení rovnic pomocí substituce

$$\sqrt{2\cdot\left(x^2+3x+6\right)^2-7}=x^2+3x+7$$

B) Nerovnice a jejich řešení

Jsou dány výrazy L(x) a P(x) s proměnnou x. Určete hodnoty této proměnné z daného číselného oboru M, pro něž platí:

$$L(x) < P(x), \text{ resp. } L(x) > P(x)$$
$$L(x) \leq P(x), \text{ resp. } L(x) \geq P(x)$$

Tento zápis se nazývá **NEROVNICE**.

Ekvivalentní úpravy:

- ***Vzájemná výměna stran*** nerovnice se současnou ***změnou znaménka***.
- ***Přičtení*** téhož čísla nebo výrazu s neznámou k oběma stranám rovnice.
- ***Vynásobení*** obou stran rovnice ***kladným*** číslem nebo výrazem s neznámou, který je definován a ***kladný*** v celém oboru řešení. ***Znak nerovnosti se nemění.***
- ***Vynásobení*** obou stran rovnice ***záporným*** číslem nebo výrazem s neznámou, který je definován a ***záporný*** v celém oboru řešení. ***Znak nerovnosti se změní v obrácený.***
- ***Umocnění*** obou stran rovnice přirozeným mocnitelem (jsou-li obě strany rovnice nezáporné v celém oboru řešení rovnice). ***Znak nerovnosti se nemění.***
- ***Odmocnění*** obou stran rovnice přirozeným odmocnitelem (jestliže jsou obě strany rovnice nezáporné v celém oboru řešení). ***Znak nerovnosti se nemění.***
- ***Zlogaritmování*** obou stran rovnice při témž základu ***větším než 1***, jsou-li obě strany rovnice kladné v celém oboru řešení. ***Znak nerovnosti se nemění.***

B) Nerovnice a jejich řešení

1 Lineární nerovnice

$ax + b < 0$, resp. $ax + b > 0$

$ax + b \leq 0$, resp. $ax + b \geq 0$ $\quad \forall a, b \in R$

Př.: $3x - 7 \leq 5x - 13$

2 Lineární nerovnice v podílovém tvaru

Př.: $\dfrac{x-1}{2-x} \leq 1$

3 Kvadratické nerovnice $\forall a, b, c \in R \wedge a \neq 0$

$ax^2 + bx + c < 0$, resp. $ax^2 + bx + c > 0$

$ax^2 + bx + c \leq 0$, resp. $ax^2 + bx + c \geq 0$

Řešení: pomocí rozkladu kvadratického trojčlenu převedeme nerovnici na součinový tvar a řešíme analogicky jako nerovnici v podílovém tvaru.

Př.: $x^2 - 6x - 27 > 0$

4 Nerovnice s absolutní hodnotou

Řešení: metodou intervalů

Př.: $\left|\dfrac{x-5}{x+1}\right| \leq 4$

5 Iracionální nerovnice

Řešení: umocněním, případně substitucí.

Př.: $\sqrt{6-x} < 3x - 4$

C) Soustavy rovnic

- **Soustavy lineárních rovnic** – řešení metodou **dosazovací** nebo **sčítací**

- **Soustavy s kvadratickými rovnicemi** – řešení metodou **dosazovací**

Literatura

- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Odvárko, O. a kol. Funkce. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1996.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.

Cvičení

$$\frac{\left(2^{10}\cdot 3\right)^2}{2\cdot 3^{13}}\cdot\left(\frac{81}{64}\right)^3=$$

$$\frac{2x^5y^3}{\left(2x^2y\right)^2}\div\left(\frac{xy}{2xy^2}\right)^3=$$

$$\left(\sqrt{2a}-\frac{2a}{a+\sqrt{2a}}\right)\div\left(\frac{\sqrt{2a}-2}{a-2}\right)$$

$$\left(x^4+8x^3+24x^2+32x+16\right)\div(x+2)=$$

$$2p^4-p^3+p-2=$$

$$xr-yr-x^2+2xy-y^2=$$

$$(x+y)^4-x^4=$$

$$\left(a-\frac{4ab}{a+b}+b\right)\div\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)=$$

$$\left(\frac{1}{2x-y}+\frac{3y}{y^2-4x^2}-\frac{2}{2x+y}\right)\div\left(\frac{4x^2+y^2}{4x^2-y^2}+1\right)=$$

$$\frac{1-\frac{1-\frac{n-1}{m}}{n}}{m+1}=$$

$$x-\frac{x-1}{3}-\frac{2x-5}{5}+\frac{x+8}{6}=7$$

$$3\cdot(x+5)-4x=5-x$$

$$\frac{4}{(x-1)\cdot(x+3)}+\frac{x+1}{x-1}=\frac{x+2}{x+3}$$

$$|2x+1|=|x-1|+2$$

a) $x^2+10x+24=0$

b) $x^2-2x-15=0$

c) $x^2+x-12=0$

a) $2x^2+11x+12=0$

b) $4x^2-12x+25=0$

a) $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$

b) $\sqrt{x^2-3x+11}=4x^2-12x+11$

a) $\frac{2}{3}x+1>2\cdot(2x+1)-3x$

b) $|x-1|+|2-x|>3+x$